

# نظرية الاحتمالات

الجزء الأول



تأليف

أ.د. عبد الحميد ربيع غيطان



**نظرية الاحتمالات**  
**والتوزيعات الاحتمالية**  
**(الجزء الأول)**

نظرية الاحتمالات والمتغيرات  
العشوائية ودوال توزيعاتها الاحتمالية





# نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية (الجزء الأول)

نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية  
ودوال توزيعاتها الاحتمالية

أ.د. عبد الحميد محمد ربيع غيضان

أستاذ الإحصاء

وعميد كلية التجارة جامعة الأزهر

الطبعة الأولى

٢٠٠٤

حقوق الطبع محفوظة للمؤلف

دار الكتب الأكاديمية

٨ أش ٢٦ يوليو / ت: ٣٩١٩٠٠٦

رقم الإيداع ٢٠٠٤/٢٤٥٦

HAMEDY - YA - HoJ

Dridreis @ hot Mail.Com

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا﴾

"صدق الله العظيم"

(سورة الجن - آية 28)



إلى ..

\* أمى وأبى وابنى محمد رحمهم الله

\* زوجتى وأبنائى ..

هويدا وممدوح وأحمد ومصطفى

وحفيدي محمد ..

أهدى هذا الكتاب



## المحتويات

عنوان الكتاب والمقدمة من (1) إلى (8)

### الفصل الأول

#### (نظرية الاحتمالات)

23	(1 - 1) مقدمة
23	(2 - 1) التعريف التقليدي للاحتمال
26	(3 - 1) التعريف التجريبي أو التعريف البعدي للاحتمال
29	(4 - 1) نظرية المجموعات
32	(5 - 1) تطبيق قواعد الجبر على المجموعات
35	(6 - 1) المتتابعة
40	(7 - 1) للمتابعات المضطربة
43	(8 - 1) المجموعات الخطية
44	(9 - 1) فراغ العينة وفراغ الأحداث
45	(10 - 1) عائلة بولين (بولين الجبر)
50	(11 - 1) عائلة بورال (بورال الجبر)
51	(12 - 1) دالة النقطة ودالة المجموعة
53	(13 - 1) التعريف الحديث للاحتمال
55	تعريف (1 - 13) "الاحتمال"
55	تعريف (2 - 13) "فراغ الاحتمال"
63	

## المحتويات

63	(1 - 14) فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة متماثلة
66	(1 - 15) العينات أو النقط في الفراغ
67	(1 - 16) حجم فراغ العينة المحدود في حالة سحب كرات عددها $n$ من كيس به $M$ كرة
68	(1 - 17) بعض النماذج الاحتمالية
68	مثال (1 - 17 - 1) (مشكلة أعياد الميلاد)
70	مثال (1 - 17 - 2) (احتمال الحصول على عينة لا يوجد بها مفردات مكررة عند السحب مع الإعادة)
71	مثال (1 - 17 - 3) مسألة التناظر
72	(1 - 18) فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة غير متماثلة
74	(1 - 19) الاحتمال الشرطي
78	(1 - 20) الاحتمال الكلي
81	(1 - 21) نظرية بيز
90	(1 - 22) نظرية "بيز" للأحداث المستقبلية
93	(1 - 23) الاستقلال وعدم الاستقلال
95	(1 - 24) استقلال الأحداث المتتافية
97	(1 - 25) استقلال أكثر من حدثين
101	(1 - 26) المحاولات المتكررة المستقلة
102	(1 - 26 - 1) التجارب المستقلة ذات الحدين
102	(1 - 26 - 1) محاولات برنوللي
103	(1 - 26 - 1) القانون الاحتمالي ذو الحدين
107	(1 - 27) المحاولات المتكررة غير المستقلة
109	القانون الاحتمالي الهايبرجيومتري (الهندسي الزائد)
110	(1 - 28) القانون الاحتمالي ذو الحدين كتقريب للقانون الهايبرجيومتري
112	(1 - 29) القانون الاحتمالي البواسوني



## المحتويات

115	(1 - 30) التجارب المتكررة المستقلة المتعددة لنتائج
116	(1 - 30 - 1) القانون الاحتمالي المتعدد الحدود
119	(1 - 31) فراغ العينة غير المحدود (اللانهاية)
119	(1 - 31 - 1) فراغ العينة غير المحدود (اللانهاية) المكون من مجموعة لانهائية قابلة للعد
120	(1 - 31 - 1 أ) القانون الاحتمالي ذو الحدين السالب
122	(1 - 31 - 1 ب) القانون الاحتمالي الهندسي
123	(1 - 32) فراغ العينة غير المحدود (اللانهاية) المكون من مجموعة لانهائية غير قابلة للعد
123	(1 - 32 - 1) القانون الاحتمالي المنتظم
125	(1 - 32 - 2) القانون الاحتمالي الأسّي السالب
128	تمارين الفصل الأول

## الفصل الثاني

141	(المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي)
141	(1-2) مقدمة
141	(2 - 2) المتغير العشوائي
145	(2 - 3) تعريف للمتغير العشوائي (I)
153	(2 - 4) تعريف للمتغير العشوائي (II)
154	(2 - 5) دوال التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المفردة
154	(2 - 5 - 1) دالة للتوزيع الاحتمالي للمتغير المفرد
155	(2 - 5 - 2) خصائص دالة للتوزيع الاحتمالي
160	(2 - 6) دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتقطع
161	(2 - 6 - 1) المتغير العشوائي المتقطع

## المحتويات

162	(2 - 6 - 2) دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$ ودالة كثافة الاحتمال $P$ للمتغير المتقطع $X$ والعلاقة بينهما
163	(3 - 6 - 2) حساب احتمال أن ينتمي المتغير المتقطع $X$ إلى المجموعة $E$
164	(4 - 6 - 2) المتغير المفرد المدمج
167	(7 - 2) دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر
167	(1 - 7 - 2) تعريف المتغير العشوائي المستمر (I)
167	(2 - 7 - 2) تعريف المتغير العشوائي المستمر (II)
170	(5 - 7 - 2) خواص دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي المستمر
171	(8 - 2) كيفية حساب احتمالات الأحداث المختلفة باستخدام دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي
177	(9 - 2) عنصر الاحتمال
178	(10 - 2) التوزيعات المختلطة
182	(11 - 2) التوزيعات المبثورة
185	(12 - 2) بعض الملاحظات الهامة
186	(13 - 2) المتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة
187	(1 - 13 - 2) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الثنائي المشترك
188	(2 - 13 - 2) تعريف دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير $(X, Y)$
190	(3 - 13 - 2) خواص دالة التوزيع الاحتمالي $F(x, y)$
195	(14 - 2) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير العشوائي الثنائي المشترك
195	(1 - 14 - 2) المتغير العشوائي الثنائي المشترك المتقطع
197	(2 - 14 - 2) المتغير العشوائي الثنائي المستمر
198	(15 - 2) الدوال الهامشية أو التوزيعات الهامشية
201	(16 - 2) ملاحظات
202	(3 - 16 - 2) المتغير الثنائي المتلاشي (أو المدمج)

## المحتويات

214	(2 - 17) التوزيعات الشرطية للمتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة
215	(2 - 17 - 1) التوزيعات الشرطية للمتغير المنقطع (X, Y)
221	(2 - 17 - 2) التوزيعات الشرطية للمتغير الثنائي المستمر (X, Y)
225	(2 - 18) المتغير العشوائي المشترك المتعدد $(X_1, \dots, X_n)$
225	(2 - 18 - 1) دالة للتوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير المشترك المتعدد $(X_1, \dots, X_n)$
229	(2 - 18 - 2) الدوال الهامشية للمتغير $(X_1, \dots, X_n)$
231	(2 - 19) الدوال الشرطية للمتغير $(X_1, \dots, X_n)$
232	(2 - 20) المتغيرات العشوائية المستقلة والاستقلال الإحصائي
232	(2 - 20 - 1) حالة متغيرين عشوائيين
235	(2 - 20 - 2) حالة n من المتغيرات العشوائية ( $n > 2$ )
244	(2 - 21) التوزيعات الثنائية المشتركة المختلطة
245	(2 - 21 - 1) التفسير الثنائي المختلط من النوع الأول (المستقل منقطع والتابع مستمر)
246	(2 - 21 - 2) التفسير الثنائي المختلط من النوع الثاني (المستقل مستمر والتابع منقطع)
254	(2 - 21 - 3) بعض الاحتمالات الهامة باستخدام دوال التوزيع الشرطية
259	(2 - 22) التوزيعات التكرارية وعلاقتها بالتوزيعات الاحتمالية
259	(2 - 22 - 1) التوزيع التجريبي للعينة المسحوبة من مجتمع مفرد
261	(2 - 22 - 2) دالة للتوزيع التجريبي للعينة كتقريب لدالة التوزيع الاحتمالي للمجتمع
263	(2 - 22 - 3) التوزيع التجريبي للعينة المسحوبة من مجتمع ثنائي
265	(2 - 23) بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة
265	(2 - 23 - 1) بعض التوزيعات المنقطعة الخاصة في متغير واحد

## المحتويات

267	(2 - 23) بعض التوزيعات المتقطعة الخاصة في عدة متغيرات عشوائية
268	(2 - 23 - 3) بعض التوزيعات المستمرة الخاصة للمتغير المفرد
272	(2 - 23 - 4) بعض التوزيعات المستمرة للخاصة في عدة متغيرات عشوائية
276	تمارين الفصل الثاني

## الفصل الثالث

291	(مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم)
291	(3 - 1) مقدمة
292	(3 - 1 - 1) مقاييس المركز (أو الموضع) المحسوبة من الجداول التكرارية
293	(3 - 1 - 2) مقاييس التشتت المحسوبة من الجداول التكرارية
295	(3 - 2) مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات أو مقاييس الموضع) للمتغير العشوائي المفرد
298	(3 - 2 - 2) الوسط الحسابي أو التوقع للمتغير المفرد $X$
300	(3 - 2 - 2) خصائص دليل التوقع $E(.)$
308	(3 - 2 - 3) الوسط الهندسي والوسط التوافقي
311	(3 - 2 - 4) الوسط والكميات الترتيبية
317	(3 - 2 - 5) المنوال
321	(3 - 3) مقاييس التشتت للمتغير العشوائي المفرد
321	(3 - 3 - 1) التباين والانحراف المعياري
326	(3 - 3 - 2) الانحراف المتوسط
329	(3 - 3 - 3) الفرق المتوسط
332	(3 - 3 - 4) معامل الاختلاف

## المحتويات

337	(3-4) متباينة تشيبيشيف
343	(3-5) العزوم (للمتغير المفرد)
343	(3-5-1) العزوم العادية
346	(3-5-2) العزوم المطلقة
352	(3-5-3) العزوم حول نقطة والعزوم المركزية
364	(3-5-4) العزوم العاملية
368	(3-6) الالتواء
373	(3-7) التقعر (Kurtosis) والتحدب
378	(3-8) عزوم المتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة (العزوم الثنائية المشتركة)
388	(3-9) عزوم المتغيرات العشوائية الشرطية (العزوم الشرطية)
413	(3-10) المتغيرات المعتمدة على بعضها اعتمادا خطيا (حالة متغيرين)
420	(3-11) عزوم المتغيرات العشوائية المتعددة المشتركة (حالة $n$ من المتغيرات عندما $n > 2$ ) - أو العزوم المشتركة
423	(3-11-2) رتبة للتوزيع
423	(3-11-3) الاعتماد الخطى الصحيح فى حالة $n$ من المتغيرات ( $2 < n$ )
426	(3-11-4) بعض خصائص مصفوفة التغاير $V_n$
427	(3-11-5) استخدام المصفوفات فى التعبير عن توقع وتباين وتغاير متجهات المتغيرات العشوائية
429	(3-11-6) مصفوفة معاملات الارتباط
430	(3-12) للتوقع الشرطى فى حالة $n$ ( $2 < n$ ) من المتغيرات العشوائية
433	تمارين الفصل الثالث

## المحتويات

### الفصل الرابع

#### (الانحدار والارتباط والاقتران)

447	(1 - 4) منحنيات الانحدار أو الانحدار من النوع الأول
454	(2 - 4) الانحدار الخطي (المستقيم) أو الانحدار من النوع الثاني
460	(3 - 4) الانحدار غير المستقيم
462	(4 - 4) نسبة الارتباط
472	(5 - 4) الانحدار الخطي التقريبي
479	(6 - 4) سطوح الانحدار
781	(1 - 6 - 4) سطوح الانحدار من النوع الأول
482	(2 - 6 - 4) مستويات انحدار المربعات الصغرى أو مستويات الانحدار من النوع الثاني
488	(3 - 6 - 4) البواقي
492	(7 - 4) الارتباط الجزئي
500	(8 - 4) العلاقة بين معاملات، الارتباط والانحدار، الجزئية
501	(9 - 4) التعبير عن الانحرافات المعيارية بدلالة انحرافات معيارية ومعاملات انحدار وارتباط جزئية من درجة أقل
505	(10 - 4) التعبير عن معاملات، الانحدار والارتباط، الجزئية، بمعاملات من درجة أقل
507	ص (11 - 4) معامل الارتباط المتعدد
514	(12 - 4) الانحدار الخطي التقريبي (المربعات الصغرى)
519	(13 - 4) معاملات العينة
519	(1 - 13 - 4) معاملات الارتباط والانحدار للعينة (حالة متغيرين)
521	(2 - 13 - 4) نسبة الارتباط لمتغيرين
524	(3 - 13 - 4) معامل ارتباط الرتب
526	(4 - 13 - 4) معامل الارتباط دلخل فئة

## المحتويات

531	(4 - 13 - 5) معامل الارتباط رباعى النسق [جدول الارتباط $(2 \times 2)$ ]
533	(4 - 13 - 6) معامل الارتباط ثنائى التسلسل ذات النقطة
537	(4 - 13 - 7) الاقتران فى جدول $(2 \times 2)$
543	(4 - 13 - 8) الاقتران الجزئى
553	(4 - 13 - 9) الاقتران فى جدول التوافق $(t \times s)$
557	(4 - 14) التمثيل الهندسى لمعاملات الارتباط الكلية والجزئية
557	(4 - 14 - 1) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط الكلى
563	(4 - 14 - 2) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط الجزئى
567	(4 - 14 - 3) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط المتعدد
569	تمارين الفصل الرابع

## الفصل الخامس

### (الدوال المميزة)

575	(5 - 1) تعريف وخصائص الدوال المميزة
575	(5 - 1 - 1) تعريف الدالة المميزة
576	(5 - 1 - 2) بعض الخصائص الهامة للدالة المميزة
584	(5 - 1 - 3) الدالة المولدة للعزوم
585	(5 - 1 - 4) الدالة المولدة للاحتمالات
587	(5 - 1 - 5) مفكوك الدالة المميزة فى صورة متسلسلة ماكلورين بدلالة العزوم
591	(5 - 1 - 6) المتركمات
593	(5 - 1 - 7) العلاقة بين المتركمات والعزوم
595	(5 - 1 - 8) شرط وجود المتركمات
596	(5 - 1 - 9) المتركمات العاملة
597	(5 - 1 - 10) أمثلة محلولة

## المحتويات

- 601 (5- 1- 11) إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي باستخدام الدالة المميزة
- 619 (5- 2) الدالة المميزة لمجموع متغيرات عشوائية مستقلة
- 620 (5- 2- 2) خاصية التوليد الذاتي
- 623 (5- 3) متابعات التوزيعات الاحتمالية
- 629 (5- 4) نظرية التوصل للدوال المميزة
- 637 (5- 5) تحديد دالة التوزيع الاحتمالي بواسطة العزوم
- 647 (5- 6) تحديد نهاية متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالي باستخدام العزوم
- 655 (5- 7) الدالة المميزة للمتغيرات الثنائية المشتركة
- 657 (5- 7- 2) العزم المشترك
- 658 (5- 8) الدوال المولدة للمترجمات والعزوم والعزوم العاملة الثانية
- 658 (5- 8- 1) الدالة المولدة للمترجمات الثنائية المشتركة
- 659 (5- 8- 2) الدالة المولدة للعزوم المشتركة
- 659 (5- 8- 3) الدالة المولدة للعزوم العاملة المشتركة
- 660 (5- 9) الدوال المميزة الهامشية
- 661 (5- 10) نظرية التعاكس للمتغير الثنائي المشترك
- 661 (5- 11) الدوال المميزة للمتغيرات العشوائية المستقلة
- 667 (5- 12) مفكوك ماكلورين للدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$
- 672 (5- 13) الدالة المميزة المركزية
- 673 (5- 14) الدالة المولدة للمترجمات الثنائية المشتركة
- 675 (5- 15) العلاقة بين العزوم والمترجمات المشتركة للمتغير المشترك الثنائي
- 680 (5- 15- 2) المترجمات المشتركة بدلالة العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) للمتغير الثنائي المشترك
- 681 (5- 15- 3) العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) بدلالة المترجمات المشتركة للمتغير الثنائي المشترك



## المحتويات

682	(5 - 15 - 4) المترجمات المشتركة بدلالة العزوم المركزية المشتركة للمتغير الثنائي المشترك
684	(5 - 15 - 5) العزوم المركزية المشتركة بدلالة المترجمات المشتركة للمتغير الثنائي المشترك
686	(5 - 16) الدالة المميزة لمتغير عشوائي مشترك عدد مركباته $n$
690	(5 - 17) تصحيحات شبرد
690	(5 - 17 - 1) تصحيحات شبرد للعزوم العادية
696	(5 - 17 - 2) تصحيحات شبرد للعزوم المركزية
696	(5 - 17 - 3) تصحيحات شبرد للعزوم للعاملية
697	(5 - 17 - 4) تصحيحات شبرد للمترجمات
697	(5 - 17 - 5) تصحيحات شبرد للعزوم المشتركة (التوزيعات الثنائية)
698	تمارين الفصل الخامس

## الفصل السادس

703	(توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات)
703	(6 - 1) مقدمة
707	(6 - 2) أسلوب دالة التوزيع الاحتمالي
707	(6 - 2) حالة المتغير المفرد
710	(6 - 2) حالة المتغير المتعدد
712	(6 - 2 - 1) حالة الدالة الخطية $Y = aX + b$
716	(6 - 2 - 2) العلاقة الدالية $Y = X^2$
717	(6 - 2 - 3) العلاقة الدالية $Y = F_X(x)$
720	(6 - 2 - 4) توزيع المجموع والفرق لمتغيرين عشوائيين مستمرين
732	(6 - 3) أسلوب الدالة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم)
734	(6 - 3) توزيع مجموع (ومتوسط) عدة متغيرات مستقلة

## المحتويات

738	(4 - 6) تحويل المتغيرات (للتحويل $Y = g(X)$ )
739	(14 - 6) حالة المتغير المفرد المنقطع
741	(6 - 4ب) حالة المتغير المفرد المستمر
745	(6 - 4ج-) حالة المتغيرات المتعددة المنقطعة
747	(6 - 4د) حالة المتغيرات المتعددة المستمرة
748	(6 - 4د 1) عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية وحيدة
754	(6 - 4د 2) عندما تكون العلاقة بين المتغيرات (الجديدة والقديمة) علاقة تبادلية غير وحيدة
762	(6 - 5) توزيعات الإحصاءات الترتيبية للعينة
762	(6 - 5 1) دالة كثافة احتمال إحصاء ترتيبي واحد ودالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصائين ترتيبيين أو أكثر
767	(6 - 5 2) توزيع دوال في إحصاءات ترتيبية
769	تمارين الفصل السادس
779	المراجع الأجنبية
786	المراجع العربية

## مقدمة

هذا الكتاب فى جزئيه الأول والثانى يعتبر محاولة من المؤلف لتقديم مرجعا للمكتبة العربية فى مجال الإحصاء الرياضى لندرة المراجع العربية فى هذا المجال. واختص الكتاب فى الجزء الأول بموضوعات نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ودوال كثافات الاحتمال ودوال التوزيع الاحتمالى ومقاييس النزعة المركزية (التوقع والتباين والعزوم) كأدلة توصيف للمجتمعات الإحصائية سواء للمتغيرات العشوائية المفردة أو المتعددة وكذلك الدوال المولدة للاحتتمالات والعزوم وتوزيعات دوال فى متغيرات عشوائية.

وفى الجزء الثانى من هذا الكتاب تناولنا بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة المقطعة والمتصلة لبعض المتغيرات العشوائية المفردة والمتعددة. وقد أفرنا بابا كاملا للتوزيع المعتاد المتعدد هو الباب التاسع لأهمية هذا التوزيع. وتناولنا بالدراسة بعض المتتابعات فى متغيرات عشوائية حيث قدمنا مفاهيم التقارب فى الاحتمال والتقارب باحتمال واحد صحيح والتقارب فى التوزيع. واختتمنا هذه الدراسة بتقديم بعض التوزيعات الاحتمالية (المضبوطة والتقاربية) لبعض الإحصاءات الهامة.

ويعتبر هذا الكتاب محاولة لتبسيط دراسة وتفهم موضوعات الإحصاء الرياضى للدارسين باللغة العربية نظراً لندرة عمل ذلك فى المراجع العربية السابقة. كما أنه يعتبر مقدمة جيدة لتقديم مؤلف عربى مماثل فى موضوعات الاستدلال الرياضى – وهذا ما يقوم بإعداده المؤلف فى الوقت الحالى بفضل الله.

وفى النهاية أتقدم بجزيل الشكر إلى عدد كبير من الأخوة الزملاء الذين قدموا لى العون سواء بالنصيحة أو مراجعة الكتابة وتصويب بعض الأخطاء الإملائية. كما أتقدم بالشكر إلى كل زميل يساهم فى تزويد المكتبة العربية بالدراسات الجيدة فى مجال الإحصاء الرياضى.

والله ولى التوفيق،،

المؤلف

عبد الحميد محمد ربيع غيضان

أستاذ الإحصاء

وعصمى كلية التجارة جامعة الأزهر

2003/7/22



# الفصل الأول

## نظرية الاحتمالات

### Probability Theory

#### (1 - 1) مقدمة:

يعتبر علم الإحصاء من العلوم الاجتماعية التي ظهرت وتطورت مع ظهور الدولة الحديثة، إذ بدأت الحاجة إلى حصر الإمكانات المتاحة للدولة - مثل حصر عدد سكانها وتصنيفهم حسب مجموعات سنية معينة وحسب جنس كل فرد وكذلك حصر الموارد المختلفة للدولة إلى غير ذلك من البيانات التي تهتم الدولة بتطوير علم الإحصاء وتفرع إلى فروع مختلفة لخدمة العديد من المجالات من زراعية وصناعية وطبية وفلكية وغيرها وكان من الطبيعي أن يتطور علم الإحصاء ليواكب التطور المستمر في وظيفة الدولة الحديثة.

كما أن التطور المستمر في العلوم التجريبية وتصميم التجارب كان لعلم الإحصاء دور كبير فيها بما قدمه من أساليب علمية كان لها كبير الأثر في تطور هذه العلوم. كذلك استطاع علم الإحصاء أن يقدم العديد من النماذج الرياضية التي تحاكي إلى درجة كبيرة الكثير من الظواهر الطبيعية والاجتماعية مما يمكن معه إخضاع هذه الظواهر للدراسة العلمية المنظمة عن طريق دراسة تلك النماذج الرياضية التي تحاكي (أو تشابه) هذه الظواهر - وهذا ما يتمثل فيما يسمى بالنماذج (أو التوزيعات) الاحتمالية والتي سوف نتعرض لها بالتفصيل فيما بعد. وأى دارس لمبادئ الإحصاء لا يخفى عليه كل ما نذكرناه عن هذا العلم والذي يمكن تعريفه بالصيغة التالية:

#### تعريف (1 - 1 - 1) علم الإحصاء:

علم الإحصاء هو ذلك العلم الذى يعمل على جمع البيانات المتعلقة بأى ظاهرة علمية أو اجتماعية وصياغتها فى شكل رقمى - ثم التعامل مع هذه البيانات الرقمية لتلخيصها وتوصيفها بصورة يستطيع العقل البشرى استيعابها مهما كانت كبيرة العدد -

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

كما أنه يقدم العديد من الأساليب والطرق العلمية التي تمكنا من استنباط العلاقات بين الظواهر المختلفة ومعرفة اتجاهاتها والتنبؤ بما تصير عليه هذه الظواهر في المستقبل.

والتعريف السابق يوضح أن علم الإحصاء يتكون من قسمين كبيرين - القسم الأول - ويسمى بالإحصاء الوصفي - هو الذي يقدم الأساليب العلمية الخاصة بجمع البيانات وتوصيفها وتلخيصها وتوصيف الظواهر العلمية والاجتماعية ومحاكاتها بالانماذج الرياضية. والقسم الثاني - يسمى بالاستدلال الإحصائي - وفيه العديد من الأساليب العلمية التي تمكنا من استنباط العلاقات بين الظواهر ومعرفة اتجاهاتها والتنبؤ بما تصير عليه هذه الظواهر في المستقبل وغير ذلك من الأساليب العلمية التي تخدم التطور المستمر في العلوم الأخرى.

وفي إطار القسمين المشار إليهما يتكون علم الإحصاء من العديد من الفروع - منها "نظرية الإحصاء" وهذا الفرع هو موضوع دراستنا في هذا الكتاب. ونظرية الإحصاء هي ذلك الفرع من فروع علم الإحصاء الذي يعمل على تقديم وتطوير الوسائل العلمية الإحصائية من نظريات وبديهيات ودوال رياضية وصيغ وقوانين تستخدم في الأفرع الأخرى من علم الإحصاء في الكثير من المجالات التطبيقية. فمثلاً ذلك الفرع المهم من فروع علم الإحصاء والمسمى "بتصميم التجارب" يعتمد اعتماداً كبيراً على النظرية الإحصائية فيما يستخدمه من أساليب علمية ورياضية في تصميم التجارب وتحليل نتائجها. كذلك الحال بالنسبة لبقية أفرع علم الإحصاء المختلفة.

وتتلخص نظرية الإحصاء على أفرع كثيرة من علم الرياضة - وبصفة خاصة نظرية الاحتمالات. لذلك كان لزاماً علينا ونحن بصدد دراسة النظرية الإحصائية أن نبدأ بتقديم مبسط لنظرية الاحتمالات بالقدر الذي يمكننا من تقديم دراسة جيدة لنظرية الإحصاء. وتعتبر نظرية الاحتمالات في العصر الحديث أساساً لدراسة الكثير من العلوم مثل علم الإحصاء وعلم رياضيات التأمين وغير ذلك من العلوم الحديثة.

ونظرية الاحتمالات العملاقة في عالم اليوم كانت بدايتها في العصر الحديث مع نهاية القرن السادس عشر وبداية القرن السابع عشر. وكانت بداياتها الأولى مرتبطة بالعباب الصدفة - عندما كان ملوك وأمراء أوروبا في ذلك الوقت يقضون أوقاتهم في ألعاب المقامرة مثل إلقاء زهرة الطاولة أو سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشيينة) أو غير ذلك من الألعاب. وكان علماء الرياضة الذين لهم الفضل في وجود وتطور نظرية الاحتمالات يجالسون هؤلاء الأمراء ويشاركونهم في هذه الألعاب مما أدى إلى أن ألعاب الصدفة كانت هي المناخ الأول الذي ظهرت فيه نظرية الاحتمالات. ثم عكف علماء الرياضة في ذلك الوقت أمثال - "بمسكال" "Pascal" و"فرمات" "Fermat" و"لابلاس" "Laplace" وغيرهم على تطوير دراسات جادة كانت بداية لفرع جديد من فروع الرياضة هو نظرية الاحتمالات.

لذلك فإن عرض نظرية الاحتمالات عرضاً جيداً يتطلب أن نبدأ بالمناخ الذي بدأت منه هذه النظرية وهي ألعاب الصدفة. وألعاب الصدفة تتمثل في إلقاء قطعة عملة أو إلقاء

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

زهرة نرد (زهرة طاولة) أو سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) إلى غير ذلك من الألعاب التي تتميز جميعها بأن نتيجة المحاولة غير مؤكدة. فمثلاً عند محاولة إلقاء قطعة العملة فإن النتيجة قد تكون صورة H أو كتابة T – ولكن لا نعلم على وجه التحديد ماذا ستكون نتيجة المحاولة – وإن كان من الممكن تصور أننا إذا ألقينا قطعة العملة عدد كبير من المرات وكانت القطعة متزنة ومصنوعة من معدن متجانس وعملية الإلقاء غير متحيزة سيكون تقريباً نصف عدد الرميات تعطى صورة والنصف الآخر كتابة – وهذا ما نسميه بوجود صفة نظامية معينة (أو خاصية معينة) في كل لعبة من ألعاب الصدفة، هذه الصفة (أو الخاصية) لا يمكن التنبؤ بها أو ملاحظتها إلا إذا كررنا محاولة اللعبة عدد كبير من المرات. أي أن ألعاب الصدفة هذه وإن كانت تتميز بأن نتائجها غير مؤكدة – إلا أنها تتميز كذلك بأن هناك صفة نظامية (أو خاصية معينة) يمكن استنباطها عند تكرار اللعبة عدد كبير من المرات. كما أن خاصيتي عدم التأكد والصفة النظامية لا تتفرد بهما ألعاب الصدفة وحدها ولكن هاتين الخاصيتين غالباً ما تتميز بهما العلوم للتجريبية عامة. ولعرض نظرية الاحتمالات من خلال ألعاب الصدفة يلزمنا تقديم بعض المفاهيم والألفاظ والتعابير التي تبسط هذا العرض.

فمثلاً يمكن النظر إلى أي لعبة من ألعاب الصدفة أو بصفة عامة إلى أي محاولة تكون نتيجتها غير مؤكدة على أنها تجربة تتميز بأن نتائجها غير مؤكدة لذلك سنعرّف عنها بلفظ "تجربة عشوائية" "Random Experiment" ويمكن اعتبار أن التجربة العشوائية هي محاولة (أو لعبة من ألعاب الصدفة) تعتمد نتائجها على توافر عدد كبير من الظروف التي يترتب عليها أن تكون نتيجة التجربة ناتج معين دون آخر. فمثلاً لو كانت التجربة العشوائية تتمثل في إلقاء قطعة عملة – فإن النتيجة ستكون أحد نواتج (صورة H أو كتابة T) ولكن ظهور أحدهما دون الآخر يتوقف على عدد هائل من العوامل منها طريقة إلقاء القطعة ونوع السطح الملقاة عليه ونوع المعدن المصنوعة منه وغير ذلك من العوامل التي نجهلها – لذلك فإن تكرار التجربة العشوائية تحت نفس الظروف (التي نعلمها) ليس من المؤكد أن يعطى نفس النتيجة. لذلك يمكن تعريف التجربة العشوائية كما يلي:

### تعريف (1-1-2) التجربة العشوائية:

التجربة العشوائية هي عمل شيء ما أو ملاحظة شيء ما تحت ظروف معينة وتكون نتيجة التجربة أحد عدة نواتج من غير المؤكد معرفة أي منها سيتحقق. وعدد النواتج (أو النتائج أو الحالات) التي يمكن أن تنتج عن التجربة العشوائية تسمى "بالحالات الممكنة".

ويمكن الآن محاولة تعريف الاحتمال نفسه. وحيث أن تعريف الاحتمال مرّ بثلاث مراحل – لذلك سنقدم ثلاث تعريفات للاحتمال تتوالى مع تطور نظرية الاحتمالات في مراحلها المختلفة – هي التعريف التقليدي والتعريف التجريبي والتعريف الحديث.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

### (1 – 2) التعريف التقليدي للاحتتمال Classical Definition of Probability :

وُضِعَ هذا التعريف في البدايات الأولى للدراسات الجادة المنظمة فى نظرية الاحتمالات (وضعه العالم الرياضى "لابلاس" Laplace عام 1812) – لذلك فهو متأثر إلى حد كبير بالعباب الصدفية. ففي أى تجربة عشوائية لو كان عدد الحالات الممكنة للتجربة يساوى  $n$  حالة أو نتيجة مثلاً – وكانت هذه الحالات كلها متماثلة أى لها نفس الفرصة من حيث الظهور وكانت نتيجة التجربة لابد أن تكون حالة واحدة فقط من هذه الحالات، وإذا كان الاهتمام منصب على تحقق جزء معين أو مجموعة معينة من الحالات الممكنة عددها  $m$  حالة أو نتيجة ( $m \leq n$ ) فإننا نقول أن الحدث الذى نهتم به قد تحقق إذا كانت نتيجة التجربة هى إحدى هذه الحالات التى عددها  $m$  حالة. ومن المنطقى أن

نقول أن احتمال تحقق هذا الحدث يساوى  $\frac{m}{n}$ . نلاحظ من هذا أننا ذكرنا أن نتيجة التجربة العشوائية هى حالة وحيدة من الحالات الممكنة وهذا ما يعنى أن الحالات الممكنة كلها متنافية أى لا يمكن حدوث حالتين أو أكثر فى آن واحد – كما ذكرنا أن الحالات الممكنة جميعها لها نفس الفرصة من حيث الظهور – أى أن الحالات الممكنة ذات فرص متكافئة وهذا ما يعنى أنها حالات متماثلة لذلك يجب تعريف المقصود بالحدث وبالحالات المتنافية والحالات للمتماثلة قبل تعريف الاحتمال.

عند إجراء تجربة عشوائية نهتم عادة بحدوث جزء معين من مجموعة النتائج الممكنة – فإذا كانت نتيجة التجربة حالة أو نتيجة من بين هذا الجزء الذى نهتم به – نقول أن الحدث تحقق. مثال ذلك عند إلقاء زهرة نرد متزنة لو كنا نهتم بظهور عدد زوجى من النقاط على السطح العلوى فإننا نقول أن الحدث (ظهور عدد زوجى) يتحقق إذا كانت نتيجة التجربة (2 أو 4 أو 6). وعدد الحالات التى تؤدى إلى تحقق الحدث تسمى بالحالات المواتية للحدث. لذلك يمكن تعريف الحدث كما يلى:

تعريف (1 – 2 – 1) "الحدث" The Event :

فى أى تجربة عشوائية عدد حالاتها الممكنة  $n$ ، إذا كنا نهتم بتحقيق جزء معين من مجموعة النتائج الممكنة وكانت عدد الحالات التابعة لهذا الجزء يساوى  $m$  ( $n > m$ ). إذن عندما تكون نتيجة التجربة إحدى هذه الحالات التى عددها  $m$  نقول أن الحدث الذى نهتم به قد تحقق ونسمى الحالات التى تتبع هذا الجزء بالحالات "المواتية" للحدث – وتحقق أى ناتج للتجربة من بين هذا الجزء يمثل تحقق الحدث.

وعلى ذلك لو كان عدد الحالات الممكنة للتجربة يساوى  $n$  وعدد الحالات المواتية للحدث يساوى  $m$  فإن  $m$  تعتبر جزء من  $n$ . فعند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة إذا كان الحدث هو ظهور عدد زوجى فإن  $n=6$  و  $m=3$ .



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

تعريف (1 - 2 - 2) الأحداث المتنافية Exclusive Events:

يقال أن الحدثان A و B متنافيان إذا استحال حدوثهما معاً.

تعريف (1 - 2 - 3) الحالات المتماثلة:

الحالات المتماثلة هي الحالات التي لها نفس الفرصة من حيث الظهور وتسمى 'Equally Likely Cases'.

تعريف (1 - 2 - 4) الحالات الشاملة Exhaustive Cases:

هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة – والتي لا يوجد نتائج غيرها.

ويمكن الآن تعريف الاحتمال كما يلي:

تعريف (1 - 2 - 5) التعريف التقليدي للاحتمال:

في أي تجربة عشوائية إذا كان عدد الحالات الممكنة  $n$  وكلها حالات متماثلة ومتنافية وشاملة وكان عدد الحالات المواتية للحدث A هي  $m$  ( $n > m$ ) فإن احتمال حدوث A يساوي  $\frac{m}{n}$ . وفي صورة رمزية:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.2.1)$$

مثال (1 - 2 - 1): عند إلقاء قطعتي عملة متزنة معاً ما هو احتمال ظهور صورة وكتابة؟

(الحل)

التجربة العشوائية هي إلقاء قطعتي العملة والحالات الممكنة لهذه التجربة هي:

HH, HT, TH, TT

(حيث H صورة، T كتابة)

إن عدد الحالات الممكنة  $n = 4$  وهي كلها متماثلة ومتنافية. والحدث الذي نهتم به وليكن E هو ظهور صورة وكتابة أي أن الحالات المواتية للحدث E هي:

HT, TH

عدد الحالات المواتية  $m = 2$

إن احتمال ظهور صورة وكتابة هو:

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

**مثال (1 – 2 – 2):** صندوق به كرة بيضاء وكرة سوداء وصندوق آخر به كرة بيضاء وكرة حمراء. والكرات جميعها متشابهة في كل شيء ما عدا اللون. عند سحب كرة واحدة من كل صندوق بطريقة عشوائية.

(أ) ما هو احتمال الحصول على كرتان من نفس اللون؟

(ب) ما هو احتمال الحصول على كرة زرقاء؟

(الحل)

لو رمزنا للألوان الثلاثة الأبيض والأسود والأحمر بالرموز W، B، R على الترتيب. فإن نتيجة التجربة العشوائية ستكون (كرة من أحد الصندوقين وكرة من الصندوق الآخر) إحدى للحالات الممكنة التالية:

WW, WR, BW, BR

أي أن عدد الحالات الممكنة  $n = 4$ . وكلها متماثلة ومتنافية.

(أ) الحدث  $E_1$  هو الحصول على كرتان من نفس اللون وهو يتحقق عندما تكون نتيجة التجربة WW فقط. إذن عدد الحالات المواتية للحدث  $E_1$  هو  $m_1 = 1$  واحتمال الحصول على كرتان من نفس اللون هو:

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{4}.$$

(ب) الحدث  $E_2$  هو الحصول على كرة زرقاء وهذا لن يتحقق أبدا لعدم وجود أي كرة زرقاء في أي صندوق. إذن عدد الحالات المواتية لهذا الحدث  $m_2 = 0$  وبذلك يكون احتمال الحصول على كرة زرقاء من بين الكرتان المسحوبتان هو:

$$P(E_2) = \frac{0}{4} = 0$$

من التعريف السابق للاحتمال نجد أنه لأي حدث A يكون  $P(A) = m/n$  حيث m (عدد الحالات المواتية للحدث) ما هي إلا جزء من الحالات الممكنة للتجربة n أي أن  $m \leq n$ . من هذا يتضح أن الاحتمال دائماً كسر ينحصر بين الصفر والواحد الصحيح وهو ما نعبّر عنه رمزياً  $0 \leq P \leq 1$ . وهو يساوي الصفر إذا كان الحدث مستحيل كما في المثال السابق ويساوي الواحد الصحيح إذا كان الحدث مؤكداً.

والتعريف السابق للاحتمال يسمى كذلك بالاحتمال القبلي Priori Probability وذلك لأن احتمال الحدث يمكن حسابه دون إجراء التجربة (أي قبل إجراء التجربة). لذلك فإن التجربة في هذا التعريف تعتبر تجربة تصورية أي يمكن تصور التجربة وحساب الاحتمالات المطلوبة للأحداث المختلفة دون إجراء التجربة نفسها. كما أن التعريف السابق

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

للاحتمال يتأسس على افتراضات هامة جداً منها أن الحالات الممكنة كلها متماثلة – والتماثل هنا شيء افتراضي بحث أي أنه صعب التحقيق من الناحية النظرية كما أنه قد يستحيل تحقيقه في بعض الحالات. فمثلاً لو اعتبرنا نتيجة الولادة في أي حالة ولادة تجربة عشوائية لها إحدى نتيجتين ذكر أو أنثى. فهنا الحالتين الممكنتين ليستا متماثلتين لظروف عديدة متعلقة بالوراثة وغيرها من آلاف الظروف الأخرى التي نجهلها – لذلك لا يمكن تطبيق التعريف التقليدي على مثل هذه التجارب – حتى في تجارب ألعاب الصدف عند إلقاء قطعة عملة مثلاً نفترض دائماً أن قطعة العملة من معدن متجانس وأن طريقة الإلقاء غير متحيزة لأي وجه وغير ذلك من الافتراضات التي قد لا يمكن تحقيقها في الواقع مما لا يمكن معه اعتبار الحالات الممكنة كلها متماثلة. لذلك تطور تعريف الاحتمال للتعلم على هذه الصعوبات إلى ما يسمى بالتعريف التجريبي للاحتتمال أو التعريف البعدي.

### (1 – 3) التعريف التجريبي أو التعريف البعدي للاحتتمال A Frequency or Posteriori Probability :

نلاحظ أن التعريف التقليدي للاحتتمال يقوم على فرض أساسي وضروري وهو أن الحالات الممكنة كلها متماثلة Equally Likely وهذا الفرض في حد ذاته فرض خيالي إلى حد ما فهو مستحيل التحقق في التجارب العلمية وحتى في ألعاب الصدف من الصعب جداً تحقيقه – فمثلاً عند إلقاء قطعة عملة نفترض أنها متزنة وأنها مصنوعة من معدن متماثل حتى تكون فرصة ظهور الصورة تعادل تماماً فرصة ظهور الكتابة – ولكن هذا وإن كان من الممكن تخيله من الناحية النظرية إلا أنه قد يستحيل فعلياً لذلك فلا توجد أبداً قطعة عملة متزنة في الحقيقة كما نفترض وكذلك لا توجد زهرة نرد متزنة وبالتالي لا يمكن تحقيق فرض الفرص المتكافئة الذي يقوم عليه التعريف الكلاسيكي للاحتتمال. والمثال التالي الذي نقدمه لإيضاح هذه الفكرة يوضح حالة عملية ثم فيها إلقاء قطعة عملة عشرة آلاف مرة وتم حساب نسبة الصور في كل ألف مرة.

مثال (1 – 3 – 1): فيما يلي عدد مرات ظهور الصورة "H" في 10.000 محاولة لإلقاء قطعة عملة – مرتبة حسب عدد الصور في كل ألف محاولة ابتداءً من الألف الأولى حتى العاشرة.

جدول (1 – 3 – 1)

عدد الصور في كل ألف رمية	501	485	509	536	485	488	500	497	494	484
--------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

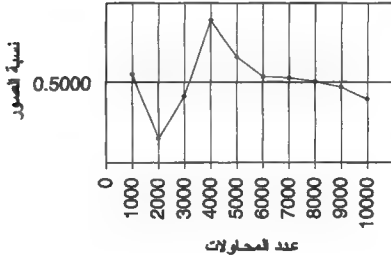
الجدول السابق يمثل محاولات فعلية. لذلك سنحاول تحديد نسبة عدد الصور في الألف الأولى ثم النسبة في ألفي رمية ثم في ثلاثة آلاف رمية وهكذا. والجدول التالي يوضح ذلك.

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

جدول (1-3-2)

عدد المحاولات n	عدد الصور "H" m	نسبة الصور $\frac{m}{n}$
1000	501	0.5010
2000	986	0.4930
3000	1495	0.4983
4000	2031	0.5078
5000	2516	0.5032
6000	3004	0.5007
7000	3504	0.5006
8000	4001	0.5001
9000	4495	0.4994
10000	4979	0.4979

من البيانات السابقة نلاحظ أن نسبة الصور  $\frac{m}{n}$  تتذبذب ارتفاعاً وانخفاضاً حول القيمة  $P = 0.5$  وجدة هذا للتذبذب تقل كلما زادت عدد المحاولات. والرسم التالي يوضح ذلك.



شكل (1-3-1)

من المثال السابق نلاحظ أن نسبة الصور  $\frac{m}{n}$  تقترب في تذبذبها من النسبة 0.5 كلما زاد عدد المحاولات مما يمكننا معه استخدام النسبة  $\frac{m}{n}$  كتقريب لاحتمال ظهور

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

الصورة "H" عند إلقاء قطعة عملة متزنة مرة واحدة. كما قام بعض الباحثين بتكرار رمي زهرة نرد (متزنة) عدد كبير من المرات ووجدوا أن نسبة ظهور كل وجه تقترب من النسبة  $\frac{1}{6}$ . من هذا يمكن القول أن في أى تجربة عشوائية يتم تكرارها عدد من المرات

ولكن  $n$  مرة ويكون عدد مرات ظهور الحدث  $E$  هو  $m$  مرة فإن النسبة  $\frac{m}{n}$  تسمى نسبة ظهور الحدث أو التكرار النسبي للحدث  $E$  ومن ثم فإن هذه النسبة سوف تقترب من القيمة الحقيقية للاحتمال  $P(E)$  كلما زادت عدد المحاولات حتى في النهاية عندما تكون  $n$  كبيرة كبراً لاتنهائياً يمكن اعتبار أن هذه النسبة هي الاحتمال  $P(E)$ . وهذا أدى إلى الصياغة التالية لتعريف الاحتمال بالتكرار النسبي أو ما يسمى بالتعريف التجريبي للاحتمال.

تعريف (1-3-1):

عند تكرار تجربة عشوائية مرات عددها  $n$  (تحت نفس الظروف) إذا لاحظنا تحقق حدث معين  $E$  مرات عددها  $m$  فيمكن استخدام التكرار النسبي  $\frac{m}{n}$  كتقريب لاحتمال تحقق الحدث  $E$ . أى أن:

$$P(E) \approx \frac{m}{n}$$

وفي النهاية عندما تكون  $n$  كبيرة جداً يكون:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

وفي صورة رمزية:

$$(1.3.1): P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

من تعريف الاحتمال التجريبي ومن المثال السابق نجد أنه لأي حدث  $E$  فى أى لعبة من ألعاب الصدفة إذا حسبنا  $P(E)$  باستخدام التعريف التقليدى سنحصل على نفس النتيجة كما لو حسبناه باستخدام التعريف التجريبي – أى لا تعارض – لذلك يمكن حساب الاحتمالات فى كل التجارب العشوائية التى يمكن تصورها كلعبة من ألعاب الصدفة باستخدام التعريف التقليدى – ويكون الاستفادة من التعريف التجريبي فى التجارب العشوائية التى لا يمكن تصورها كلعبة من ألعاب الصدفة. وعلى أى حال نجد أن افتراض التماثل والفرص المتكافئة فى تعريف الاحتمال تجعلنا نعرف الاحتمال بالاحتمال

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

لأن الفرص المتكافئة معناها احتمالات متكافئة ولا يجوز تعريف الشيء بنفسه بالإضافة إلى ما ذكرناه من أن فرض التماثل التام فرض خيالي وغير واقعي – وهذا ما أدى بنا إلى التعريف التجريبي. وحتى عند استخدام التعريف التجريبي تكون النسبة  $\frac{m}{n}$  تقريباً للاحتمال ولكن الاحتمال نفسه لا يمكن تحديده تماماً إلا عندما نؤول  $n$  إلى ما لا نهاية وهذا فرض تصوري – لأنها مهما كبرت  $n$  لا يمكن تصور حساب الاحتمال عندما  $n$  نؤول إلى ما لا نهاية. وهذا ما يجعلنا نشعر بالحاجة إلى نظرية أكثر تقدماً للحكم على مدى مطابقة التكرار النسبي إلى الاحتمال الحقيقي. وقد استمر تطور نظرية الاحتمالات دون توقف حتى وصلنا إلى التعريف الحديث للاحتمال والذي يعتمد إلى حد كبير على نظرية المجموعات وغيرها من الرياضيات الحديثة مما ترتب عليه الاستفادة من الكتوز الرياضية التي تزرخ بها الرياضيات الحديثة في تطوير نظرية الاحتمالات وبالتالي تطوير نظرية الإحصاء حيث أمكن إيجاد العديد من النماذج الاحتمالية على غرار النماذج الرياضية التي ساعدت على تطور العلوم التجريبية في كثير من المجالات، لذلك كان لا بد من استخدام الرياضيات الحديثة بأساليبها وأدواتها الرياضية الجبرية في إثراء نظرية الاحتمالات.

وبالنظر إلى نتائج أى تجربة عشوائية على أنها مجموعة من النقاط المختلفة (سنرمز لها فيما بعد باسم فراغ العينة) والنظر إلى مجموعة النتائج للموتاة لحدث ما  $E$  على أنها مجموعة نقاط تمثل جزءاً من مجموعة النتائج الكلية. لذلك أمكن استخدام نظرية المجموعات لتحديد الأجزاء المختلفة المناظرة للأحداث المختلفة واستخدام الأساليب الرياضية في وضع نظرية عامة للاحتمالات بحيث تقدم لنا مفهوماً جديداً للاحتمال نجيباً المفهوم الكلاسيكي والمفهوم التجريبي على حد سواء، وتقدم نموذجاً احتمالي رياضياً لكل تجربة عشوائية يستطيع الإحصائيون استخدامه واستنباط بعض النتائج الهامة والمفيدة منه بناء على نتائج التجارب العشوائية. لذلك فإننا نقدم فكرة مبسطة عن نظرية المجموعات حتى يتسنى لنا استخدامها في عرض المفهوم الحديث للاحتمال.

### (1 – 4) نظرية المجموعات Set Theory:

#### تعريف (1 – 4 – 1) المجموعة:

المجموعة هي أى تجمع من أشياء (أو عناصر) متشابهة.

فمثلاً الطلاب في فصل دراسي معين يعتبروا مجموعة بينما طلاب فصل آخر تعتبر مجموعة أخرى من الطلبة. ويمكن إعطاء العديد من الأمثلة التي توضح مفهوم المجموعة – فمثلاً مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 هي المجموعة المكونة من الأعداد  $\{1, 2, \dots, 10\}$  كذلك مجموعة الأعداد الحقيقية من 1 إلى 10 هي أى عدد صحيح أو كسري (مقيس) أو غير مقيس من 1 حتى 10 – المجموعة المكونة من عواصم

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

العالم تشمل كل عواصم العالم – وهكذا نجد أن مفهوم المجموعة نفسه واضح ومن المسلمات المعروفة. كذلك كل مفردة من مفردات المجموعة تسمى عنصراً أي أن كل مجموعة تتكون من عدة عناصر – فمجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 10 عناصرها هي الأعداد 1, 2, ..., 10.

ويجب أن تكون المجموعة محددة تحديداً تاماً لا يُس في فيه ولا غموض. ويوجد طريقتين للتعبير عن المجموعة هما طريقة المرد (أو القائمة) وطريقة الخاصية المميزة أو التعبير الرمزي. ولإيضاح ذلك سنرمز للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة  $A, B, C, D, \dots$  ولعناصر المجموعة بالأحرف اللاتينية الصغيرة  $a, b, c, d, \dots$  ولنعتبر عن أن العنصر  $a$  هو أحد عناصر المجموعة  $A$  سنكتب ذلك بصورة رمزية  $a \in A$  ونقرأ  $a$  ينتمي إلى  $A$  وعلى ذلك فإن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى 10 نكتب في الصورة التالية:

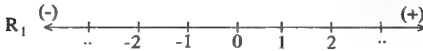
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

وهذه هي طريقة المرد أو الحصر. أما مجموعة الأعداد الحقيقية من 1 إلى 10 فيمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$B = \{x : 1 \leq x \leq 10\}$$

ونقرأ المجموعة  $B$  هي مجموعة القيم ( $x$ ) أو الأعداد الحقيقية ( $x$ ) ابتداء من 1 إلى 10 – وهذه هي طريقة التعبير الرمزي.

وعندما نريد الإشارة إلى أن العنصر  $b$  ليس أحد عناصر المجموعة  $A$  نكتب  $b \notin A$  ونقرأ  $b$  لا ينتمي إلى  $A$ . بقي لنا أن نشير إلى أن المجموعات بصفة عامة قد تكون عناصرها أعداد أو أشخاص أو مدن أو أي أشياء أخرى ولكن في مجال دراستنا التي نحن بصددنا سنقصر دراستنا على المجموعات التي عناصرها أعداد أو نقاط وهذه المجموعات تسمى بالمجموعات الخطية أخذين في الاعتبار أن الأعداد والنقاط مترادفان فمثلاً لا فرق بين الكلام عن الأعداد المحصورة بين  $(-3, +3)$  وبين النقاط على خط الأعداد الواقعة داخل هذه الفترة. فالعدد 2 مثلاً يناظر النقطة التي تقع على بعد وحدتين إلى الجانب الأيمن من الصفر على محور الأعداد. ومحور الأعداد هو خط مستقيم نرمز له بالرمز  $R_1$  عليه نقطة أصل 0 ووحدة قياس واتجاه موجب على يمين الصفر واتجاه سالب على يسار الصفر.



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

وبذلك يمكن القول بالنقطة  $x$  أو العدد  $x$  مع الأخذ في الاعتبار النقاط التى تقابل الأعداد المحدودة فقط أى أن  $\infty$  لا تعتبر نقطة. وفي حالة المستوى يمكن القول بالنقطة  $(x_1, x_2)$  أو الزوج المرتب من الأعداد  $(x_1, x_2)$  ونرمز للمستوى بالرمز  $R_2$  – وبصفة عامة يمكن القول بالنقطة  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  أو الأعداد المرتبة  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  مأخوذة في الترتيب الموضح ونرمز لهذا الفراغ بالرمز  $R_n$ . ويمكننا الآن أن نقدم بعض التعاريف والأمثلة التوضيحية لتقديم نظرية المجموعات بالصورة المناسبة لغرض هذه الدراسة.

**تعريف (1-4-2) المجموعات المحدودة Finite Sets:**

المجموعة المحدودة هي المجموعة المكونة من عدد محدود من العناصر.

**تعريف (1-4-3) المجموعات غير المحدودة (أو اللانهائية) Infinite Sets:**

المجموعة اللانهائية أو غير المحدودة هي تلك المجموعة التى تتكون من عدد لا نهائى من العناصر.

وهذه المجموعة قد تكون عناصرها قابلة للعد وتسمى مجموعة قابلة للعد Enumerable Set وذلك إذا أمكن ترتيب عناصر المجموعة بحيث يمكن عدّها أى أن كل عنصر من عناصر المجموعة يقابل عدد من الأعداد الطبيعية  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  أما إذا كان من المستحيل ترتيب عناصر المجموعة بحيث أن كل عنصر يقابل عدد من الأعداد الطبيعية فـإن المجموعة تسمى مجموعة غير قابلة للعد (Non – enumerable Set or Non – Countable Set) وعلى ذلك فـإن مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تسمى مجموعة قابلة للعد وهى:

$$S_1 = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

أما مجموعة النقاط المحصورة بين الصفر والواحد الصحيح على خط الأعداد فهى مجموعة غير قابلة للعد وهى المجموعة:

$$S_2 = \{x : 0 < x < 1\}$$

حيث  $x$  عدد حقيقى.

**تعريف (1-4-4) المجموعة الجزئية Sub – Set:**

إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة  $A$  ما هو إلا عنصر فى المجموعة  $B$  فـإن المجموعة  $A$  تسمى مجموعة جزئية من المجموعة  $B$ .

مثال ذلك إذا كانت المجموعة  $B$  هى  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

والمجموعة  $A$  هى



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

فإن  $A$  تسمى مجموعة جزئية من المجموعة  $B$  وتكتب فى الصورة  $A \subset B$  ويمكن القول أن  $B$  تحتوى  $A$  أو  $A$  جزئية من  $B$ . ويجب ملاحظة أن كل مجموعة جزئية من مجموعة محدودة تكون هى الأخرى محدودة بينما كل مجموعة جزئية من مجموعة لانهائية قابلة للعد فإنها قد تكون محدودة أو لانهائية قابلة للعد.

تعريف (1-4-5) الفراغ Space:

إذا أمكن تمثيل كل نتيج ظاهر ما (أو كل نتيج تجربة عشوائية ما) بمجموعة معينة فإن هذه المجموعة تسمى بالمجموعة الكلية أو بالفراغ.

تعريف (1-4-6) المجموعة الفارغة Null-Set:

هى مجموعة تصورية لأنها خالية من العناصر فهى المجموعة التى لا يوجد بها عناصر ونرمز لها بالرمز  $\phi$ . ودلما المجموعة الفارغة تعتبر مجموعة جزئية من أى مجموعة أخرى.

تعريف (1-4-7) تساوى المجموعات:

تتساوى المجموعتان  $A$ ،  $B$  إذا كانت لهما نفس العناصر.

أى إذا كانت عناصر  $A$  هى نفس عناصر  $B$  — وذلك بصرف النظر عن ترتيب العناصر داخل المجموعة إذ أن ترتيب للعناصر داخل المجموعة غير مهم. لذلك ستكون المجموعة  $A$  جزئية من  $B$  وكذلك المجموعة  $B$  جزئية من  $A$ . وعلى ذلك إذا كانت  $A \subset B$  و  $B \subset A$  فإن  $A = B$ .

### (1-5) تطبيق قواعد الجبر على المجموعات:

نبدأ بافتراض مجموعة كلية  $S$  تسمى بالفراغ ثم نتناول المجموعات الجزئية المختلفة داخل هذا الفراغ. ثم نعرف العمليات الجبرية المختلفة من جمع وضرب وطرح وقسمة وخلافه على هذه المجموعات الجزئية وإن اختلفت تسمية هذه العمليات أو مفهوما بما يتناسب مع طبيعة المجموعات.

تعريف (1-5-1) الاتحاد أو المجموع Union of Sets:

اتحاد (أو حاصل جمع) المجموعتين  $A_1$ ،  $A_2$  هو المجموعة  $A$  المكونة من العناصر التى تنتمى إلى إحدى المجموعتين  $A_1$  أو  $A_2$  على الأقل — أى أن عناصر الاتحاد  $A$  هى العناصر التى تنتمى إلى  $A_1$  وحدها لئون  $A_2$  أو  $A_2$  وحدها لئون  $A_1$  أو تنتمى لكل من  $A_1$  و  $A_2$ . ونرمز لها بلحد الرمز

$$A = A_1 \cup A_2$$

$$A = A_1 + A_2$$

أو

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \text{ فإن } A_1 \subset A_2$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مثال (1 – 5 – 1): اتحاد المجموعتين التاليتين

$$A_1 = \{a, b, c, m\}$$

$$A_2 = \{a, d, n\}$$

هو

$$A = A_1 \cup A_2 = \{a, b, c, d, m, n\}$$

كذلك اتحاد المجموعتين:

$$B_1 = \{x : 0 < x < 1\}$$

و

$$B_2 = \{x : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$$

يكون الاتحاد

$$\begin{aligned} B &= B_1 \cup B_2 \\ &= \{x : 0 < x \leq \frac{3}{2}\} \end{aligned}$$

تعريف (1 – 5 – 2) التقاطع أو حاصل الضرب Intersection of Sets:

تقاطع (أو حاصل ضرب) المجموعتان  $A_1$  و  $A_2$  هي المجموعة  $A$  التي تتكون من العناصر المشتركة بين  $A_1$  و  $A_2$  – أى العناصر التي تنتمى إلى  $A_1$  و  $A_2$  معاً (فلى أن واحد) ونرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$A = A_1 \cap A_2$$

أو

$$A = A_1 \cdot A_2$$

أو

$$A = A_1 A_2$$

وإذا كانت  $A_1 \subset A_2$  فإن  $A_1 \cap A_2 = A_1$ .

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مثال (1 - 5 - 2): في المثال السابق يكون تقاطع  $A_1$  و  $A_2$  هو

$$A = A_1 A_2 = \{a\}$$

كذلك تقاطع  $B_1$  و  $B_2$  هو

$$B = B_1 B_2 = \left\{x : \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$$

تعريف (1 - 5 - 3) الفرق بين مجموعتين Difference of Sets:

الفرق  $A_2 - A_1$  هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى  $A_2$  ولا تنتمي إلى  $A_1$ .

مثال (1 - 5 - 3): في مثال (1 - 5 - 1) نوجد كل من:

$$A_1 - A_2, A_2 - A_1, B_1 - B_2, B_2 - B_1.$$

سنجد أن:

$$A_1 - A_2 = \{b, c, m\}$$

و

$$A_2 - A_1 = \{d, n\}$$

و

$$B_1 - B_2 = \left\{x : 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$$

$$B_2 - B_1 = \left\{x : 1 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$$

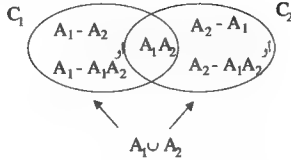
و

إذا كان  $A_2 = A_1$  يكون  $A_2 - A_1 = \phi$ .

ويمكن تمثيل الاتحاد والتقاطع والفرق بين مجموعتين بالشكل التالي المسمى Venn Diagram شكل "ف".

إذا كانت المجموعة  $A_1$  هي مجموعة النقاط داخل المنحنى المغلق  $C_1$  والمجموعة  $A_2$  هي مجموعة النقاط داخل المنحنى المغلق  $C_2$  سنجد أن الاتحاد والتقاطع والفرق كما يلي:

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات



$A_1 \cup A_2$  هي مجموعة النقط داخل المنحنيين  $C_1$  و  $C_2$ .

تعريف (1-5-4) المجموعات المنفصلة أو المتنافية Disjoint Sets:

تعتبر المجموعتان  $A_1$  و  $A_2$  منفصلتان إذا لم يكن بينهما أى عنصر مشترك – ونعبر عن ذلك بالقول أن الجزء المشترك بينهما هو المجموعة الفارغة  $\phi$ . وعلى ذلك إذا كان  $A_1 A_2 = \phi$  يكون المجموعتان  $A_1$ ،  $A_2$  منفصلتان.

تعريف (1-5-5) قوانين الجمع والضرب تحقق الخواص التالية:

(أ) التبديل الجبرى: الاتحاد  $\cup$  والتقاطع  $\cap$  عمليتان تحققان التبديل الجبرى أى أن:

$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$$

و

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$$

(ب) الإجماع: عمليتى الاتحاد  $\cup$  والتقاطع  $\cap$  تحققان الإجماع الجبرى:

$$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$$

$$(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3).$$

(ج) التوزيع: عمليتى الاتحاد  $\cup$  والتقاطع  $\cap$  تحققان التوزيع الجبرى:

$$A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$$

ويمكن تعميم النتائج السابقة لاتحاد مجموعتين وتقاطع مجموعتين إلى حالة  $n$  من المجموعات وكذلك إلى حالة أى عدد لانهائى من المجموعات. وعلى ذلك يكون الاتحاد

## الفصل الأول — نظرية الاحتمالات

المجموعة  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى مجموعة واحدة على الأقل من المجموعات  $A_1, \dots, A_n$ . كما أن التقاطع  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  هو المجموعة المكونة من العناصر المشتركة بين كل هذه المجموعات أى العناصر التي تنتمي إلى جميع هذه المجموعات فى أن واحد. وعندما يكون عدد المجموعات لانهائى يكون الاتحاد والتقاطع هما على الترتيب:

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r = A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r$$

$$\prod_{r=1}^{\infty} A_r = A_1 \cap A_2 \cap \dots = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_r$$

وفى هذه الحالة يكون قانون التوزيع الجبرى هو:

$$(1.5.1): A(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = AA_1 + AA_2 + \dots$$

مثال (1 - 5 - 4): إذا كانت المجموعتان  $S_r$  و  $A_r$  هما

$$S_r = \{x : \frac{1}{r+1} \leq x \leq \frac{1}{r}\}$$

$$A_r = \{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{r}\}$$

فإن الاتحاد

$$\sum_{r=1}^{\infty} S_r = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$$

والتقاطع

$$\prod_{r=1}^{\infty} S_r = \phi$$

كذلك الاتحاد

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = A_1$$

والتقاطع

$$\prod_{r=1}^{\infty} A_r = \{x : x = 0\}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

تعريف (1 – 5 – 6) المكمل Complement:

إذا كان لدينا مجموعة كلية أو فراغ  $S$  وكانت المجموعة  $A$  مجموعة جزئية من الفراغ  $S$  فإن الفرق  $(S - A)$  يسمى مكمل المجموعة  $A$  ونرمز له بالرمز  $\bar{A}$ .  
ويمكن إثبات أن المكمل يحقق القواعد الجبرية التالية:

$$(1.5.2): \overline{\bar{A}} = A$$

$$(1.5.3): A \cdot \bar{A} = \phi$$

$$(1.5.4): A \cup \bar{A} = S$$

$$(1.5.5): \begin{cases} a) \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \dots)} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \\ b) \overline{(A_1 \cap A_2 \cap \dots)} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \end{cases}$$

والعلاقان السابقتان تسميان قوانين دي مورجان De – Morgan Laws

$$(1.5.6): A_1 - A_2 = A_1 \cdot \bar{A}_2$$

(1 – 6) المتتابعة Sequence:

تعريف (1 – 6 – 1):

المتتابعة هي عدة مجموعات موضوعية في تتابع.

وتكتب في الصورة:

$$\{A_n\} = A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

واتحاد أو مجموع المتتابعة يلخذ الشكل:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

قد تكون المجموعات التي تتكون منها المتتابعة مجموعات غير منفصلة في حين أننا قد نحتاج في بعض مراحل الدراسة أو البحث إلى إيجاد الاتحاد  $A$  في شكل اتحاد لمجموعات منفصلة. لتحقيق ذلك يمكننا استخدام تحويلة رياضية معينة — ويمكن تقديم ذلك في صورة النظرية التالية:

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

نظرية (1-6-1):

ففى المتتالية  $\{A_n\} = A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  يمكن وضع الاتحاد  $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$

فى الصورة  $A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$

حيث تكون المتتالية  $\{B_n\} = B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  متتالية من مجموعات منفصلة فيها  $B_i B_j = \emptyset$  لجميع قيم  $i \neq j$  وتكون

$$B_n = \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{n-1}} A_n$$

لجميع قيم  $n$ .

(الإثبات)

نفرض أن:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

عندما:

$$B_n = \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{n-1}} A_n$$

يمكن إثبات أن:

$A \subset B$  و  $B \subset A$  إذن  $A = B$  وذلك كما يلى:

لأى عنصر  $x$  يتبع لمجموعة ما ولكن المجموعة  $A_i$ . بما أن  $x \in A_i$  و

$A_i \subset A$  إذن  $x \in A$

بفرض أن المجموعة  $A_i$  هى أول مجموعة يتبع لها العنصر  $x$  أى أن العنصر  $x$  لا يتبع للمجموعات  $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$  إذن  $B_i$  هى أول مجموعة يتبعها العنصر  $x$  لأن

$$B_i = \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{i-1}} A_i$$

$$\therefore x \in B_i, \quad \therefore B_i \subset B \quad \therefore x \in B$$

وعلى ذلك إذا كانت  $x \in A$  فإن  $x \in B$  إذن  $A \subset B$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

وبنفس المنهج السابق يمكن إثبات أنه إذا كانت  $x \in B_i$  فإن  $x \in A_i$  وبالتالي تكون  $B \subset A$   
أي أن  $A \subset B$  و  $B \subset A$  إذن  $B = A$  علماً بأن  $B$  عبارة عن اتحاد مجموعات منفصلة.

هـ. ط. ث

إذا كانت  $\{A_n\}$  متتابعة من المجموعات الخطية (أي المجموعات التي عناصرها نقاط أو أعداد حقيقية) فإن المجموعة الخطية  $A^*$  التي تتكون من جميع النقاط التي تنتمي إلى عدد لا نهائي من هذه المجموعات الخطية تسمى بـ "النهاية العظمى" Superior Limit للمتتابعة  $\{A_n\}$  وتكتب في الصورة:

$$(1.6.1): A^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \sup A_i$$

وبالمثل، المجموعة الخطية  $A_*$  التي تتكون من جميع النقاط التي تنتمي إلى كل المجموعات الخطية  $A_i$  ما عدا عدد محدود منها على الأكثر تسمى بـ "النهاية الصغرى" Inferior Limit للمتتابعة وتكتب:

$$(1.6.2): A_* = \lim_{i \rightarrow \infty} \inf A_i$$

وإذا كانت  $A^* = A_*$  تكون المتتابعة  $\{A_n\}$  لها نهاية موجودة هي:

$$(1.6.3): A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$$

ويمكن إثبات أنه إذا كانت المجموعات المكونة للمتتابعة التالية

$$\{A_n\} = A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

كلها مجموعات قابلة للعد (أي أن عدد عناصر أي مجموعة قابل للعد) فإن الاتحاد

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ويمكن وضعها في حالة علاقة تبادلية وحيدة مع الأعداد الطبيعية  $1, 2, \dots, n, \dots$ .



### (7-1) المتتابعات المضطربة Monotone Sequences:

تعريف (1-7-1):

المتتابعة  $A_1, A_2, \dots$  تسمى غير تناقصية (Non decreasing) إذا كانت  $A_n \subset A_{n+1}$  لجميع قيم  $n$ . وتسمى غير تزايدية (Non increasing) إذا كانت  $A_n \supset A_{n+1}$  لجميع قيم  $n$ . وكلا النوعين يطلق عليهما اسم واحد مشترك هو المجموعات المضطربة.

إذا كانت المتتابعة غير تناقصية يكون

$$A_n = \sum_{r=1}^n A_r$$

ويكون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sum_{r=1}^{\infty} A_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} A_r.$$

كذلك إذا كانت المتتابعة غير تزايدية يكون

$$A_n = \prod_{r=1}^n A_r$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \prod_{r=1}^{\infty} A_r = \bigcap_{r=1}^{\infty} A_r$$

مثال (1-7-1): إذا كانت

$$A_n = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

و

$$B_n = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n} \right\}$$

أوجد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(الحل)

$A_n$  مجموعة غير تناقصية

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_1 A_n \\ &= \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}\end{aligned}$$

(المجموعة لا تشمل نقط محيط الدائرة)

أما  $B_n$  فهي مجموعة غير تزايدية

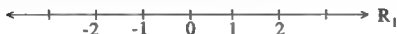
$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} B_n &= \bigcap_1 B_n \\ &= \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}\end{aligned}$$

(المجموعة تشمل نقط محيط الدائرة)

### (8 - 1) المجموعات الخطية Linear Point Sets:

تعريف (1 - 8 - 1) خط الأعداد:

إذا كانت المجموعة الكلية (أو الفراغ)  $S$  هي المجموعة المكونة من جميع النقط على خط مستقيم به نقطة أصل  $0$  ووحدة قياس واتجاه موجب واتجاه سالب كما في الشكل التالي



فلنرمز لهذا الخط بالرمز  $R_1$  أي أن  $S = R_1$ . والفراغ  $R_1$  يسمى بخط الأعداد.

تعريف (1 - 8 - 2) الفترات:

أي مجموعة جزئية من النقط في الفراغ  $R_1$  تسمى مجموعة خطية - وأبسط المجموعات الخطية هي الفترات Intervals ويمكن تعريف الفترة كما يلي: إذا كانت  $a, b$  نقطتان على خط الأعداد  $R_1$  وكانت  $a \leq b$  فإن مجموعة النقط  $x$  التي تحقق العلاقة:

$a \leq x \leq b$  تسمى بالفترة المغلقة  $a, b$  وتكتب  $[a, b]$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

$a < x \leq b$  تسمى بالفترة نصف المفتوحة  $a$ ،  $b$  مغلقة من أعلى وتكتب  $[a, b]$  أو  $(a, b]$

$a \leq x < b$  تسمى بالفترة نصف المفتوحة  $a$ ،  $b$  مغلقة من أسفل وتكتب  $[a, b)$  أو  $(a, b)$  وإذا كانت  $a = b$  يقال أن الفترة متلاشية degenerate.

وعندما  $b \rightarrow \infty$  أو  $a \rightarrow -\infty$  تصبح الفترة لانهائية والفترة اللانهائية تلخذ أحد الأشكال التالية:

$[a, \infty)$  أو  $[a, \infty)$  لانهائية مغلقة من أسفل

$(-\infty, b]$  أو  $(-\infty, b]$  لانهائية مغلقة من أعلى

$(-\infty, \infty)$  أو  $(-\infty, \infty)$  لانهائية وهذه الفترة الأخيرة تشمل كل خط الأعداد  $R_1$ .

ويجب أن نلاحظ أن تقاطع أى عدد محدود أو لانهائى من الفترات يكون فترة — ولكن اتحاد فترتين لا يكون دائماً فترة. ويمكن تعريف المستوى  $R_2$  والفراغ ذو الثلاث أبعاد  $R_3$  والفراغ ذو النون بعداً  $R_n$  والفترات فى هذه الفراغات كتعميم للفراغ  $R_1$ .

### (1 – 9) فراغ العينة وفراغ الأحداث Sample Space and Event Space:

#### (1 – 9 – 1) فراغ العينة Sample Space:

فى التعريف التقليدى للاحتمال نكرنا أن التجربة العشوائية تعتبر تجربة تصورية أى يمكن تصور وحصر كل نتائجها الممكنة قبل إجراء التجربة — وعلى ذلك يمكن تمثيل نتيجة التجربة العشوائية بمجموعة  $S$  بحيث تكون النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية هى عناصر المجموعة  $S$ . وفى هذه الحالة نطلق على هذه المجموعة  $S$  اسم رمزى هو فراغ العينة — وعلى ذلك يمكن تعريف فراغ العينة كما يلى:

#### تعريف (1 – 9 – 1) فراغ العينة:

فراغ العينة هو المجموعة التى تمثل عناصرها مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ونرمز لها بالرمز  $S$ .

ونقدم فيما يلى عدد من التجارب العشوائية موضحين فراغ العينة فى كل تجربة. تجربة (1): إذا كانت التجربة العشوائية تتمثل فى إلقاء قطعة عملة متزنة مرة واحدة — ورمزنا للصورة بالرمز  $H$  والكتابة بالرمز  $T$  فإن مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هى  $T, H$  وبالتالي يكون فراغ العينة هو المجموعة

$$S = \{H, T\}$$

وهى مجموعة مكونة من عنصرين  $H, T$ .

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

**تجربة (2):** إذا كانت التجربة العشوائية تتمثل في إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة – سنجد أن فراغ العينة

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعة مكونة من 6 عناصر هي النتائج الممكنة للتجربة.

**تجربة (3):** لو كانت التجربة العشوائية هي إلقاء قطعتى عملة مرة واحدة – قياساً على ما سبق سنجد أن فراغ العينة هو المجموعة

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

وهي مجموعة مكونة من 4 عناصر كل عنصر يتكون من زوج من الرموز إحداها نتيجة القطعة الأولى والثاني نتيجة للقطعة الثانية من قطعتى العملة.

**تجربة (4):** لو كانت التجربة العشوائية هي اختيار عدد من الأعداد الصحيحة الموجبة – سنجد أن فراغ العينة  $S$  يمثل المجموعة:

$$S = \{1, 2, 3, \dots\}$$

**تجربة (5):** إذا كانت التجربة العشوائية هي اختيار نقطة عشوائية من الفترة  $[0, 1]$  فإن فراغ العينة يمثل المجموعة

$$S = \{x : 0 < x < 1\}$$

وفراغ العينة من أهم المفاهيم التي نقدمها في دراسة الاحتمالات وهو في الواقع يتكون من مقطعين لو من كلمتين هما (فراغ وعينة) وكلمة فراغ مستوحاة من استخدامنا لنظرية المجموعات في تمثيل النتائج الممكنة للتجربة والتي تمثلها بمجموعة  $S$  تمثل عناصرها كل النتائج الممكنة للتجربة لذلك فإن المجموعة  $S$  تتطابق مع مفهوم الفراغ في نظرية المجموعات أما كلمة عينة فهي مستوحاة من أن نتيجة التجربة العشوائية غير مؤكدة لذلك عند ظهور نتيجة معينة يمكن اعتبار هذه النتيجة مجرد عينة من مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. ومع ذلك فإن فراغ العينة في واقع الأمر لا هو فراغ ولا هو عينة ولكنه مجرد اصطلاح علمي مفيد في مجال دراسة نظرية الاحتمالات. وفراغ العينة قد يكون مجموعة محدودة كما في التجارب العشوائية السابقة (1)، (2)، (3) وقد يكون مجموعة لانهائية قابلة للعد كما في التجربة (4) وقد يكون مجموعة لانهائية غير قابلة للعد كما في تجربة (5).

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1-9-2) الحدث وفراغ الأحداث Event and Event Space:

تعريف (1-9-2 أ) الحدث:

الحدث هو مجموعة جزئية من فراغ العينة  $S$  — فإذا كانت هذه المجموعة الجزئية مكونة من عنصر واحد سميت حدثاً بسيطاً Simple Event — أما إذا كانت مكونة من أكثر من عنصر واحد سميت حدثاً مركباً Compound Event.

تعريف (1-9-2 ب) فراغ الأحداث:

العائلة المكونة من كل المجموعات الجزئية الممكنة لفراغ العينة  $S$  بما في ذلك المجموعة الفارغة  $\phi$  والمجموعة الكلية  $S$  تسمى بفراغ الأحداث ونرمز لها بالرمز  $\beta$ .

والعائلة هنا يمكن النظر إليها على أنها مجموعة كبيرة عناصرها هي كل المجموعات الجزئية الممكنة للمجموعة  $S$  — أى أن العنصر هنا هو الآخر مجموعة.

تعريف (1-9-2 جـ) حجم الحدث The Size of the Event:

إذا كان الحدث  $E$  تمثله مجموعة جزئية عدد عناصرها  $m$  فإن حجم الحدث  $E$  هو

$$N(E) = m$$

أى أن حجم الحدث هو عدد العناصر داخل مجموعته الجزئية ولما كان كل عنصر يمثل حدثاً بسيطاً إذن حجم الحدث المركب يساوى عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها.

تعريف (1-9-2 د) الحدث المستحيل:

هو الحدث الذى تمثله المجموعة الفارغة  $\phi$ .

تعريف (1-9-2 هـ) الحدث المؤكد:

هو الحدث الذى تمثله المجموعة الكلية أو فراغ العينة  $S$ .

وفىما يلى مثالين يوضحان فراغ الأحداث لتجربتين.

مثال (1-9-2 أ): فى التجربة العشوائية المتمثلة فى إلقاء قطعة عملة مرة

واحدة — نعلم أن فراغ العينة  $S = \{H, T\}$  مجموعة مكونة من عنصرين صورة  $H$  وكتابة  $T$ . والمجموعات الجزئية للمجموعة  $S$  هي:

(1) المجموعات الجزئية المكونة من عنصر واحد (أحداث بسيطة)  $\{H\}, \{T\}$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

- (2) المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين (حدث مركب واحد هو نفسه فراغ العينة  $\{H, T\} - S$ )
- (3) المجموعة الفارغة (الحدث المستحيل)  $\phi$
- (4) المجموعة الكلية  $S$ .
- إن فراغ الأحداث هو العائلة  $B$  التالية:

$$B = \{\phi, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$$

مثال (1 - 9 - 2ب): في التجربة العشوائية المتمثلة في إلقاء زهرة نرد مترنسة مرة واحدة. كما نعلم أن فراغ العينة هو المجموعة

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

أما فراغ الأحداث فهو العائلة التي عناصرها المجموعات التالية:

- (1) المجموعة الفارغة (الحدث المستحيل)  $\phi$
- (2) المجموعات المكونة من عنصر واحد

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

(عندهم 6)

- (3) المجموعات المكونة من عنصرين

$$\{1, 2\}, \dots, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \dots, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \dots, \{3, 6\}, \dots, \{5, 6\}$$

(عندهم  $\binom{6}{2}$  مجموعة أو حدثًا).

- (4) المجموعات المكونة من 3 عناصر.

$$\{1, 2, 3\}, \dots, \{4, 5, 6\}$$

(عندهم  $\binom{6}{3}$  مجموعة أو حدثًا).

.....

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(7) وهكذا حتى نصل إلى المجموعات المكونة من 6 عناصر وهي مجموعة واحدة  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . وتسمى الحدث المؤكد.

وبذلك يكون فراغ الأحداث هو العائلة B التالية:

$$B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}, \{1, 2\}, \dots, \{5, 6\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

عدد عناصر العائلة B السابقة (أى عدد المجموعات الجزئية للفراغ S هو  $N(B)$  حيث

$$N(B) = 1 + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6$$

أى أنه عندما يكون عدد العناصر داخل فراغ العينة S يساوى 6 عناصر يكون عدد المجموعات الجزئية الممكنة للمجموعة S هو نفسه عدد عناصر فراغ الأحداث B ويساوى  $2^6$ . وبصفة عامة إذا كان حجم فراغ العينة S يساوى  $n$  ( $N(S) = n$ ) فإن عدد المجموعات الجزئية الممكنة تكوينها من الفراغ S (وهو نفسه عدد عناصر عائلة فراغ الأحداث B) يساوى  $2^n$ .

فى العرض السابق أشرنا إلى كل مجموعة جزئية لفراغ العينة S على أنها حدث فكل مجموعة جزئية تسمى حدث والحدث هو ما نهذف إلى حساب احتمال وقوعه أو عدم وقوعه — أى أننا لا نهتم بالحدث فى حد ذاته وإنما اهتمامنا منصب على حساب احتمال وقوع الحدث أو عدم وقوعه.

ملاحظة (1 – 9 – 2): بقى لنا أن نوضح أنه عندما تكون المجموعة S الممثلة لفراغ العينة محدودة أو لانهاية فليد لنا كل المجموعات الجزئية الممكنة تكوينها من المجموعة S تمثل (فى الغالب) أحداثاً يجب أخذها جميعاً فى الاعتبار — أى أننا فى هذه الحالة يمكن اعتبار كل المجموعات الجزئية المستخرجة من المجموعة S على أنها أحداث مهمة نهذف إلى حساب احتمال وقوع أو عدم وقوع كل منها. أما إذا كان فراغ العينة S عبارة عن مجموعة لانهاية غير قابلة للعد فيمكننا أيضاً أن بعض المجموعات الجزئية للمجموعة S لا يمكن حساب الاحتمال المناظر لها وبالتالي فبنا لا نعتبر هذه المجموعات ممثلة لأحداث — ولذلك لابد أن نستبعد هذه المجموعات الجزئية التى لا يمكن اعتبارها أحداث من فراغ الأحداث B.

ومستقبل ذلك دون إثبات ولكننا ( فى حالة فراغ العينة S الذى يمثل مجموعة لانهاية غير قابلة للعد) سنحاول تحديد المجموعات الجزئية للمجموعة S التى يمكن اعتبارها أحداثاً وهى التى يتكون منها فراغ الأحداث B. كما سنحاول استبعاد المجموعات الجزئية التى لا يمكن اعتبارها أحداثاً والتى لا تدخل فى فراغ الأحداث B — وهذا يدفعنا إلى وضع تعريف علم لتحديد فراغ الأحداث B تحديداً علماً سواء كان فراغ العينة S

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مجموعة محدودة أو لانهائية قابلة للعد أو لانهائية غير قابلة للعد وذلك من خلال تقديم عائلة بولين (بولين الجبر) وكذلك عائلة بورال (بورال الجبر).

### (1 – 10) عائلة بولين (بولين الجبر) Boolean Algebra:

إن نهتم في هذه الدراسة بتطوير المعلومات الرياضية لتحديد ما يمكن اعتباره حدثاً من المجموعات الجزئية لفراغ العينة  $S$ ، وبالتالي تحديد المجموعات الجزئية التي تكون فراغ الأحداث  $B$ . ولكننا سنهتم بتقديم بعض الخصائص التي يجب توافرها في فراغ الأحداث  $B$  حتى تكون كل الأحداث التي تمثل عناصر هذا الفراغ يمكن حساب احتمال حدوث كل منها، وهذه الخصائص هي:

(1. 10. 1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } S \subset B \\ \text{b) إذا كانت } A \subset B \text{ فإن: } \bar{A} \subset B \\ \text{c) إذا كانت كل من } A_1, A_2 \text{ مجموعة جزئية من الفراغ } B \text{ فإن: } A_1 \cup A_2 \subset B \end{array} \right.$$

أي تجمع من المجموعات (أو الأحداث) تتوافر فيه الخواص السابقة يسمى "عائلة بولين" أو "بولين الجبر" Boolean Algebra – أو بتعبير مختصر "الجبر".

والخصائص السابقة تتمشي مع هدفنا في الاختصار على تلك المجموعات الجزئية من الفراغ  $S$  التي تعتبر أحداثاً والتي نهدف إلى حساب احتمالاتها – لذلك فإن فراغ الأحداث  $B$  لابد أن يشتمل على الحدث المؤكد (أي المجموعة  $S$ ) – كذلك طالما أن هدفنا هو حساب احتمال وقوع أي حدث (أو مجموعة)  $A$  فإنه من المنطقي حساب احتمال عدم وقوع الحدث أي حساب احتمال  $\bar{A}$  وبالتالي إذا كانت المجموعة  $A$  ضمن عناصر فراغ الأحداث  $B$  فإن المجموعة  $\bar{A}$  لابد أن تكون هي الأخرى ضمن عناصر فراغ الأحداث – كذلك إذا كان  $A_1, A_2$  حدثان ضمن عناصر الفراغ  $B$  فإن  $A_1 \cup A_2$  يعتبر حدثاً كذلك وبالتالي يكون ضمن عناصر  $B$ .



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

والخصائص السابقة يمكن صياغتها في صورة مرادفة كما يلي:

(1. 10. 2):

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } S \subset B \\ \text{b) } (A_1 \cup A_2) \subset B \text{ فإن } B \text{ فراغ من جزئية من } A_2, A_1 \\ \text{c) } \text{إذا كان كل من } A_1, A_2 \text{ مجموعة جزئية من الفراغ } B \text{ وكانت } A_2 \subset A_1 \text{ فإن } (A_1 - A_2) \subset B \end{array} \right.$$
- ويمكن إثبات أن الخصائص (1. 10. 1) والخصائص (1. 10. 2) متكافئة.

والخصائص السابقة سواء (1. 10. 1) أو (1. 10. 2) ترتب عليها النتائج التالية التي تتميز بها العائلة B.

(1. 10. 3):

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \phi \subset B \\ \text{b) } (A_1 \cap A_2) \subset B \text{ فإن } B \text{ فراغ من جزئية من } A_2, A_1 \\ \text{c) } \text{إذا كان كل من } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ مجموعة جزئية من الفراغ } B \text{ فإن:} \\ \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \subset B \text{ و } \left( \bigcap_{i=1}^n A_i \right) \subset B. \end{array} \right.$$

### (1 – 11) عائلة بورال (بورال الجبرا) Borel Algebra:

في عائلة بولين السابقة لو أبقينا a و b في مجموعة الخصائص (1. 10. 1) السابقة واستبدلنا الخاصية "C" بالخاصية التالية:

إذا كانت كل مجموعة من المتتابعة اللانهائية التالية

$$A_1, A_2, \dots$$

تعتبر عنصراً من عناصر فراغ الأحداث B فإن:  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset B$

إذا تحقق الشرط السابق فإن هذه العائلة نطلق عليها اسم العائلة التجميعية — وهي تحقق الشروط السابق ذكرها حيث أنها تشمل الفراغ S كما أنها تشمل على مكمّل أى مجموعة تتبع للفراغ S وتشمل كذلك مجموع واتحاد أى عدد قابل للعد من المجموعات التابعة للفراغ S. ولكن هذه العائلة (B) قد تشمل على بعض المجموعات ذات الاحتمال

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

للفرضى التي تعتبر أحداثاً مستحيلة. فإذا أهملنا هذه المجموعات ذات الاحتمال الصفري أو متناهاً كلها بالمجموعة الفارغة  $\phi$  وأبقينا على باقي المجموعات واعتبرناها عناصر العائلة  $B$ ، منحصل بذلك على أصغر عائلة  $B$  تسمى عائلة بورال أو أصغر عائلة بورالية، نسبة إلى عالم الرياضيات Borel، وتحقق الشروط التالية:

(1. 11. 1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } S \subset B \\ \text{b) } \bar{A} \subset B \text{ فإن } A \subset B \text{ إذا كتبت } \\ \text{c) } \text{ إذا كان كل من المجموعات } A_1, A_2, \dots \text{ تعتبر عناصر في العائلة } B \text{ فإن:} \\ \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \subset B \end{array} \right.$$

وأصغر عائلة تحقق للشروط السابقة تسمى "عائلة بورال الصغرى"  
"The smallest Borel Field"

والهدف من التركيز على أن عائلة بورال هي أصغر عائلة تحقق الشروط السابقة هو استبعاد بعض المجموعات التي لا تهمنا في مجال دراسة نظرية الاحتمالات. وهذه المجموعات المستبعدة هي مجموعات معقدة وليس من المطلوب حساب احتمالاتها وتسمى بالمجموعات غير المقيسة كما أننا لن نحتاج إلى مثل هذه المجموعات في دراستنا الحالية.

**ملاحظة (1 - 11 - 1):** يتضح لنا مما سبق أن أي حدث  $E$  ما هو إلا مجموعة جزئية بورالية من فراغ العينة  $S$  — أما المجموعات الجزئية غير البورالية (غير المقيسة) للفراغ  $S$  التي لا تحقق الشروط (1.11.1) لا تعتبر أحداث. ولهذا سنعتبر كلمتي "حدث" و"مجموعة جزئية بورالية" من الفراغ  $S$  كلمتان مترادفتان لهما نفس المعنى. وهذا ما سوف نسير عليه في بقية دراستنا في هذا الكتاب.

**مثال (1 - 11 - 1):** بين أنه لأي حدث  $E$  في فراغ العينة  $S$  تكون العائلة التي عناصرها المجموعات ( $\phi$ ,  $S$ ,  $E$ ,  $\bar{E}$ ) عائلة بورالية.

(الحل)

العائلة المشار إليها هي العائلة

$$B = \{\phi, \bar{E}, E, S\}$$

وهذه العائلة تحقق الخصائص (1. 11. 1) السابقة (وهي خصائص عائلة بورال)

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

$$S \subset B \quad (a)$$

(b) كل حدث يتبع B وكذلك مكمله يتبع B حيث أن B تشمل على E و  $\bar{E}$  كما أنها تشمل على S و  $\phi$ .

(c) اتحاد أى مجموعتين أو أكثر من المجموعات S,  $\bar{E}$ ,  $\phi$ , E, يتبع كذلك للعائلة B من حيث

$$\bar{E} \cup E = S \subset B$$

$$\bar{E} \cup \phi \subset S \subset B$$

وهكذا.

إن العائلة B تعتبر عائلة بورالية.

### (1 – 12) دالة النقطة ودالة المجموعة Point Function and Set Function :

نعلم أن الدالة  $y = f(x)$  تعتبر دالة متغيرها التابع y ومتغيرها المستقل x. وهذه الدالة تعطى قيمة y لكل قيمة من قيم x. فلو كان المتغير المستقل x عدد حقيقى (أى نقطة على خط الأعداد  $R_1$ ) تسمى الدالة  $f(x)$  دالة فى نقطة. مثال ذلك الدالة  $y = 5x$  عندما x = 3 نجد أن  $y = 15$ . وقد تكون الدالة فى متغيرين مستقلين  $x_1, x_2$  مثل

$$y = g(x_1, x_2)$$

أو

$$y = 3x_1x_2$$

هنا مجال تغير المتغيرين المستقلين  $x_1, x_2$  كمجال تغير نقطة فى المستوى الكارتيلى الذى نرمز له بالرمز  $R_2$  — لذلك عند أى نقطة فى المستوى  $R_2$  يمكن تحديد قيمة الدالة  $y = g(x_1, x_2)$  — مثال ذلك. إذا كانت

$$y = 3x_1x_2$$

عندما  $x_1 = 5$  و  $x_2 = 4$  نجد أن  $y = 60$ .

وقد تكون الدالة فى ثلاث متغيرات أو حتى n من المتغيرات المستقلة حيث يمكن تصور مجال الدالة كأنه نقطة فى الفراغ ذو النون بعداً  $(x_1, \dots, x_n)$  الذى نرمز له بالرمز  $R_n$  ومثال ذلك الدالة

$$y = 2x_1x_2 \dots x_n$$

عندما  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 2$  تكون

$$y = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مما سبق يتضح لنا أن الدالة في نقطة هي دالة متغيرها المستقل (أو متغيراتها المستقلة) عبارة عن نقطة في خط الأعداد (أو نقطة في الفراغ متعدد الأبعاد) – ولكن في بعض الحالات تواجهنا دالة من نوع خاص حيث يكون المتغير المستقل عبارة عن مجموعة وليس مجرد نقطة والدالة التي من هذا النوع تسمى دالة مجموعة. ويجب أن نأخذ في الاعتبار أن المجموعة قد تكون عنصرها نقطة واحدة كما قد تكون خالية من العناصر مثل المجموعة للفراغة  $\emptyset$ .

والأمثلة التالية توضح لنا مفهوم دالة المجموعة.

مثال (1 – 12 – 1): إذا كانت المجموعة  $R_1 \supset A$  وكانت الدالة  $g(A)$  تساوى عدد النقاط الموجودة في المجموعة  $A$  والتي تتألف من الأعداد الصحيحة الموجبة.

أوجد  $g(A_i)$  عندما  $i = 1, 2, 3$

إذا كانت

$$A_1 = \{x : 0 < x < 6\}$$

$$A_2 = \{x : x = -2, -1\}$$

$$A_3 = \{x : -\infty < x < 4\}$$

(الحل)

$$g(A_1) = 5, \quad g(A_2) = 0, \quad g(A_3) = 3$$

مثال (1 – 12 – 2): لكل مجموعة  $R_1 \supset A$  إذا كانت الدالة  $g(A)$  تساوى عدد النقاط  $(x_1, x_2)$  في المجموعة  $A$  عندما تكون كل من  $x_2, x_1$  أعداد صحيحة موجبة وتساوى الصفر خلاف ذلك.

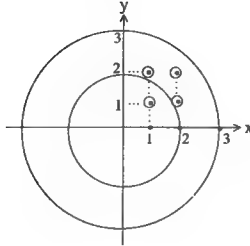
أوجد  $g(A_1)$  و  $g(A_2)$  إذا علمت أن:

$$A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(الحل)



$$g(A_1) = 1$$

$$g(A_2) = 4$$

لاحظ أن  $A_1 \subset A_2$

وأن  $g(A_1) < g(A_2)$

### (1 – 13) تعريف الحديث للاحتمال:

يُعرف الاحتمال كدالة مجموعة أو دالة مجالها الأحداث المختلفة في فراغ الأحداث. وفي هذا التعريف نفترض أننا نبدأ بوجود تجربة عشوائية (أو ظاهرة) لها فراغ العينة  $S$  (أي أننا نبدأ دائماً بوجود مجموعة كلية هي فراغ العينة  $S$ ). وفراغ الأحداث  $B$  هو كل المجموعات الجزئية البورالية التي يمكن استخراجها من المجموعة  $S$  والذي يمثل عائلة بورال – هذه المجموعات الجزئية هي الأحداث التي نهتم بها – وهي في نفس الوقت مجال دالة المجموعة التي نحاول تقديمها الآن والتي نسميها دالة الاحتمال. والتعريف الحديث للاحتمال يتمثل في مجموعة المسلمات التي وضعها كولموجوروف عام 1933 ويمكن تقديمها كما يلي:

تعريف (1 – 13 – 1) "الاحتمال":

إذا كان لدينا تجربة عشوائية لها فراغ العينة  $S$  وفراغ الأحداث  $B$  الذي يمثل عائلة بورال – فإن الاحتمال  $P$  يعرف بأنه دالة مجموعة مجالها كل الأحداث  $A$  التي

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

تسمى إلى الفراغ B – بحيث أنه لكل حدث A تحدد الدالة P عدداً حقيقياً هو  $P(A)$  يسمى احتمال تحقق الحدث A. وهذه الدالة P تحقق المسلمات الثلاثة التالية:

$$(1) \quad P(A) \geq 0 \text{ لجميع الأحداث.}$$

$$(2) \quad P(S) = 1 \text{ للحدث المؤكد } S = A.$$

$$(3) \quad \text{إذا كانت } A_1, A_2, \dots \text{ مستقلة من الأحداث المتنافية (المنفصلة) } A_i A_j = \phi \text{ لجميع قيم } i \neq j \text{ فإن:}$$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

والتعريف السابق تعريف رياضى – نتمكن به من التعرف على أى دالة مجموعة إذا كانت دالة احتمال أم مجرد دالة مجموعة عادية – وهو لا يحدد لنا قيمة الاحتمال نفسه لحدث معين ولكن باستخدم الخصائص الموضحة فى التعريف السابق ومن التجربة العشوائية محل الدراسة يمكن حساب الاحتمال لأى حدث كما سيتضح لنا فيما بعد.

من التعريف السابق يمكن استنباط الخصائص التالية لدالة الاحتمال P والتي نقدمها فى شكل مجموعة من النظريات.

نظرية (1 – 13 – 1):

لكل مجموعة A فى لعائلة B يكون لـ  $\bar{A}$  المكمل هو:

$$(1. 13. 1): \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(الإثبات)

$$S = A \cup \bar{A}, \quad A \cap \bar{A} = \phi$$

من (2)، (3) فى تعريف (1 – 13 – 1) نجد أن

$$\begin{aligned} 1 &= P(S) = P(A \cup \bar{A}) \\ &= P(A) + P(\bar{A}) \end{aligned}$$

$$\therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

نظرية (2 – 13 – 1):

احتمال الحدث المستحيل (المجموعة  $\phi$ ) يساوى الصفر.

$$(1. 13. 2): \quad P(\phi) = 0$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(الإثبات)

في نظرية (1 – 13 – 1) ضع  $A = \phi$  إذن  $\bar{A} = S$

$$P(\phi) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

نظرية (1 – 13 – 3):

إذا كان  $A_1, A_2$  مجموعتان جزئيتان من الفراغ  $S$  وكان  $A_1 \subset A_2$  فإن

$$(1. 13. 3): (a) \quad 0 \leq P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

و

$$(b) \quad P(A_1) \leq P(A_2).$$

(الإثبات)

$$\because A_2 = A_1 \cup (\bar{A}_1 A_2) = A_1 \cup (A_2 - A_1)$$

والمجموعتان  $A_1, \bar{A}_1 A_2$  منفصلتان وكذلك  $A_1, (A_2 - A_1)$  منفصلتان

$$\therefore P(A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$$

وبما أن  $P(\bar{A}_1 A_2) \geq 0$

$$\therefore P(A_2) \geq P(A_1)$$

نظرية (1 – 13 – 4):

لكل مجموعة  $A \subset S$  يكون

$$(1. 13. 4): \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

(الإثبات)

$$\phi \subset A \subset S$$

$$\therefore P(\phi) \leq P(A) \leq P(S) = 1$$

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

## الفصل الأول — نظرية الاحتمالات

نظرية (1 - 13 - 5):

إذا كان  $A_1, A_2$  حدثان في الفراغ  $S$  (أي مجموعتان جزئيتان في الفراغ  $S$ ) فإن احتمال وقوع واحد منهما على الأقل هو:

$$(1. 13. 5): P(at least one) = P(A_1 \cup A_2) \\ = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

(الإثبات)

باستخدام نظرية (1 - 6 - 1) بوضع:

$$B_1 = A_1 \\ B_2 = \overline{A_1} A_2, \quad B_1 B_2 = \phi$$

$$\therefore A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2 \\ \therefore P(A_1 \cup A_2) = P(B_1 \cup B_2) \\ = P(B_1) + P(B_2) \\ = P(A_1) + P(\overline{A_1} A_2)$$

ولكن

$$A_2 = (A_1 A_2) \cup (\overline{A_1} A_2) \\ P(A_2) = P(A_1 A_2) + P(\overline{A_1} A_2) \\ \therefore P(\overline{A_1} A_2) = P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

وبالتعويض عن العلاقة السابقة في  $P(A_1 \cup A_2)$ .

نجد أن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

هـ. ط. ث

وبصفة عامة إذا كانت  $A_1, A_2, \dots, A_n$  مجموعت جزئية من الفراغ  $S$  فإن:



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1. 13. 6):

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{j=1}^n P(A_j) \\
 &\quad - \sum_{i < j}^n \sum P(A_i, A_j) \\
 &\quad + \sum_{i < j < k}^n \sum \sum P(A_i, A_j, A_k) \\
 &\quad \dots\dots \\
 &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).
 \end{aligned}$$

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها بالاستنتاج الرياضى مع استخدام نظرية (1 - 6 - 1) السابقة. كما يمكن تعميمها إلى حالة  $n = \infty$ .

وعلى ذلك فى حالة وجود 3 أحداث  $A_1, A_2, A_3$  يكون:

$$\begin{aligned}
 (1. 13. 7): P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
 &\quad - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) \\
 &\quad + P(A_1 A_2 A_3)
 \end{aligned}$$

نظرية (1 - 13 - 6) متباينة بول Booles Inequality:

إذا كانت  $A_1, A_2, \dots, A_n$  مجموعات جزئية فى الفراغ S فإن:

$$(1. 13. 8): P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

(الإثبات)

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\
 &\leq P(A_1) + P(A_2)
 \end{aligned}$$

ويمكن إتمام الإثبات لحالة n بالاستنتاج الرياضى.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ولكن لو كانت المجموعات  $A_1, A_2, \dots, A_n$  المعطاة في النظرية السابقة مجموعات منفصلة أى تمثل أحداث متنافية فإن

$$(1.13.9): P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

وإذا كانت هذه الأحداث تمثل مجموعة متنافية وشاملة أى أن:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S, \quad A_i A_j = \phi, \quad i \neq j$$

فإن:

$$(1.13.10): P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1$$

والعلاقان السابقتان صحيحتان حتى عندما  $n \rightarrow \infty$  أى في حالة المتتابعة اللانهائية  $A_1, A_2, \dots$  من الأحداث التى تنتمى كلها إلى الفراغ  $S$ .

نظرية (1 – 13 – 5) السابقة تقدم احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من حدثين – والآن سنقدم احتمال وقوع حدث واحد بالضبط من حدثين وذلك في النظرية التالية:

نظرية (1 – 13 – 7):

إذا كان الحدثان  $A_1, A_2$  يتبعان فراغ الأحداث فإن احتمال وقوع واحد منهما بالضبط هو:

$$(1.13.11): P(A_1 \bar{A}_2 \cup A_2 \bar{A}_1) = P(\text{exactly one}) \\ = P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 A_2).$$

(الإثبات)

$$A_1 = A_1 \bar{A}_2 \cup A_1 A_2$$

$$\therefore P(A_1) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(A_1 A_2)$$

$$\therefore P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1) - P(A_1 A_2)$$

وبالمثل نجد أن

$$P(A_2 \bar{A}_1) = P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

ولكن الاحتمال المطلوب هو

$$\begin{aligned} P &= P(A_1 \bar{A}_2 \cup A_2 \bar{A}_1) \\ &= P(A_1 \bar{A}_2) + P(A_2 \bar{A}_1) \end{aligned}$$

وبالتعويض باستخدام المعادلتين السابقتين نجد أن

$$\begin{aligned} P &= P(A_1) - P(A_1 A_2) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 A_2). \end{aligned}$$

نظرية (1 - 13 - 8):

إذا كانت:

$$\{A_n\} = A_1, A_2, \dots$$

متتابعة مضطربة Monotone Sequence من الأحداث التي تتبع فراغ الأحداث فإن:

$$(1. 13. 12): \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

(الاثبات)

ذكرنا في تعريف (1 - 9 - 2) أن الحدث عبارة عن مجموعة جزئية من فراغ العينة S وأن كلمة حدث مرادف لكلمة مجموعة. إذن المتتابعة  $\{A_n\}$  تمثل متتابعة من المجموعات التي تتبع العائلة البورالية. ولإثبات النظرية السابقة:

(1) نفترض أولاً أن المجموعات  $A_1, A_2, \dots$  مضطربة للزيادة أي أن:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

إذن:

$$A_1, A_2 \bar{A}_1, \dots, A_n \bar{A}_{n-1}$$

مجموعات منفصلة لجميع قيم  $n = 2, 3, \dots$

كما أن:

$$(1. 13. 13): A_n = A_1 \cup A_2 \bar{A}_1 \cup \dots \cup A_n \bar{A}_{n-1}.$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

إن:

$$(1. 13. 14): \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_1 \cup A_2 \bar{A}_1 \cup \dots$$

ومن تعريف (1 – 13 – 1) بند 3 نجد أن:

$$(1. 13. 15): P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right] = P(A_1) + P(A_2 \bar{A}_1) + \dots$$

ولكن:

$$\begin{aligned} (1. 13. 16): P(A_1) + P(A_2 \bar{A}_1) + \dots \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_1) + P(A_2 \bar{A}_1) + \dots + P(A_n \bar{A}_{n-1})] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} P[A_1 \cup A_2 \bar{A}_1 \cup \dots \cup A_n \bar{A}_{n-1}] \end{aligned}$$

ومن (1. 13. 13)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

من (1. 13. 15) و (1. 13. 16) نحصل على (1. 13. 12) وهذا يثبت صحة النظرية عندما تكون المجموعات مضطردة للزيادة.

(2) نفرض أن المجموعات مضطردة للتقصان:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

إن المكمالات  $\bar{A}_1$  تحقق العلاقة:

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \dots$$

ومن الإثبات السابق نجد أن:

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{A}_n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{A}_n)$$

إن:

$$\begin{aligned} P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} (S - A_n)\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(S - A_n). \\ P\left[S - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(S - A_n) \end{aligned}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ومن نظرية (1 – 13 – 3) نكتب العلاقة السابقة في الصورة:

$$\begin{aligned} P(S) - P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [P(S) - P(A_n)] \\ &= P(S) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \end{aligned}$$

إذن:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

وهذا يثبت صحة النظرية.

هـ. ط. ث

تعريف (1 – 13 – 2) فراغ الاحتمال Probability Space:

فراغ الاحتمال هو مجرد اصطلاح لتعبر به عن الثلاثي  $[S, \beta, P]$  أي فراغ العينة  $S$  وفراغ الأحداث  $\beta$  ودالة الاحتمال  $P$  – وذلك لترمز للثلاثة عند الحاجة إليها باستخدام اللفظ واحد هو فراغ الاحتمال.

مثال (1 – 13 – 1): إذا كانت  $A, B$  حادثتان تنتميان لفراغ احتمالي واحد بين أن:

$$(1.13.17): P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

(الحل)

$$\therefore AB \subset A \subset A \cup B$$

$$\therefore P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

ومن متباينة بول نظرية (1 – 13 – 6):

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$\therefore P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

من التعريف الحديث للاحتمال نجد أن التعريف لا يحدد كيفية حساب احتمال حدث معين ولكن من الخصائص التي قدمها التعريف ومن طبيعة التجربة العشوائية محل الدراسة يمكن حساب احتمال الحدث. وسنوضح ذلك في حالة فراغ العينة المحدود وكذلك في حالة فراغ العينة غير المحدود.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

### (1 – 14) فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة متماثلة:

منوضح فيما يلي أن الخصائص التي قدمها التعريف الحديث للاحتمال وطبيعية التجربة العشوائية يمكن بهما تحديد قيمة احتمال أي حدث – وسنجد أن التعريف الكلاسيكي للاحتمال مجرد حالة خاصة من التعريف الحديث عندما يكون فراغ العينة محدود ومكون من أحداث بسيطة متماثلة إذ نجد في كثير من التجارب العشوائية أن فراغ العينة مكون من عدد محدود من النقاط (أي عدد محدود من الأحداث البسيطة) وكثيراً ما تكون هذه الأحداث البسيطة متماثلة – وخاصة في تلك التجارب العشوائية المتعلقة بالعباء الصدفية – ويمكن الإشارة إلى فراغ العينة في مثل هذه التجارب بالرمز  $S$  حيث

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$$

أي أن فراغ العينة  $S$  يتكون من  $N$  من الأحداث البسيطة المتماثلة  $e_i$  – ومن التماثل تكون:

$$P[\{e_1\}] = P[\{e_2\}] = \dots = P[\{e_N\}]$$

ولكن من التعريف الحديث للاحتمال نعلم أن:

$$1 = P(S) = \sum_{i=1}^N P[\{e_i\}]$$

ومن ذلك نجد أن:

$$(1. 14. 1) \quad P[\{e_1\}] = P[\{e_2\}] = \dots = P[\{e_N\}] = \frac{1}{N}$$

والمعادلة السابقة توضح لنا أن احتمال أي حدث بسيط في مجموعة الأحداث البسيطة الشاملة المتماثلة التي عددها  $N$  يساوى  $\frac{1}{N}$  أى مقلوب عدد هذه الأحداث الشاملة المتماثلة – وهذا يمكننا من حساب احتمال أي حدث مركب  $A$  حيث نجد أن احتمال أي حدث مركب  $A$  يساوى  $\frac{1}{N}$  مضروباً في عدد الأحداث البسيطة التي يتكون منها هذا الحدث المركب – فلو كان الحدث المركب  $A$  يتكون من  $m$  حدث بسيط

$$A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}\}$$

فإن:

$$P[\{e_{i_1}\}] = \dots = P[\{e_{i_m}\}] = \frac{1}{N}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

إن:

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(e_j) = \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N} = \frac{m}{N}$$

وعلى ذلك لو كان الحدث المركب  $A$  يمثل مجموعة جزئية من فراغ العينة  $S$  الذى يتكون من مجموعة محدودة من الأحداث البسيطة الشاملة المتافقة المتمثلة التى عددها  $N$  فإن احتمال وقوع الحدث  $A$  يساوى كسر بسطه عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها الحدث المركب  $A$  ولنرمز له بالرمز  $m$  ومقامه عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها فراغ العينة  $S$  ولنرمز له بالرمز  $N$  وبذلك يكون

$$(1: 14. 2): P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{m}{N}$$

وهذا هو نفس التعريف الكلاسيكى للاحتمال وبذلك يمكن اعتبار التعريف الكلاسيكى للاحتمال مجرد حالة خاصة من التعريف الحديث عندما يكون فراغ العينة محدود ومكون من أحداث بسيطة متمثلة - وفى هذه الحالة ينحصر العمل الحسابى لإيجاد الاحتمال  $P(A)$  فى حصر عدد الأحداث البسيطة التى يتكون منها الحدث المركب  $A$  والتى عددها  $N(A)$  وعدد الأحداث البسيطة الشاملة التى يتكون منها فراغ العينة  $S$  والذى نرمز له بالرمز  $N(S)$  ويكون الاحتمال مساوياً حاصل القسمة  $\frac{N(A)}{N(S)}$ .

مثال (1 - 14 - 1):

عند اختيار عدد صحيح بطريقة عشوائية من بين الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100 أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

- الحدث  $A$ : أن يكون العدد المختار مضاعف للعدد 7.
- الحدث  $B$ : أن يكون العدد المختار مضاعف للعدد 14.
- احتمال حدوث واحد على الأقل من الحدثين  $A$  و  $B$ .
- احتمال حدوث واحد بالضبط من الحدثين  $A$  و  $B$ .

(الحل)

فراغ العينة هنا يتكون من عدد محدود من الأحداث البسيطة المتمثلة هو:

$$S = \{1, 2, \dots, 100\}$$

$$\therefore N(S) = 100$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(أ) الحدث A هو:

$$A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98\}$$

$$N(A) = 14$$

$$\therefore P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = 0.14$$

(ب) الحدث B هو:

$$B = \{14, 28, 42, 56, 70, 84, 98\}$$

$$\therefore P(B) = 0.07$$

(ج) من نظرية (1 - 13 - 5):

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) = 0.14 ; AB = B \end{aligned}$$

(د) من نظرية (1 - 13 - 7):

$$\begin{aligned} P(\text{exactly one}) &= P(A) + P(B) - 2P(AB) \\ &= P(A) - P(B) = 0.07 \end{aligned}$$

## (15 - 1) العينات أو النقاط في الفراغ:

دائماً نرمز لأي نقطة في المستوى  $R_2 = x_1 0 x_2$  بالرمز  $\underline{x}_2' = (x_1, x_2)$  وهو زوج مرتب من القيم - والترتيب هنا مهم حيث أن  $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$  إلا إذا كانت  $x_1 = x_2$  - والنقط في الفراغ ذي الأبعاد الثلاثة  $x_1, x_2, x_3$  نرمز لها بالرمز  $\underline{x}_3' = (x_1, x_2, x_3)$  مع مراعاة الترتيب - كذلك في الحالة العامة حالة الفراغ ذو النون بعداً  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نرمز للنقطة بالرمز  $\underline{x}_n' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مع الأخذ في الاعتبار أن الترتيب مهم فالنقطتان  $(x_1', \dots, x_n')$ ،  $(x_1, \dots, x_n)$  تكونا متطابقتان، إذا وفقط إذا كانت،  $x_i = x_i'$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$ .

والتعبير المرتب  $\underline{x}_n' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مفيد جداً لعرض نتائج الكثير من التجارب العشوائية التي يمكن تمثيلها بحالة سحب كرات من كيس به مجموعة من الكرات



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

أو سحب ورقات من مجموعة أوراق اللعب وغير ذلك مما يمكن اعتباره سحب عينة من مجتمع. ومفهوم العينة يمكن تقديمه في العرض التالي:

نفرض أن لدينا كيس به  $M$  من الكرات المتماثلة والرقمقة من  $1$  إلى  $M$ . وأن التجربة العشوائية عبارة عن سحب كرات من هذا الكيس واحدة في كل مرة حتى نسحب كرات عددها  $n$  حيث  $n \leq M$ . ونعبر عن ذلك بأننا سحبنا عينة حجمها  $n$ . والسحب هنا قد يتم بأحد أسلوبين هما: السحب مع الإعادة أو السحب بدون إعادة. أما حالة السحب مع الإعادة فهي الحالة التي في كل سحبة نسجل رقم الكرة المسحوبة ثم نعيد الكرة مرة أخرى إلى الكيس قبل إجراء السحب التالي. ويكون السحب بدون إعادة إذا كانت للكرة لا تعاد إلى الكيس قبل السحب التالي. ونحاول الآن تحديد عدد الأحداث التي يتكون منها فراغ العينة  $S$  في حالتى السحب مع الإعادة والسحب بدون إعادة — إذا كان فراغ العينة  $S$  يتكون من عدد محدود من النقاط أو الأحداث البسيطة المتماثلة التي يمكن تمثيل كل حدث منها بنقطة في الفراغ ذو النون بعداً فإذا كان  $N_1$  هو عدد الأشياء التي يمكن أن تستخدم كمركبة أولى و  $N_2$  هو عدد الأشياء التي يمكن أن تستخدم كمركبة ثانية (بفرض أن  $N_2$  لا تعتمد على معرفة أى من الأشياء قد حدث كمركبة أولى) وهكذا حتى  $N_n$  هو عدد الأشياء التي يمكن استخدامها كمركبة رقم  $n$  (مع فرض أن  $N_n$  لا تعتمد على معرفة أى من الأشياء قد حدث كمركبة  $(n-1)$ ) — وعلى ذلك يكون حجم فراغ العينة  $S$  هو:

$$(1.15.1): N(S) = N_1 N_2 \dots N_n$$

وعلى ذلك يمكننا الآن تحديد عدد الأحداث البسيطة التي يتكون منها فراغ العينة  $S$  في حالة سحب كرات عددها  $n$  من كيس به  $M$  من الكرات المتماثلة ( $n \leq M$ ) وذلك في حالتى السحب بدون إعادة ثم السحب مع الإعادة.

**(1 – 16) حجم فراغ العينة المحدود في حالة سحب كرات عددها  $n$  من كيس به  $M$  كرة:**

**(1 – 16 – 1) إذا كان السحب بدون إعادة:**

فراغ العينة  $S$  يتكون من مجموعة من النقاط  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  أى أن:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : \text{هو رقم الكرة في السحبة } j\}$$

ويمكن حصر عناصر المجموعة  $S$  أى عدد النقاط  $(x_1, \dots, x_n)$  كما يلي:

عدد الأشياء التي يمكن أن تستخدم كمركبة أولى  $x_1$  يساوى  $M$

وعدد الأشياء التي يمكن أن تستخدم كمركبة ثانية  $x_2$  يساوى  $(M-1)$

.....

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

وعدد الأشياء التي يمكن أن تستخدم كمركبة  $n$  يساوي  $(M - n + 1)$

إذن عدد الأحداث البسيطة أو العناصر التي يتكون منها الفراغ  $S$  هو

$$(1. 16. 1): N(S) = M(M - 1) \dots (M - n + 1) = (M)_n$$

(16 – 2) إذا كان السحب مع الإعادة:

في هذه الحالة يكون عدد الأشياء التي يمكن أن تستخدم كمركبة في كل سحبة يساوي  $M$  وبذلك يكون:

$$(1. 16. 2): N(S) = M \cdot M \dots M = M^n$$

## (17 – 1) بعض النماذج الاحتمالية:

نقدم فيما يلي بعض التجارب العشوائية التي تمثل نماذج احتمالية أو حالات خاصة مهمة في نظرية الاحتمالات لبيان كيفية حساب احتمالات بعض الأحداث المهمة عن طريق حصر فراغ العينة المحدود وحصر عدد العناصر داخل الحدث.

مثال (1 – 17 – 1) (مشكلة أعياد الميلاد) Birthday Problem:

(أ) حجرة بها  $n$  من الأشخاص — ما هو احتمال ألا يوجد بالحجرة شخصان (أو أكثر) لهما نفس يوم الميلاد (بصرف النظر عن تساوي عمريهما)؟

(ب) ما هو الاحتمال في (أ) إذا كان عدد الأشخاص في الحجرة 4؟ وما هو الاحتمال إذا كان العدد 40؟

(الحل)

كل شخص في الحجرة يمكن أن يكون مولود في أي يوم من أيام السنة البالغ عددها 365 يوم (مع إهمال السنة الكبيسة) — لذلك فإن فراغ العينة يكون:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 1, 2, \dots, 365\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n \leq 365)$$

إذن حجم المجموعة  $S$  هو عدد عناصرها  $N(S)$  حيث

$$N(S) = 365 \times 365 \times \dots \times 365$$

(عندهم  $n$  عامل)

$$= (365)^n$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

الحدث A: ألا يوجد شخصان (أو أكثر) لهما نفس يوم الميلاد.

قلو كان أحد الأشخاص مولود في أى يوم من أيام السنة الـ 365 فإن الشخص الآخر يكون مولود في أى يوم آخر من الأيام الباقية التي عددها 364 وأى شخص ثالث يكون مولود في أى يوم من الأيام الباقية التي عددها 363 وهكذا (حتى لا يشترك اثنان في نفس يوم المولد من السنة).

وبذلك يمكن تمثيل الحدث A بالمجموعة التالية:

$$A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \begin{array}{l} x_1 = 1, 2, \dots, 365 \\ x_2 = 1, 2, \dots, 364 \\ \vdots \\ x_n = 1, 2, \dots, (365 - n + 1) \end{array} \right\}$$

ويكون حجم الحدث A (عدد عناصره) هو

$$N(A) = 365 \times 364 \times 363 \times \dots \times (365 - n + 1)$$

ومن (1. 14. 2):

$$P(A) = N(A)/N(S) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365 \times 365 \times \dots \times 365}$$

$$= 1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

(ب) عندما  $n = 4$  نجد أن:

$$P_4 = P(A) = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \left(1 - \frac{3}{365}\right) = 0.983644$$

وعندما  $n = 40$  نجد أن:

$$P_{40} = P(A) = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \dots \left(1 - \frac{39}{365}\right) = 0.109$$

كذلك نجد أن:

ح (اثنين على الأقل لهما نفس يوم الميلاد) =  $P(B)$  حيث:

$$q = P(B) = 1 - P(A)$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ولو كان عدد الأشخاص 4 يكون:

$$q_4 = P_4(B) = 1 - P_4(A) = 0.016356$$

ولو كان عدد الأشخاص 40 يكون:

$$q_{40} = P_{40}(B) = 1 - 0.109 = 0.891$$

نلاحظ أن  $P$  تنقص كلما زاد عدد الأشخاص في الحجرة ( $n$ ) بينما  $q$  تزيد كلما زاد عدد الأشخاص ( $n$ ).

مثال (1 - 17 - 2) احتمال الحصول على عينة لا يوجد بها مفردات مكررة عند السحب مع الإعادة:

إذا كان لدينا صندوق به  $M$  من الكرات المتشابهة - مرقمة من 1 إلى  $M$  - عند سحب عينة حجمها  $n$  من هذه الكرات - إذا كان السحب مع الإعادة - ما هو احتمال عدم وجود مفردات مكررة في هذه العينة؟

(الحل)

هذه المشكلة تشبه تماماً المشكلة السابقة الخاصة بأعياد الميلاد في المثال السابق - لذلك يكون فراغ العينة  $S$  هو:

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : x_i = 1, 2, \dots, M \right. \\ \left. \text{لجميع قيم } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

إذن عدد عناصر  $S$  (حجم  $S$ ) هو

$$N(S) = M \times M \times \dots \times M = M^n$$

الحدث  $A$  هو:

$A$  = عدم وجود مفردتان (أو أكثر) مكررة.

$$\therefore A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : x_1 = 1, 2, \dots, M \right. \\ x_2 = 1, 2, \dots, M-1 \\ \dots \\ x_n = 1, 2, \dots, (M-n+1) \left. \right\}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

إن حجم الحدث A هو:

$$N(A) = M(M-1)(M-2)\dots(M-n+1)$$

ومن (1. 14. 2):

$$P(A) = \frac{M(M-1)(M-2)\dots(M-n+1)}{M \quad M \quad M \quad \dots \quad M}$$

$$(1. 17. 1): P(A) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \left(1 - \frac{2}{M}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{M}\right)$$

مثال (1 – 17 – 3) مسألة التنافز Matching Problem:

نفرض أن لدينا M من الصناديق المرقمة من 1 إلى M و M من الكرات المرقمة كذلك من 1 إلى M. بحيث أن كل صندوق لا يتسع إلا لكرة واحدة. فإذا وزعنا (أو وضعنا) بطريقة عشوائية كل كرة في صندوق ما. فإذا حدث ووضعت الكرة رقم k في الصندوق رقم k نقول أن تناظرا واحدا قد حدث. وطبعاً من الممكن أن يحدث تناظرين أو ثلاثة أو حتى M من التناظرات إذا وضعت كل كرة في الصندوق الذي يحمل رقمها. فإذا كان الحدث  $A_k$  يمثل حالة حدوث تناظراً واحداً في الصندوق رقم k – فإننا في هذا المثال سنحاول إيجاد احتمال حدوث  $A_k$  – وذلك لجميع قيم  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ .

(الحل)

يمكن تمثيل فراغ العينة كما يلي:

للتجربة هي توزيع M من الكرات على M من الصناديق بوضع كرة واحدة في كل صندوق بطريقة عشوائية فلو كان  $x_i$  يمثل رقم الكرة الموضوعة في الصندوق رقم i (الجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, M$ ) فإن فراغ العينة S يمكن تمثيله بالمجموعة التالية:

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_M) : \begin{array}{l} x_i = 1, 2, \dots, M \\ x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j \end{array} \right\}$$

أي لا يوجد قيمتان من قيم x متساوية – وذلك لأن كل x تعبر عن رقم كرة في صندوق معين وبما أن كل صندوق به كرة واحدة وأرقام الكرات مختلفة فإن لا يوجد قيمتان من قيم x متساوية – لذلك فلو أن  $x_1$  تأخذ أي قيمة من 1 إلى M فإن  $x_2$  يمكن أن تأخذ أي قيمة من القيم من 1 إلى M ما عدا تلك التي أخذتها  $x_1$  أي أن  $x_2$  تأخذ أي من

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

الـ (M - 1) قيمة الباقية وبالمثل  $x_3$  تأخذ أى من الـ (M - 2) قيمة الباقية بعد تلك التى أخذتها كل من  $x_2, x_1 \dots$  وهكذا. إذن حجم فراغ العينة S هو:

$$N(S) = M(M-1)(M-2)\dots \times 3 \times 2 \times 1 \\ = M!$$

كذلك الحدث  $A_k$  يعتبر مجموعة جزئية من S

إذن:

$$A_k = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k = k \\ x_i \neq x_j, \quad i \neq j \\ x_i = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\}$$

إذن  $x_k$  تأخذ قيمة واحدة – لذلك فإن  $x_1$  يمكن أن تأخذ أى قيمة من القيم التى عددها M ما عدا القيمة k أى أن  $x_1$  تأخذ أى من الـ (M - 1) قيمة للباقية بعد القيمة k. وكذلك  $x_2$  تأخذ أى من القيم (M - 2) الباقية بعد k وبعد القيمة التى أخذتها  $x_1$  وهكذا. وبذلك يكون حجم الحدث  $A_k$  هو:

$$N(A_k) = (M-1)(M-2)\dots \\ \dots (M-(k-1)) \times 1(M-k)\dots \times 3 \times 2 \times 1$$

أو

$$N(A_k) = 1 \times (M-1)(M-2)\dots \times 3 \times 2 \times 1 = (M-1)!$$

إذن من (1. 14. 2):

$$(1. 17. 2): P(A_k) = \frac{(M-1)!}{M!} = \frac{1}{M}$$

## (18 - 1) فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة غير متماثلة:

تناولنا فى البند (14 - 1) الحالة التى يكون فيها فراغ العينة محدود ومكون من أحداث بسيطة متماثلة – ولكن قد يحدث أن يكون فراغ العينة محدود مثل الحالة السابقة ولكن الأحداث البسيطة التى يتكون منها الفراغ تكون غير متماثلة. وبالتالي فإن العلاقة (1. 14. 1) لا تكون صحيحة وبناء على ذلك تكون العلاقة (1. 14. 2) هى الأخرى غير

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

صحيحة – لذلك لا بد في مثل هذه الحالة من تحديد قيمة احتمال كل حدث بسيط ثم بعد ذلك يمكن حساب احتمال أى حدث مركب. والمثال التالى يوضح مثل هذه الحالة.

مثال (1 – 18 – 1): نفرض أن لدينا زهرة نرد غير متزنة مصنوعة بطريقة معينة بحيث يكون فرصة ظهور أى وجه فيها متناسبا مع العدد الذى يحمله هذا الوجه. عند إلقاء هذه الزهرة مرة واحدة – أوجد احتمال ظهور عدد زوجى من النقاط.

(الحل)

فى هذه التجربة فراغ للعينة محدود هو:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ولكنه يتكون من أحداث بسيطة غير متماثلة وذلك لأن احتمال ظهور الوجه الذى يحمل  $k$  من النقاط يتناسب مع العدد  $k$  أى أن:

$$P(k) = kC, \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

$$P(1) = C, P(2) = 2C, P(3) = 3C, \dots, P(6) = 6C$$

ولكن من التعريف الحديث للاحتمال

$$1 = P(S) = P(1) + P(2) + \dots + P(6)$$

$$1 = \sum_{k=1}^6 P(k) = C + 2C + 3C + 4C + 5C + 6C$$

$$1 = C(1 + 2 + 3 + \dots + 6) = 21C$$

$$\therefore C = \frac{1}{21}$$

والحدث المطلوب  $A$  هو الحصول على عدد زوجى من النقاط – إذن:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore P(2) = \frac{2}{21}, P(4) = \frac{4}{21}, P(6) = \frac{6}{21}$$

ومن التعريف الحديث للاحتمال نجد أن:

$$P[A] = P[2] + P[4] + P[6] = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}.$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

### (1 - 19) الاحتمال الشرطي Conditional Probability

فى بعض التجارب العشوائية يكون لدينا معلومات عن جزء من نتيجة التجربة - وفى ضوء هذه المعلومات نعال عن احتمال وقوع حدث معين. مثال ذلك لو كانت التجربة العشوائية هى سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) يكون فراغ العينة S مكون من 52 حدث بسيط - فإذا علمت أن الورقة المسحوبة كانت صورة - فما هو احتمال أن تكون هذه الورقة هى صورة الولد؟ .. فى هذه الحالة أصبح معلوم لدينا أن الورقة المسحوبة صورة - أى أن الورقة المسحوبة ليست مجرد ورقة من الـ 52 ورقة التى تمثل مجموعة أوراق اللعب - ولكنها ورقة من الـ 12 ورقة التى تمثل الصور الموجودة فى الكوتشينة والاحتمال المحسوب فى هذه الحالة يسمى بالاحتمال الشرطي - لأننا نشترط تحقق حدث معين (هو ظهور صورة). ويمكن تقديمه بشكل علم كما يلى:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فراغها المجموعة S - وعلمنا أن نتيجة هذه التجربة كانت إحدى عناصر المجموعة E التى هى جزء من S ( $E \subset S$ ). وفى ضوء علمنا أن النتيجة إحدى عناصر E ما هو احتمال أن تكون هذه النتيجة هى تحقق الحدث A؟ أى الاحتمال المطلوب هو: احتمال تحقق الحدث A إذا علمنا أن الحدث E قد تحقق فعلاً ( $A \subset E; E \subset S$ ). وهذا الاحتمال يسمى بالاحتمال الشرطي ويكتب فى الصورة:

$$P(A | E).$$

ويقرباً "احتمال حدوث A بعد E" أو "احتمال حدوث A إذا علمنا أن E قد حدث فعلاً".

وهذا الاحتمال يمكن تعريفه على ضوء الاحتمال التجريبي بأنه نسبة حدوث A من بين المرات التى حدث فيها E، أى لو افترضنا تكرار تجربة عشوائية عدد كبير من المرات ليكن N مرة وكان الحدثان A وE معرفان على هذه التجربة - فإذا كان عدد مرات حدوث E هو N(E) وعدد مرات حدوث A أثناء حدوث E هو N(AE) فإن التكرار النسبى لحدث A أثناء حدوث E هو  $\frac{N(AE)}{N(E)}$  وهذا هو نفسه احتمال حدوث الحدث A

إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً أى أن:

$$P(A | E) = \frac{N(AE)}{N(E)}$$

وبقسمة البسط والمقام للطرف الأيمن فى المعادلة السابقة على N نجد أن:

$$P(A | E) = \frac{N(AE)/N}{N(E)/N} = \frac{P(AE)}{P(E)}$$

لذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث A إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً كما يلى:



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

تعريف (1 – 19 – 1) الاحتمال الشرطي:

إذا كان الحدثان  $A$ ،  $E$  معرفين على فراغ احتمالي واحد فإن الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث  $A$  إذا علمنا أن الحدث  $E$  قد وقع فعلاً والذي نرمز له بالرمز  $P(A | E)$  يعرف بأنه:

$$(1. 19. 1): P(A | E) = \frac{P(AE)}{P(E)}$$

إذا كان  $P(E) > 0$  ويترك بدون تعريف إذا كان  $P(E) = 0$ .

والسؤال الهام الآن هو: هل الاحتمال الشرطي يحقق كل شروط الاحتمال غير الشرطي – بمعنى آخر – هل الدالة  $P[. | E]$  تعتبر دالة احتمال وتحقق المسلمات الثلاثة التي نص عليها التعريف الحديث للاحتمال. في الواقع نجد أن دالة الاحتمال الشرطي تحقق مسلمات الاحتمال الثلاثة – وذلك لأنه إذا كان فراغ العينة هو  $S$  وكانت  $A$  و  $E$  مجموعتان جزئيتين من  $S$  فإن:

$$(1. 19. 2): P(A | E) = \frac{P(AE)}{P(E)} \geq 0$$

$$(1. 19. 3): P(S | E) = \frac{P(SE)}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1$$

وإذا كانت  $A_1, A_2, \dots$  متتابعة من الأحداث المتنافية فإن:

$$(1. 19. 4): P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | E\right] = \frac{P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)E\right]}{P(E)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i E\right)}{P(E)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i E)}{P(E)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | E)$$

وعلى ذلك عندما تكون  $P(E) > 0$  تكون الدالة الشرطية  $P[. | E]$  دالة احتمال. ويمكن إثبات أن دالة الاحتمال الشرطي  $P[. | E]$ ، عندما تكون  $P(E) > 0$ ، تحقق كل النظريات التي تم تقديمها بالنسبة للاحتمال غير الشرطي ابتداء من نظرية (1 – 13 – 1) حتى (1 – 13 – 8). وذلك كما يلي:

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

لأي حدثين A و E معرفان على فراغ احتمالي واحد يمكن إثبات أن:

$$(1.19.5): P(A | E) = 1 - P(\bar{A} | E).$$

و

$$(1.19.6): P(\phi | E) = 0$$

وإذا كانت الأحداث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  متنافية ومعرفة على فراغ احتمالي واحد يكون:

$$(1.19.7): P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i | E\right] = \sum_{i=1}^n P[A_i | E]$$

ولأي حدثين  $A_1, A_2$ :

$$(1.19.8): P[A_1 | E] = P[A_1 A_2 | E] + P[A_1 \bar{A}_2 | E]$$

$$(1.19.9): P[A_1 \cup A_2 | E] = P(A_1 | E) + P(A_2 | E) - P(A_1 A_2 | E).$$

وإذا كانت  $A_1 \subset A_2$ :

$$(1.19.10): P(A_1 | E) \leq P(A_2 | E).$$

و

$$(1.19.11): P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i | E\right] \leq \sum_{i=1}^n P[A_i | E]$$

من تعريف (1 – 19 – 1) للاحتمال الشرطي نجد لأي حدثين A و E معرفان على فراغ احتمالي واحد أن:

$$(1.19.12): P(AE) = P(A)P(E | A) = P(E)P(A | E)$$

وهذا يوضح العلاقة بين الاحتمالين الشرطيين  $P(A | E)$  و  $P(E | A)$  في الصورة التالية:

$$(1.19.13): P(A | E) = \frac{P(A)P(E | A)}{P(E)}.$$

مثال (1 – 19 – 1): تجربة عشوائية تتمثل في إلقاء قطعة عملة متزنة دفعة

واحدة – أوجد:

أولاً: احتمال الحصول على صورتين إذا علمت أن نتيجة القطعة الأولى صورة.

ثانياً: احتمال الحصول على صورتين إذا علمت أنه قد ظهرت صورة واحدة على الأقل.

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(الحل)

فراغ العينة هو:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

لنرمز للحدثان  $A_1, A_2$  كما يلي:

الحدث  $A_1$ : هو ظهور صورة على القطعة الأولى.

والحدث  $A_2$ : هو ظهور صورة على القطعة الثانية.

أولاً: الاحتمال المطلوب هو:  $P(A_1 A_2 | A_1)$  ولكن

$$P_1 = P(A_1 A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 A_2 A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ثانياً: الاحتمال المطلوب هو  $P_2 = P(A_1 A_2 | A_1 \cup A_2)$  حيث

$$P_2 = P(A_1 A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P[A_1 A_2 \cap (A_1 \cup A_2)]}{P(A_1 \cup A_2)}$$

ولكن

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \cap (A_1 \cup A_2) &= A_1 A_2 A_1 \cup A_1 A_2 A_2 \\ &= A_1 A_2 \cup A_1 A_2 = A_1 A_2 \end{aligned}$$

إذن

$$P_2 = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

[ملاحظة: يمكن من فراغ العينة  $S$  ملاحظة أن:  $P_2 = \frac{1}{3}$ ،  $P_1 = \frac{1}{2}$  وذلك بمجرد النظر]

ويمكن تعميم قانون الاحتمال الشرطي إلى حالة وجود ثلاث أحداث  $A_1, A_2, A_3$

حيث يكون:

$$(1. 19. 14): P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1, A_2)$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

كذلك في حالة وجود  $n$  من الأحداث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  يكون:

$$(1. 19. 15): P(A_1 A_2 \dots A_n) \\ = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1, A_2) \dots P(A_n | A_1, \dots, A_{n-1}) \\ \text{حيث: } P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$$

### (1 – 20) الاحتمال الكلى Total Probability:

لأى فراغ احتمالى معين  $(P, \beta, S)$  إذا كانت الأحداث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  مجموعة من الأحداث المتتالية الشاملة فى  $S$  أى أن:

$$S = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad A_i A_j = \emptyset; \text{ for } i \neq j$$

وكان  $E$  حدث ما فى  $\beta$  ( $E \in \beta$ )

$$(1. 20. 1): P(E) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(E | A_i)$$

(الإثبات)

بما أن مجموعة الأحداث  $A_1, \dots, A_n$  تشمل كل فراغ العينة  $S$  والحدث  $E$  جزئى من  $S$  إذن:

$$E = \bigcup_{i=1}^n EA_i$$

وبما أن الأحداث  $A_i$  متتالية  
إذن

$$(EA_i) \cap (EA_j) = \emptyset; \text{ for } i \neq j$$

وبذلك يكون

$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^n EA_i\right)$$

ومن التتالى

$$= \sum_{i=1}^n P(EA_i)$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

ومن العلاقة (1. 19. 12)

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(E|A_i).$$

هـ . ط . ث

نتيجة (1 - 20 - 1):

إذا كان الحدث  $A$  جزئى من الفراغ  $S$  فيكون الحدث المكمل  $\bar{A}$  والحدث  $A$  حدثان متنافيان شاملان أى أن

$$A \cup \bar{A} = S, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

وعلى ذلك يمكن من (1. 20. 1) استنتاج أنه لأى حدث  $E$  فى العائلة  $\beta$  يكون:

$$(1. 20. 2): P(E) = P(A)P(E|A) + P(\bar{A})P(E|\bar{A})$$

مثال (1 - 20 - 1): لدينا صندوقان I، II. الصندوق الأول I به 5 كرات بيضاء و3 كرات سوداء - والثانى II به 3 كرات بيضاء و7 سوداء. أختبر أحد الصندوقين عشوائياً وسحبت منه كرة - أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

(الحل)

فراغ العينة لمثل هذه التجربة يمكن تمثيله بالمجموعة التالية:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x_1: \text{رقم الصندوق المختار I أو II,} \\ x_2: \text{لون الكرة المختارة أبيض أو أسود} \end{array} \right\}$$

(لاحظ أن حالات  $x_2$  (أبيض وأسود) غير متماثلة لأن عدد الكرات البيضاء يختلف عن عدد الكرات السوداء).

نفرض أن:

الحدث  $A_1$ : الصندوق المختار هو الصندوق الأول.

الحدث  $A_2$ : الصندوق المختار هو الصندوق الثانى.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

الحدث  $A_1$ : الصندوق المختار هو الصندوق الأول.

الحدث  $A_2$ : الصندوق المختار هو الصندوق الثاني.

الحدث  $E$ : الكرة المختارة بيضاء.

$$\therefore P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(E|A_1) = \frac{5}{8}, \quad P(E|A_2) = \frac{3}{10}$$

والاحتمال المطلوب هو احتمال أن الكرة المختارة بيضاء.

من العلاقة (1. 20. 2) للاحتمال الكلى نجد أن:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{37}{80} \end{aligned}$$

مثال (1 – 20 – 2) مجتمع الطبقات:

في أى مجتمع بشرى مكون من طبقات  $H_1, H_2, \dots$  (مثل توزيع أفراد المجتمع حسب فئات العمر أو الدخل السنوى لرب الأسرة أو خلاف ذلك) – إذا كان احتمال أن شخص ما  $x$  يختار عشوائياً يتبع للطبقة  $H_j$  هو  $P_j$

$$P(x \in H_j) = P_j.$$

حيث:

$$\left( \sum P_j = 1 \right)$$

وإذا كانت كل طبقة مصنفة إلى عدة فئات معينة حسب النوع مثلاً (ذكر وأنثى) أو حسب الحالة التعليمية (أمى – يقرأ ويكتب – يحمل مؤهل متوسط – يحمل مؤهل عالى) .. وهكذا. ورمزنا لاحتمال أن يكون شخص مختار عشوائياً من الطبقة  $H_j$  أمياً بالرمز  $Q_j$  ومثلنا مجموعة الأشخاص الأميين فى المجتمع بالمجموعة  $A$  فإن:

$$P(x \in A | H_j) = Q_j.$$

والآن مطلوب الإجابة عن السؤال التالى:

عد اختيار شخص عشوائياً من هذا المجتمع ما هو احتمال أن يكون أمياً؟

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

### (الحل)

قد يكون الشخص أميا ومن الطبقة الأولى أو أميا ومن الطبقة الثانية أو أميا ومن الطبقة الثالثة .. وهكذا. لذلك بتمثيل مجموعة الأميين A في كل طبقات المجتمع يمكن وضع A في الصيغة التالية:

$$A = \bigcup_{j=1}^n AH_j$$

حيث  $AH_j$  هي مجموعة الأميين في الطبقة  $H_j$ .

والمجموعات  $AH_j$  مجموعات متنافية – لذلك يمكن استخدام قانون الاحتمال الكلي المعطى بالعلاقة (1. 20. 1) لحساب احتمال أن يكون الشخص المختار أميا أى الاحتمال  $P(x \in A)$  حيث يكون:

$$P(x \in A) = \sum_{j=1}^n P(x \in H_j) P(x \in A | H_j) = \sum_{j=1}^n P_j q_j .$$

ولو كانت كل طبقة مكونة من فئتين فقط ذكر وأنثى وكان احتمال الذكر يساوى احتمال الأنثى – فإن احتمال أن الشخص المختار يكون ذكر لمى هو:

$$P = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} P_j = \frac{1}{2} (\sum P_j) = \frac{1}{2} .$$

### (1 – 21) نظرية بيز Bayes' Theorem:

نفرض أن لدينا n من الأحداث المتنافية  $A_1, A_2, \dots, A_n$  وأن احتمال وقوع كل من هذه الأحداث  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$  احتمالات معروفة – وأن لدينا حدث E يتبع في وقوعه أى حدث واحد فقط من الأحداث  $A_k$  – أى أن E لا يقع إلا مع واحد فقط من الأحداث  $A_k$  – وذلك باحتمالات معروفة  $P(E | A_k)$  – والمطلوب معرفة  $P(A_k | E)$  أى احتمال وقوع الحدث  $A_k$  إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فعلاً – أى أنه إذا علمنا أن الحدث E قد وقع فما هو احتمال أن يكون مسبقاً بالحدث  $A_k$  – والاحتمال  $P(A_k | E)$  يسمى بالاحتمال اليبعدى Posteriori Probability للحدث  $A_k$  فى حين يسمى الاحتمال  $P(A_k)$  بالاحتمال القبلى Priori Probability أو الاحتمال المطلق للحدث  $A_k$ .

احتمال أن الحدث  $A_k$  يقع ثم يليه الحدث E هو:

## الفصل الأول — نظرية الاحتمالات

$$P(A_k E) = P(A_k)P(E | A_k) \dots (I)$$

كما أن احتمال أن الحدث  $E$  يقع بصرف النظر عن أى الأحداث  $A_k$  كان يسبقه يمكن حسابه من الاحتمال الكلى (1. 20. 1) كما يلى:

$$P(E) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(E | A_k) \dots (ب)$$

والاحتمال المطلوب هو  $P(A_k | E)$  يمكن وضعه باستخدام العلاقة (1. 19. 1) على الصورة:

$$P(A_k | E) = \frac{P(A_k E)}{P(E)}$$

وبالتعويض عن الجانب الأيمن فى العلاقة السابقة من العلاقتان السابقتان (I)، (ب) نجد أن:

$$(1. 21. 1): P(A_k | E) = \frac{P(A_k)P(E | A_k)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(E | A_j)}$$

والصيغة السابقة تسمى صيغة "بيز" — وقد وضعها العالم الإنجليزى "توماس بيز" "Thomas Bayes" — وهذه للصيغة صحيحة من الناحية النظرية ولكنها محدودة الفائدة من الناحية التطبيقية وذلك لأنها تعتمد على الاحتمالات القبلية  $P(A_k)$  وهذه الاحتمالات نادرة ما تكون معروفة إلا فى الأمثلة الافتراضية البحتة — لذلك افترض "بيز" أنه فى حالة عدم وجود أى معلومات لتحديد الاحتمالات القبلية  $P(A_k)$  يمكن افتراض أنها متساوية أى أن:

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = \frac{1}{n}.$$

وبالتعويض عن ذلك فى صيغة "بيز" السابقة نجد أن:

$$(1. 21. 2): P(A_k | E) = \frac{P(E | A_k)}{\sum_{j=1}^n P(E | A_j)}$$

وهذه تسمى بنهية "بيز".



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ملاحظة (1 – 21 – 1):

صيغة "بيز" وكذلك بنديهية "بيز" تنقل صحيحة إذا كانت  $n = \infty$ .

والأحداث  $A_i$  أحياناً نسميها "أسباب" وعليه تكون صيغة "بيز" صيغة لحساب احتمال أن الحدث  $E$  (الذى قد وقع فعلاً) هو نتيجة للسبب  $A_i$ . وقد نسمى الأحداث  $A_i$  "فروضاً" وعليه تكون صيغة "بيز" صيغة لحساب احتمال صحة الفرض  $A_i$  فى ضوء المعلومات  $E$ .

مثال (1 – 21 – 1): ثلاثة صناديق متشابهة – لكل منها درجان – الصندوق الأول به قطعة نقود ذهبية فى كل من درجيه – والصندوق الثانى به قطعة ذهبية فى أحد الدرجين وقطعة فضية فى الدرج الثانى – والصندوق الثالث به قطعة فضية فى كل من درجيه.

(أ) اخترنا صندوق عشوائياً – فما هو احتمال أن يحتوى الصندوق المختار على قطعة ذهبية وقطعة فضية؟

(ب) إذا اخترنا صندوق عشوائياً وفتحنا أحد درجيه فوجدنا به قطعة ذهبية:

(1) فما هو احتمال أن يحتوى الدرج الثانى على قطعة فضية؟

(2) ما هو احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الأول؟

(3) ما هو احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الثانى؟

(4) ما هو احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الثالث؟

(الحل)

(أ) لو رمزنا للصناديق الثلاثة بالرموز  $x_1, x_2, x_3$  فإن فراغ العينة فى (أ) يكون:

$$S = \{x_1, x_2, x_3\}$$

حجم فراغ العينة هو  $N(S) = 3$  ويكون

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \frac{1}{3}$$

أى أن احتمال اختيار أى صندوق =  $\frac{1}{3}$

∴ ح (أن يحتوى الصندوق المختار على قطعة ذهبية وأخرى فضية) هو:  $P(x_2) = \frac{1}{3}$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(ب) -1- لو فكرنا في الحل بالطريقة التالية سنصل إلى نتيجة مضللة كما يلي:

بما أننا اخترنا صندوق ووجدنا في أحد درجيه قطعة ذهبية – إذن يوجد فرصتين فقط للدرج الثانى إما ذهبية أو فضية في هذه الحالة يكون فراغ العينة:

$$S_1 = \{g, s\}$$

حيث g قطعة ذهبية، s قطعة فضية – وحجم هذا للفراغ  $N(S_1) = 2$

والحدث E: القطعة الثانية فضية

$$\{s\} = E$$

وحجم الحدث E هو  $N(E) = 1$

$$\therefore P(E) = \frac{N(E)}{N(S_1)} = \frac{1}{2}$$

ولكن هذه النتيجة خطأ لأن الحثان البسيطان اللذان يتكون منهما الفراغ  $S_1$  وهما  $\{g\}$ ،  $\{s\}$  غير متمثلان – لأن فرصة أن تكون القطعة الثانية فضية تتوقف على محتويات الصندوق المختار والذي وجدنا بأحد درجيه قطعة ذهبية – فلو كان هو الصندوق الأول كانت فرصة أن تكون القطعة الثانية فضية معدومة وتساوى الصفر واحتمال أن تكون ذهبية تساوى واحد – أما إذا كان الصندوق المختار هو الثانى كانت الفرصة مؤكدة أى احتمال أن تكون القطعة الثانية فضية تساوى واحد واحتمال أن تكون ذهبية تساوى الصفر – وطبعاً لا يمكن أن يكون هو الصندوق الثالث لأن بكلتا درجيه قطعة فضية ونحن تأكدنا أن الصندوق المختار به قطعة ذهبية.

لكى نصل إلى نتيجة صحيحة نفكر كما يلي:

بما أن السحب هنا يتم على مرحلتين – المرحلة الأولى اختيار صندوق والثانية اختيار درج من الصندوق – إذن فراغ العينة يمكن تمثيله كما يلي:

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2): \text{اختيار صندوق من الثلاثة} \\ x_2 \text{ اختيار درج من الصندوق المختار} \end{array} \right\}$$

حجم الفراغ  $S_2$  هو

$$N(S) = 3 \times 2 = 6$$

الحدث E: الدرج الثانى به قطعة فضية علماً بأن الدرج الأول به قطعة ذهبية

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (y_1, y_2): y_1 \text{ قطعة ذهبية} \\ y_2 \text{ قطعة فضية} \end{array} \right\}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

∴ حجم الحدث E هو  $N(E) = 2 \times 1 = 2$

لأن القطعة الذهبية ستكون من الصندوق الأول أو الثاني وهما حالتان ... لما إذا كان أحد الدرجين به قطعة ذهبية فإن الدرج الثاني لا يكون به قطعة فضية إلا إذا كان الصندوق المختار هو الصندوق الثاني وهذه حالة واحدة.

$$\therefore P(E) = \frac{N(E)}{N(S_2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ب) - 2 - المطلوب احتمال أن يكون الصندوق المختار هو الصندوق الأول علماً بأن في أحد درجيه قطعة ذهبية.

نرمز للصناديق الثلاثة بالرموز  $x_1, x_2, x_3$  كما سبق. والحدث E: الصندوق المختار في أحد درجيه قطعة ذهبية. إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(x_1 | E) = \frac{P(x_1)P(E | x_1)}{P(E)}$$

حيث

$$P(x_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = P(x_1)P(E | x_1) + P(x_2)P(E | x_2) + P(x_3)P(E | x_3)$$

$$P(E) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0$$

$$P(E) = \frac{1}{2}, \quad P(E | x_1) = 1$$

$$\therefore P(x_1 | E) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(ب) - 3 - المطلوب:  $P(x_2 | E)$

بالمثل نجد أن:

$$P(x_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = \frac{1}{2}, \quad P(E | x_2) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(x_2 | E) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(ب) - 4 - المطلوب:  $P(x_3 | E)$

بالمثل نجد أن:

$$P(x_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(E) = \frac{1}{2}, \quad P(E | x_3) = 0$$

$$\therefore P(x_3 | E) = \frac{\frac{1}{3} \times 0}{\frac{1}{2}} = 0$$

**مثال (1 - 21 - 2):** صندوق به 4 كرات وكل ما نعرفه عن محتوياته أنها إحدى حالتين (أ) كل الكرات الأربع بيضاء أو (ب) كرتان بيضاء وكرتان سوداء. سُحبت كرة عشوائياً من الصندوق ووُجد أنها بيضاء. فما هو احتمال أن تكون كل كرات الصندوق بيضاء؟

(الحل)

يوجد فرضان لمحتويات الصندوق هما:

الفرض الأول  $H_1$  هو أن تكون كل الكرات الموجودة بالصندوق بيضاء والفرض الثاني  $H_2$  هو أن يوجد بالصندوق كرتان بيضاء وكرتان سوداء. نفرض أن احتمال أن يكون الفرض الأول صحيح هو  $P(H_1) = P_1$  وأن احتمال أن يكون الفرض الثاني صحيح هو  $P(H_2) = P_2$  نفرض أن الحدث  $B$  هو: سحب كرة بيضاء.

إذن الاحتمال المطلوب هو:  $P(H_1 | B)$  أى احتمال أن تكون كل الكرات الموجودة فى الصندوق بيضاء إذا علمنا أن الكرة التى سُحبت وُجِدت بيضاء - أو احتمال صحة الفرض الأول  $H_1$  فى ضوء المعلومة التى حصلنا عليها وهى أن الكرة المسحوبة بيضاء. من نظرية "بيز" نجد أن:

$$P(H_1 | B) = \frac{P(H_1)P(B | H_1)}{P(H_1)P(B | H_1) + P(H_2)P(B | H_2)}$$

ولكن

$$P(H_1) = P_1, \quad P(H_2) = P_2$$

$$P(B | H_1) = 1, \quad P(B | H_2) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(H_1 | B) = \frac{P_1 \times 1}{P_1 \times 1 + P_2 \times \frac{1}{2}} = \frac{P_1}{P_1 + \frac{1}{2}P_2}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

وهذا يعتمد على معرفة كل من الاحتمالات القبلية  $P(H_1)$ ,  $P(H_2)$  أى على  $P_1$ ,  $P_2$  فلو اتبعنا ما افترضه "بيز" من أن:

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

يكون:

$$P(H_1 | B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$P(H_2 | B) = \frac{\frac{1}{2} P_2}{P_1 + \frac{1}{2} P_2}$$

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$$

وعندما

يكون:

$$P(H_2 | B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

مثال (1 - 21 - 3) (مجتمع مصنف حسب عدد الأطفال فى الأسرة):

مجتمع بشرى مقسم إلى طبقات حسب عدد الأطفال فى الأسرة، الطبقة  $H_1$  هى الطبقة المكونة من الأسر التى عند كل منها  $J$  طفل. واحتمال أن شخص مختار عشوائياً من هذا المجتمع يكون من الطبقة  $H_1$  هو  $P_1$  (حيث  $\sum_j P_j = 1$ ). فلو رمزنا للولد بالرمز  $b$  والبنت بالرمز  $g$  وكان توزيع الأطفال داخل كل أسرة حسب النوع (ولد وبنت) باحتمالات متساوية أى أن  $P(b) = P(g) = \frac{1}{2}$ . وكان المطلوب الإجابة على السؤال التالى:

إذا سحبنا مفردة (شخص) من هذا المجتمع وعلمنا أن الأسرة التى سحبت منها المفردة ليس عندها بنات فما هو احتمال أن تكون هذه المفردة من الطبقة الأولى  $H_1$ ؟

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

### (الإجابة)

من الممكن أن تكون المفردة المسحوبة من الطبقة الأولى أو الثانية أو الثالثة أو ... وبالتالي فإن فراغ العينة S يتكون من النقاط التالية:

$\phi$  (في حالة عدم وجود أطفال) , b, g (في حالة وجود طفل واحد) g b, g b, b b, b b, ... (في حالة وجود طفلين) b b b, ... وهكذا.

إذا كانت الأسرة المختارة بها n طفل فإن احتمال أن يكون الأطفال في هذه الأسرة بترتيب معين (كالتالي مثلا):

$$E = \{g b g g b \dots b\} \quad (\text{عددهم } n)$$

(الطفل الأكبر بنت ثم يليه ولد ثم بنت ثم بنت ثم ولد ... ثم ولد)

$$P(E | H_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وإذا رمزنا لاحتمال أن تكون الأسرة المختارة من الطبقة n (أي عندها n طفل) بالرمز  $P_n$  فإن:

احتمال أن تكون الأسرة المختارة من الطبقة n وترتيب الأطفال فيها هو الترتيب المعين السابق

$$= \text{ح (أن تكون الأسرة المختارة من الطبقة } n) \times \text{ح (أن تكون أطفال الأسرة بالترتيب السابق } E | H_n)$$

$$= P(H_n) P(E | H_n)$$

$$= P_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وبفرض أن الحدث A هو: أن الأسرة المختارة لا يوجد عندها بنات. طبعاً يوجد أسر من هذا النوع في جميع طبقات المجتمع  $H_1$  وبالتالي تكون

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A H_j$$

والمجموعات  $A H_j$  مجموعات متنافية.

وبالتالي نجد من الاحتمال الكلي في (1. 20. 1) أن:

$$P(A) = \sum_j P(H_j) P(A | H_j)$$

حيث

$$P(H_j) = P_j$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

و  $P(A | H_i)$  هو احتمال أن تكون كل أطفال الأسرة التي عددهم  $J$  لا يوجد فيهم بنات أى كلهم أولاد

$$P(\{b b \dots b\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^J$$

$$\therefore P(A) = P_1\left(\frac{1}{2}\right) + P_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + P_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

والسؤال المطلوب هو: إذا علمنا أن الأسرة المختارة ليس بها بنات — فما هو احتمال أن تكون من الطبقة الأولى أى بها طفل واحد — أى الاحتمال  $P(H_1 | A)$ .  
ومن نظرية "بيز" نجد أن:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{P_1\left(\frac{1}{2}\right)}{P_1\left(\frac{1}{2}\right) + P_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + P_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots}$$

حيث  $P(A | H_1)$  هو احتمال أن يكون بالأسرة طفل واحد ولد  $P(b) = \frac{1}{2}$ .

والاحتمال السابق  $P(H_1 | A)$  هو احتمال صحة الفرض  $H_1$  فى ضوء المعلومة  $A$ .

ويتضح من المثال السابق أن الاحتمال  $P(H_1 | A)$  والذى تقدمه نظرية "بيز" لا يمكن معرفته إلا إذا كانت الاحتمالات القبلية  $P(H_1)$ ,  $P(H_2)$ , ... معلومة كلها — وهذا نادر! مما يحدث فى الواقع العملى — إذ غالباً ما تكون هذه الاحتمالات القبلية مجهولة — مما يجعل الفائدة التطبيقية لنظرية "بيز" محدودة عملياً.

فلو اعتبرنا فى المثال السابق أن الفروض عددها عشرة ففروض فقط  $H_1, H_2, \dots, H_{10}$  باعتبار أن الفرض العاشر  $H_{10}$  هو أن يكون عدد الأطفال فى الأسرة عشرة أطفال فأكثر — ولو افترضنا أن احتمالات هذه الفروض متساوية أى:

$$P(H_1) = P(H_2) = \dots = P(H_{10}) = \frac{1}{10}$$

فإن الاحتمال المطلوب يكون:

$$P(H_1 | A) = \left(\frac{1}{2}\right) / \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]$$

$$P(H_1 | A) \approx \frac{1}{2}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

### (1 – 22) نظرية "بيز" للأحداث المستقبلية :

#### Bayes' Theorem for Future Events

يمكن تعميم نظرية "بيز" لحساب احتمالات بعض الأحداث المستقبلية كما يلي: إذا أبقينا على كل الفروض التي وضعت في نظرية "بيز" بالنسبة للأحداث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  الشاملة المتنافية – والحدث  $E$  الذي لا يقع إلا مع إحدى حالات  $A$  باحتمال  $P(E | A_k)$  معروف لجميع قيم  $k = 1, 2, \dots, n$  ونفترضنا بالإضافة إلى ذلك أن  $C$  حدث ما يقع بعد  $E$  وأنه (أي  $C$ ) يقع مع واحد فقط من الأحداث  $A_1, \dots, A_n$ . والمطلوب الآن حساب الاحتمال التالي:

إذا كان معلوما أن الحدث  $E$  قد وقع فما هو احتمال وقوع الحدث  $C$ , أي ما هو:

$$P[C | E] = ?$$

في الواقع نعلم من الاحتمال الشرطي أن:

$$P[C | E] = \frac{P[EC]}{P[E]} \quad (1)$$

ومن العلاقة (1. 20. 1) للاحتمال الكلي نعلم أن:

$$P[E] = \sum_k P(A_k)P(E | A_k) \quad (ب)$$

إذن

$$P[EC] = \sum_k P(A_k)P[EC | A_k]$$

ومن العلاقة (1. 19. 12) للاحتمال الشرطي تكون:

$$P[EC | A_k] = P[E | A_k]P[C | A_k, E] \quad (جـ)$$

بالتعويض عن (ب) و(جـ) في (أ) نجد أن:

$$(1. 22. 1): P[C | E] = \frac{\sum_k P(A_k)P(E | A_k)P[C | A_k, E]}{\sum_k P(A_k)P(E | A_k)}$$

والعلاقة السابقة توضح كيفية حساب احتمال الحدث  $C$  إذا علمنا أن الحدث  $E$  قد وقع وذلك في ضوء مجموعة شاملة ومتنافية من الفروض  $A_1, \dots, A_n$ .



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مثال (1 - 22 - 1): في مثال (1 - 21 - 2) ذكرنا أن لدينا صندوق محتوياته 4 كرات بيضاء أو كرتان بيضاء وكرتان سوداء. سحبت منه كرة واحدة ووجئت بيضاء – عند سحب كرة ثانية من الصندوق (بدون إعادة) ما هو احتمال أن الكرة الثانية ستكون بيضاء أيضاً؟

### (الحل)

لدينا فرضين  $H_1$  أن الكرات الموجودة بالصندوق كلها بيضاء و  $H_2$  أن الكرات الموجودة بالصندوق منها 2 بيضاء، 2 سوداء. الحدث E: هو سحب كرة بيضاء (من أول سحبة). الحدث C: هو سحب كرة ثانية (بعد السحبة الأولى) بيضاء. إذن:

$$P(E | H_1) = 1 \quad , \quad P(E | H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(C | H_1, E) = 1 \quad , \quad P(C | H_2, E) = \frac{1}{3}$$

$$P(H_1) = P_1 \quad , \quad P(H_2) = P_2$$

من العلاقة (1. 22. 1) السابقة يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(C | E) = \frac{\sum_k P(H_k) P(E | H_k) P(C | H_k, E)}{\sum_k P(H_k) P(E | H_k)} = \frac{N}{M}$$

البسط في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة يساوي

$$N = P_1 \times 1 \times 1 + P_2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P_1 + \frac{1}{6} P_2$$

والمقام هو الاحتمال الكلي  $P(E)$  ويساوي

$$M = P(E) = P_1 + \frac{1}{2} P_2$$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(C | E) = \frac{P_1 + \frac{1}{6} P_2}{P_1 + \frac{1}{2} P_2}$$

ولكن عندما  $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$

يكون

$$P(C | E) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})} = \frac{7}{9}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

فى العلاقة (1. 22. 1) السابقة التى تعتبر تطبيقاً لنظرية "بيز" على الأحداث المستقبلية استخدمنا الاحتمال  $P[C | A, E]$  وهو احتمال وقوع الحدث  $C$  إذا علمنا أن الحدثان  $E$  و  $A$  قد وقعا. ونحاول الآن توضيح المقصود بهذا التعبير أو بهذا الاحتمال.

على ضوء مفهوم التعريف التجريبي للاحتمال يكون المقصود بالاحتمال  $P[C | A, E]$  هو نسبة الحالات التى يقع فيها الحدث  $C$  من بين تلك الحالات التى يقع فيها كلا الحدثين  $E$  و  $A$  وبصورة أخرى يكون المقصود بالاحتمال  $P[C | A, E]$  هو النسبة التى بسطها عدد المرات التى يقع فيها الحدث  $(C | A, E)$  ومقامها عدد المرات التى يقع فيها الحدث  $(A, E)$  وبذلك يكون الاحتمال:  $P[C | A, E] = \frac{P(CAE)}{P(AE)}$  والجانب الأيمن هو

نفسه  $P[C | A, E]$  وعلى ذلك يمكن وضع التعريف التالى:

تعريف (1 - 22 - 1):

إذا كانت الأحداث  $A$  و  $E$  و  $C$  معرفة على فراغ احتمالى ولحد فإن احتمال وقوع الحدث  $C$ ، إذا علمنا أن الحدثان  $A$  و  $E$  قد وقعا فعلاً هو:

$$(1. 22. 2): P[C | A, E] = P[C | A, E] = \frac{P[C | A, E]}{P[A, E]}$$

وذلك إذا كان  $P[A, E] > 0$

أما إذا كان  $P(A, E) = 0$  فإن الاحتمال  $P[C | A, E]$  يكون غير معرف.

ونظرية "بيز" تعالج حالة التجارب العشوائية التى يتم إجرائها على مراحل - مثال ذلك التجربة التى تتمثل فى إلقاء زهرة نرد أولاً ثم إلقاء قطعة عملة عدد من المرات يعادل عدد النقاط التى تظهر على زهرة النرد - فلو كان الحدث  $E$  هو ظهور الصورة مرة واحدة - ونسأل السؤال التالى: إذا علمت أن الحدث  $E$  قد تحقق (أى الصورة ظهرت مرة واحدة) فما هو احتمال أن نتيجة زهرة الطاولة كانت الوجه الذى عليه نقطة واحدة (أس) - فلو رمزنا لاسم بالرمز  $A_1$  - فإن الاحتمال الذى نسأل عنه هو  $P(A_1 | E)$  - نلاحظ أننا نسأل عن احتمال حدث من أحداث المرحلة الأولى (فى التجربة) بناء على معرفة نتيجة من نتائج المرحلة الثانية - وهذا شئ عكس الوضع الطبيعى - إذ أن الوضع الطبيعى هو أن نسأل عن حدث من أحداث المرحلة الثانية بناء على معرفة نتيجة (أو حدث) من نتائج المرحلة الأولى - أى أن السؤال الطبيعى يكون على النحو التالى: إذا كانت نتيجة زهرة الطاولة (المرحلة الأولى) هى الأس ( $A_1$ ) فما هو احتمال الحصول على صورة ( $E$ ) - هنا الإجابة تكون سهلة ومباشرة والإجابة هى  $P(E | A_1) = \frac{1}{2}$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

الذى ينعكس مع الوضع الطبيعي أى من النوع  $P(A_k | E)$  وتقدم الإجابة بدلالة الوضع الطبيعي  $P(E | A_k)$  و  $P(A_k)$  لجميع قيم  $k = 1, 2, \dots, n$  لذلك فهي تعتبر نوع من الاستنباط العكسى.

### (1 – 23) الاستقلال وعدم الاستقلال Independence and Dependence:

(1 – 23 – 1) استقلال حدثين:

إذا كان لدينا حدثين  $A$  و  $B$  وكان الاحتمال  $P(B | A)$  هو نفسه الاحتمال  $P(B)$  أى أن احتمال وقوع الحدث  $B$  لا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحدث  $A$  – فمن الطبيعي أن نعتبر الحدث  $B$  مستقل عن الحدث  $A$  – وبذلك يكون الحدث  $B$  مستقل عن الحدث  $A$  إذا كان

$$P(B) = P(B | A) \dots\dots (a)$$

وبالمثل يكون  $A$  مستقل عن  $B$  إذا كان:

$$P(A) = P(A | B) \dots\dots (b)$$

ومن العلاقات السابقتين (a)، (b)، يمكن إعادة صياغة العلاقة (12، 19، 1) للاحتمال الشرطى عندما يكون  $A$  و  $B$  مستقلان فى الصورة التالية:

إذا كان  $A$  و  $B$  مستقلان يكون:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \dots\dots\dots (c)$$

من العلاقات السابقة (a)، (b)، (c) يمكن صياغة التعريف التالى:

تعريف (1 – 23 – 1) الحدثان المستقلان:

إذا كان  $A$  و  $B$  حدثان معرفان على فراغ احتمالى واحد. فإن الحدثان  $A$  و  $B$  يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، تحقق أى شرط من الشروط التالية:

$$(1. 23. 1): \begin{cases} (1) P(B | A) = P(B) , P(A) > 0 \\ (2) P(A | B) = P(A) , P(B) > 0 \\ (3) P(A \cap B) = P(A) P(B) \end{cases}$$

أحيانا نقول أن الحدثان مستقلان إحصائيا وأحيانا نكتفى بكلمة مستقلان.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

**مسألة (1 – 23 – 1):** كيس به ثلاث كرات بيضاء وكرتان سوداء – سحب كرتان من الكيس – فإذا كان الحدث A هو أن الكرة الأولى المسحوبة بيضاء والحدث B هو أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء – هل ترى أن الحدثان A و B مستقلان؟  
أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة.  
ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة.

(الحل)

أولاً: السحب مع الإعادة:

من البند (1 – 16 – 2) نرى أن:

$$N(S) = 5^2$$

حجم فراغ العينة

$$N(AB) = 3^2$$

حجم فراغ الحدث A B

$$\therefore P(AB) = \frac{3^2}{5^2}$$

$$N(A) = 3 \quad , \quad N(B) = 3$$

كذلك

$$\therefore P(A) = \frac{3}{5} \quad , \quad P(B) = \frac{3}{5}$$

وهذا يوضح أن:

$$P(AB) = \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = P(A)P(B)$$

أي أن الحدثان A ، B مستقلان.

ثانياً: السحب بدون إعادة:

نجد أن:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

فى حين أن:  $P(B)$  يمكن الحصول عليها من نتيجة (2. 20. 1) للاحتمال الكلى – حيث نجد أن:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore P(B|A) \neq P(B)$$

أى أن الحدثان  $A$ ،  $B$  غير مستقلان.

### (1 – 24) استقلال الأحداث المتنافية:

أوضحنا فى العلاقة (1. 23. 1) أن الشرط اللازم والكافى لاستقلال الحدثان  $A$  و  $B$  هو أن يكون:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

واشترطنا أن  $P(A) > 0$  و  $P(B) > 0$ . ونحاول الآن تطبيق هذا الشرط فى الحالة التى يكون فيها الحدثان  $A$  و  $B$  متنافيان:

فى حالة التنافى لا يمكن للحدثان  $A$  و  $B$  أن يقعا معا أى أن  $P(AB) = 0$  — لذلك لكى يكون الحدثان المتنافيان  $A$  و  $B$  مستقلان يجب أن يكون:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0$$

وهذا يتطلب أن يكون أحد الاحتمالين على الأقل يساوى الصفر — لأنه إذا كان احتمال كل من الحدثان المتنافيان  $A$  و  $B$  يختلف عن الصفر فلا يمكن أن يكون  $P(A)P(B) = 0$  وبالتالي فلا يمكن أن يكونا مستقلان — لأنه فى هذه الحالة سيكون  $P(AB) = 0$  فى حين أن  $P(A)P(B) \neq 0$  أى أن:

$$P(AB) \neq P(A)P(B).$$

**مسألة (1 – 24 – 1):** كيمس يحتوى على 6 كرات متشابهة فى كل شئ عدا اللون منها 4 كرات بيضاء والباقى من لون آخر — سحبنا منه كرتان — فإذا كان الحدثان  $A$  و  $B$  هما:

الحدث  $A$ : كرة واحدة بالضبط من الكرتان المسحوبتان بيضاء.

والحدث  $B$ : الكرتان المسحوبتان بيضاًوتان.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

هل ترى أن الحدثان A و B مستقلان؟

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة.

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة.

(الحل)

الحدثان A و B متنافيان – لأنه لا يمكن وقوعهما معاً حيث لا يمكن أن تكون كرة واحدة بالضبط من الكرتين المسحوبتين بيضاء وفي نفس الوقت تكون الكرتين المسحوبتين بيضاًوتين. إذن:

$$P(A \cap B) = 0$$

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة:

نفترض أن الحدث C: هو أن الكرة الأولى المسحوبة بيضاء. والحدث D: هو أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء.

من نظرية (1 – 13 – 7) نجد أن احتمال الحصول على كرة واحدة بالضبط بيضاء هو:

$$P(A) = P(C) + P(D) - 2P(CD) \quad (a)$$

$$P(A) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} - 2\left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = P(CD) = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore P(A)P(B) = \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{في حين أن:}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

إذن الحدثان A و B غير مستقلان.

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة: نجد أن:

$$P(B) = P(CD) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

في حين أن  $P(D)$  يمكن الحصول عليها من العلاقة (1، 20، 2) حيث نجد أن:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C)P(D|C) + P(\bar{C})P(D|\bar{C}) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

وباستخدام العلاقة (a) السابقة نجد أن:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C) + P(D) - 2P(CD) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 2 \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

وبما أن:

$$P(A) = \frac{8}{15}, \quad P(B) = \frac{2}{5}$$

في حين أن:  $P(AB) = 0$

إن الحدثان المتنافيان A و B غير مستقلان لأن:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B) = \frac{8}{15} \times \frac{2}{5}$$

### (1 - 25) استقلال أكثر من حدثين:

نفرض أن لدينا ثلاث أحداث A, B, C معرفة على فراغ احتمالي واحد. فلكي يكون الحدث C مستقل عن الحدثين A و B لابد أن لا يتأثر احتمال وقوعه بأي من الحدثين A و B كل على حده أو كلاهما معاً أو حتى مكملهما أو أي علاقة فيهما - لذلك يمكن وضع التعريف التالي:

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

تعريف (1 – 25 – 1): الأحداث  $C$  و  $B$  و  $A$  المعرفة على فراغ احتمالي واحد يقال أنها مستقلة (أو مستقلة إحصائياً) إذا تحققت العلاقات التالية:

$$(1. 25. 1): \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(CB) = P(C)P(B) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

ونلاحظ من التعريف السابق أن العلاقات الثلاثة الأولى التي توضح استقلال الأحداث متشابهة لا تتضمن العلاقة الرابعة وبالتالي فإن الاستقلال الثانى Pairwise independence للمتغيرات الثلاثة لا يعطى بالضرورة أن تكون المتغيرات الثلاثة مستقلة عن بعضها – والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال (1 – 25 – 1): تجربة عشوائية تتمثل فى سحب كرة من كيس به 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 والأحداث  $C$  و  $B$  و  $A$  (معرفة على الفراغ الاحتمالي لهذه التجربة) هي:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{1, 4\}$$

هل نرى أن الأحداث الثلاثة  $C$  و  $B$  و  $A$  مستقلة؟

(الحل)

$$AB = AC = CB = \{1\}$$

$$\therefore P(AB) = P(AC) = P(CB) = \frac{1}{4}$$

كذلك

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

إذن

$$\frac{1}{4} = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = P(BC) = P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

أى أن الأحداث الثلاثة مستقلة متشابهة.



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ولكن:

$$ABC = \{1\}$$

$$\therefore P(ABC) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} = P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

أى أن الأحداث الثلاثة غير مستقلة – وهذا يؤكد أن استقلال الأحداث متى متى لا يعنى استقلالها.

يمكن الآن استنباط شروط أخرى لاستقلال الأحداث  $A$  و  $B$  و  $C$  مرادفه لتلك المقدمة فى تعريف (1 – 25 – 1) السابق – إذ يمكن استخدام العلاقات (1. 23. 1) لإيضاح أنه إذا كانت الأحداث  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقلة – يكون:

$$P[C | A, B] = \frac{P[CAB]}{P[AB]}$$

بشرط أن  $P[AB] > 0$

ومن العلاقات (1. 25. 1) يكون:

$$P[C | A, B] = \frac{P[CAB]}{P(AB)} = \frac{P(C)P(A)P(B)}{P(A)P(B)} = P(C)$$

وبالمثل:

$$P(C | A) = \frac{P(CA)}{P(A)} = \frac{P(C)P(A)}{P(A)} = P(C)$$

وكذلك:

$$P(C | B) = P(C)$$

وبذلك يمكن وضع الصيغة التالية المرادفة لاستقلال ثلاثة أحداث فى التعريف التالى:

تعريف (1 – 25 – 2): تعتبر الأحداث الثلاثة  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقلة إذا تحققت العلاقات التالية:

$$(1. 25. 2): \begin{cases} P(A | B, C) = P(A | B) = P(A | C) = P(A) \\ P(B | A, C) = P(B | A) = P(B | C) = P(B) \\ P(C | A, B) = P(C | A) = P(C | B) = P(C) \end{cases}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

ونلك بشرط أن تكون احتمالات تحقق الأحداث  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $A$  و  $B$  كلها موجبة.

**ملاحظة (1 - 25 - 1):** إذا كان الحدثان  $A$  و  $B$  المعرفان على فراغ احتمالي واحد مستقلان - يكون كل من الحدثان  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  مستقلان وكذلك  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  مستقلان. وذلك لأن:

$$\begin{aligned} P(A \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}) \end{aligned}$$

أى أنه إذا كان الحدثان  $A$  و  $B$  مستقلان - يكون الحدثان  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  مستقلان كذلك. ويمكن إثبات الباقي بطريقة مشابهة - كما يمكن تعميم شروط الاستقلال في حالة  $n$  من الأحداث بتقديم التعريف التالي:

**تعريف (1 - 25 - 3):** إذا كانت الأحداث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  معرفة على فراغ احتمالي واحد - فإن هذه الأحداث تكون مستقلة، إذا وفقط إذا كان:

$$(1.25.3): \begin{cases} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j); i \neq j \\ P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \quad i \neq j \quad j \neq k \quad i \neq k \\ \dots\dots\dots \\ P\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right] = \prod_{i=1}^n P(A_i) \end{cases}$$

بعد تعريف الأحداث المستقلة يمكن الآن إثبات بعض العلاقات الهامة. إذا كانت الأحداث  $A_1, \dots, A_n$  أحداث مستقلة ومعرفة على فراغ احتمالي واحد يكون احتمال وقوع حدث واحد منها على الأقل هو:

$$(1.25.4): P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i)$$

حيث أن  $\bar{A}_i$  هو مكمل الحدث  $A_i$ .

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

وذلك لأن:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right)$$

ومن قوانين دى مورجان نجد أن

$$\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$$

إذن:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n})$$

وبما أن الأحداث  $A_1, \dots, A_n$  مستقلة – إذن المكملات  $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$  مستقلة كذلك.

$$\therefore P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = \prod_{i=1}^n P(\overline{A_i})$$

وهذا يثبت النتيجة (1. 25. 4) السابقة.

كذلك من النتيجة (1. 25. 4) يمكن الوصول إلى العلاقة (1. 25. 5) التالية وذلك إذا رمزنا لاحتمالات وقوع الأحداث  $A_1, \dots, A_n$  بالرموز:

$$P(A_i) = P_i \quad ; i = 1, 2, \dots, n$$

ولاحتمال عدم وقع أى من هذه الأحداث بالرمز  $P_0$  – أى لن  
ح (عدم وقوع أى من هذه الأحداث)  $P_0$

فإن:

$$(1. 25. 5): P_0 = \prod_{i=1}^n (1 - P_i)$$

### (1 – 26) المحاولات المتكررة المستقلة Repeated Independent Trials :

نتكلم الآن عن حالة تكرار تجربة عشوائية عدد من المرات بحيث أن نتيجة التجربة فى كل مرة لا تؤثر ولا تتأثر بنتيجتها فى أى مرة أخرى سابقة أو لاحقة – وهذه تعرف بالمحاولات العشوائية المتكررة المستقلة. والحالات الممكنة أو النتائج الممكنة لكل تجربة من هذه التجارب المتكررة المستقلة قد تكون حالتين أو أكثر – فإذا كانت النتائج الممكنة لكل تجربة نتيجتين فقط سميت التجربة «تجربة ذات وجهين أو ذات حدين». أما

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

إذا كانت أكثر من وجهين سميت التجربة «تجربة متعددة النواتج أو متعددة الأوجه». وستناول كلا النوعين كل على حده مبتكئين بالتجارب ذات الوجهين.

(1 - 26 - 1) التجارب المستقلة ذات الحدين The Binomial Independent Trials:

(1 - 26 - 1) محاولات برنوللي Bernoulli Trials:

فى كثير من التجارب العشوائية المستقلة قد تكون نتيجة التجربة إحدى نتيجتين تسمى إحداهما نجاح ونرمز له بالرمز  $s$  والأخرى فشل ونرمز له بالرمز  $f$  - ومثل هذه التجارب لها تطبيقات كثيرة ومفيدة من الناحية العملية - مثل فحص وحدات منتجة من منتج معين بحيث تفحص كل وحدة بمفردها لمعرفة إذا ما كانت جيدة أم فاسدة فنتيجة الفحص هنا إحدى ناتجين - كذلك عند إطلاق عدة قذائف على هدف فإن كل قذيفة يمكن اعتبارها تجربة عشوائية مستقلة لها إحدى نتيجتين إما إصابة الهدف أو عدم الإصابة وغير ذلك الكثير من الأمثلة العملية. مثل هذه التجارب المستقلة التي لها نتيجتين ممكنتين فقط نجاح  $s$  وفشل  $f$  والتي تسمى محاولات برنوللي حيث نرمز عادة لاحتمال النجاح بالرمز  $P$  واحتمال الفشل بالرمز  $q$  حيث:

$$(1. 26. 1): P \geq 0, \quad P + q = 1$$

وبذلك يكون فراغ العينة لكل محاولة من محاولات برنوللي هو:

$$S_1 = \{s, f\}$$

أى أن فراغ العينة  $S_1$  مجموعة مكونة من عنصرين (أو من نقطتين) هما  $s, f$  ومعرف عليه دالة الاحتمال  $P[\cdot]$  التي تحدد الاحتمالين:

$$P[\{s\}] = P, \quad P[\{f\}] = q$$

وبالتالى فإن فراغ العينة هنا محدود ولكنه لا يتكون من أحداث بسيطة متماثلة أى لا يمكن تطبيق العلاقة (1. 14. 2) لتحديد احتمالات المجموعات الجزئية المختلفة للفراغ  $S_1$ . لو تصورنا أن محاولات برنوللي المستقلة يتم تكرارها  $n$  مرة - فإن فراغ العينة للتجربة المركبة (أى التي تتكون من تكرار المحاولة  $n$  مرة) يكون على الصورة التالية:

$$S_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = s \text{ or } f\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

فراغ العينة  $S_n$  يتكون من عناصر عددها  $2^n$  عنصراً كل عنصر يمكن تمثيله بنقطة في الفراغ ذو النون بعداً  $(x_1, \dots, x_n)$  ولكن دالة الاحتمال المعرفة على هذا الفراغ لا تحدد احتمالات متساوية لهذه النقط - أى أن الأحداث البسيطة  $(x_1, \dots, x_n)$  لا يمكن اعتبارها أحداثاً متماثلة وبالتالي لا يمكن تطبيق العلاقة (1. 14. 2) لتحديد احتمالات المجموعات الجزئية المختلفة للفراغ  $S_n$ ، ولكن أى حدث بسيط يكون دائماً عبارة عن سلسلة من النتائج بعضها نجاح  $s$  وبعضها فشل  $f$  - فإذا كان عدد مرات النجاح  $k$  مرة

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

وعدد مرات فشل  $(n - k)$  مرة وكلها مرات مستقلة فإن أى حدث بسيط وليكن مثلاً الحدث  $A = s s f f s \dots f s$  (وذلك باعتبار أن  $s$  تأخذ الترتيب الموضح) يكون احتمال تحقق مثل هذا الحدث يساوى  $P^k Q^{n-k}$  وذلك فى الـ  $n$  محاولة. وتحقيق ذلك بسيط لأنه لو تصورنا أن المحاولات الأولى التى عددها  $k$  كانت كلها نجاح والباقي  $(n - k)$  فشل تكون نتيجة المحاولات كلها كما يلى:

$$A = \underbrace{s s \dots s}_{k \text{ عددهم}} \underbrace{f f \dots f}_{(n-k) \text{ عددهم}}$$

$$\therefore P(A) = P(s s \dots s f f \dots f)$$

ومن الاستقلال

$$P(A) = P(s)P(s) \dots P(s)P(f)P(f) \dots P(f) \\ = P P \dots P q q \dots q = P^k Q^{n-k}$$

وبذلك يكون احتمال الحصول على مرات نجاح عددها  $k$  و مرات فشل عددها  $(n - k)$  "بترتيب معين" "لترتيب السابق" هو:

$k$  مرة نجاح

$$(1. 26. 2): P(k \text{ successes}) = P^k Q^{n-k}$$

والمقصود هنا بكلمة "ترتيب معين" هو الترتيب  $s s \dots s f f \dots f$

وهو إحدى ترانبيب الأحرف  $s$  التى عددها  $k$  والأحرف  $f$  التى عددها  $(n - k)$  فى  $n$  من الأماكن حيث أنه يوجد فى هذه الحالة ترانبيب مختلفة عددها  $\binom{n}{k}$  ترتيب مختلف.

(1 - 26 - 1) ب) القانون الاحتمالى ذو الحدين The Binomial Probability Law

احتمال الحصول على  $k$  مرة نجاح فى  $n$  من تجارب برنوللى المتكررة المستقلة:

دائماً فى تجارب برنوللى المتكررة المستقلة نهتم بعدد مرات النجاح — والحصول على مرات نجاح عددها  $k$  معناه أن نتيجة المحاولات التى عددها  $n$  يكون منها  $k$  مرة نجاح (نعبر عنها بـ  $k$  حرف  $s$ ) و  $(n - k)$  مرة فشل (نعبر عنها بـ  $(n - k)$  حرف  $f$ ) — وعدد مرات النجاح  $k$  قد يكون  $n, 2, 1, 0, k$ . ولكن  $k$  مرة نجاح فى  $n$  من المحاولات المستقلة يمكن أن يحدث بعدة طرق — إحدى هذه الطرق أن تكون المحاولات الأولى التى عددها  $k$  كلها نجاح والمحاولات التالية التى عددها  $(n - k)$  كلها فشل وهذه الحالة احتمال حدوثها يساوى  $P^k Q^{(n-k)}$  كما أوضحنا فى العلاقة (1. 26. 2) السابقة — ولكن الطرق

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

المختلفة السّتي قد يحدث بها  $k$  مرة نجاح و  $(n - k)$  مرة فشل تساوى تماماً عدد طرق اختيار  $k$  من الأحرف من بين  $n$  من هذه الأحرف وهذا يساوى  $\binom{n}{k}$  طريقة مختلفة واحتمال كل منها يساوى  $P^k q^{(n-k)}$  وبالتالي يكون احتمال الحصول على  $k$  مرة نجاح في  $n$  محاولة يساوى  $\binom{n}{k} P^k q^{(n-k)}$ . وعلى ذلك يمكن تقديم القانون الاحتمالى ذو الحدين بالتعريف التالى:

**تعريف (1-26-1) القانون الاحتمالى ذو الحدين:**

احتمال الحصول على  $k$  مرة نجاح في  $n$  محاولات برنوللى المتكررة المستقلة إذا كان احتمال النجاح في كل محاولة هو  $P$  واحتمال الفشل هو  $q = 1 - P$  :

$$(1.26.3): b(k; n, p) = \binom{n}{k} P^k q^{(n-k)}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

من القانون السابق يكون احتمال عدم الحصول على أى مرة نجاح يساوى  $q^n$  واحتمال الحصول على مرة نجاح واحدة على الأقل يساوى  $(1 - q^n)$ . والقانون الاحتمالى ذو الحدين يكتسب تسميته من القانون الرياضى ذو الحدين حيث نجد أن الاحتمال  $b(k; n, p)$  هو الحد العام فى مفكوك ذو الحدين  $[P + q]^n$  - لذلك يكون من الواضح أن:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k q^{(n-k)} = [P + q]^n = 1$$

والقانون الاحتمالى ذو الحدين من أهم القوانين الاحتمالية المستخدمة فى مجال نظرية الاحتمالات وفى كثير من التطبيقات العملية، ولأهمية هذا القانون تم عمل جداول إحصائية تبين قيمة الاحتمال  $b(k; n, p)$  لبعض قيم  $k, n, p$  المختارة المناسبة لكثير من التطبيقات العملية. ويوجد فى نهاية الكتاب جدول مختصر لقيم  $b(k; n, p)$  لبعض قيم  $p$  بين  $p = 0.01$  حتى  $p = 0.5$  وقيم  $n = 2, 3, 4, \dots, 10$  هو الجدول رقم (1) بنهاية الجزء الثانى ويجب ملاحظة أن قيم  $b(k; n, p)$  عندما  $p = 0.5$  يمكن الحصول عليها من نفس الجدول باستخدام العلاقة:

$$(1.26.4): b(k; n, p) = b(n - k; n, 1 - p)$$

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها من القانون (1.26.3) باستخدام العلاقة التالية:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مثال (1 - 26 - 1): إذا افترضنا أن نسبة الذكور ونسبة الإناث متساوية في مجموعة من الأسر فما هو احتمال أن تجد 3 أولاد و3 بنات في أسرة بها 6 أطفال؟

(الحل)

لو رمزنا للولد بالرمز b والبنات بالرمز g يكون

$$P(g) = P(b) = \frac{1}{2}$$

ويكون المطلوب هو احتمال الحصول على 3 مرات نجاح (3 ذكور مثلاً) عند تكرار تجربة ذات حدين مرات عددها  $n = 6$  علماً بأن  $P = \frac{1}{2}$  هو:

$$b(3; 6, \frac{1}{2}) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}$$

مثال: (1 - 26 - 2): في سلسلة من الأعداد العشوائية يتم اختيار عدد من الأعداد 0, 1, 2, ..., 9 في كل مرة. كم نتوقع أن يكون طول هذه السلسلة الذي يجعل احتمال ظهور العدد 7 يساوي  $\frac{9}{10}$  على الأقل؟

(الحل)

الأعداد من 0 حتى 9 عددهم 10 واحتمال اختيار أى عدد منها يساوى  $\frac{1}{10}$ .

في كل محاولة اختيار لو اعتبرنا ظهور العدد 7 يمثل النجاح ونرمز له بالرمز (s) وعدم ظهور السبعة يمثل الفشل (f) إذن سلسلة المحاولات تمثل سلسلة من تجارب برنوللى المستقلة التى لاحتماى النجاح فيها  $P = \frac{1}{10}$  واحتمال الفشل  $Q = \frac{9}{10}$  وعدد المحاولات n وبذلك يكون احتمال ظهور العدد 7 فى هذه السلسلة مرات عددها k هو:

$$P(k) = \binom{n}{k} (0.1)^k (0.9)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

والاحتمال المطلوب هو: كم عدد المحاولات n التى تجعل احتمال ظهور العدد  $0.9 \leq 7$  واحتمال ظهور العدد 7 هو احتمال أن يظهر العدد 7 مرة واحدة على الأقل أى المطلوب هو:

ح (ظهور العدد 7 مرة واحدة على الأقل)

$$= 1 - \text{ح (عدم ظهور العدد 7 فى المحاولات التى عددها n)}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

وبتطبيق العلاقة (1: 25. 4) نجد أن:

$$\begin{aligned} \text{ح (ظهور العدد 7 مرة واحدة على الأقل)} \\ = 1 - (0.9)^n \end{aligned}$$

إن المطلوب هو قيمة  $n$  التي تجعل:

$$\begin{aligned} 1 - (0.9)^n &\geq 0.9 \\ 0.1 &\geq (0.9)^n \end{aligned}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\begin{aligned} -1 &\geq n(-0.04575491) \\ n &\geq \frac{1}{0.04575491} \\ n &\geq 22 \end{aligned}$$

إن نتوقع أن يكون طول هذه السلسلة كبير من 22 عدد لكي يكون احتمال ظهور العدد 7 يساوي 0.9 على الأقل.

مثال (1 - 26 - 3): إذا كان احتمال إصابة هدف ما يساوي  $\frac{1}{5}$  - فإذا أطلق على هذا الهدف عشرة طلقات مستقلة فأوجد:

(أ) احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل.

(ب) احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل إذا كان معلوما لدينا أنه تم إصابته مرة واحدة على الأقل.

(الحل)

هذا المثال يتبع توزيع ذو الحدين عندما تكون:

$$P = \frac{1}{5}, \quad q = \frac{4}{5}, \quad n = 10$$



## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(أ) ح (الإصابة مرتين على الأقل) =

1 - ح (عدم الإصابة) - ح (الإصابة مرة واحدة)

$$\begin{aligned}
 &= 1 - P_0 - P_1 \\
 &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^9 \\
 &= 0.6242
 \end{aligned}$$

(ب) نفرض أن:

الحدث E: إصابة الهدف مرتين على الأقل

الحدث A: إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل

إذن  $E \subset A$  و  $E \cap A = E$

والمطلوب حساب الاحتمال  $P(E|A)$

$$\therefore P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E)}{P(A)}$$

ومن (أ) نعلم أن:  $P(E) = 0.6242$

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \\
 &= 1 - 0.107374 \\
 &= 0.893
 \end{aligned}$$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(E|A) = \frac{0.6242}{0.893} = 0.6993$$

(27 - 2) المحاولات المتكررة غير المستقلة Repeated Dependent Trials :

القانون الاحتمالي الهلبرجيومتری (الهندسي الزائد) The Hypergeometric

:Probability Law

يمكن القول أن القانون الاحتمالي ذو الحدين السابق تقديمه بالعلاقة (3. 26. 1).

يطبق في حالة سحب عينة حجمها n مفردة مع الإحلال من كيس يحتوي على M مفردة

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

منها  $m$  مفردة معينة (أو لها خاصية معينة) – ويعطى احتمال أن تشمل هذه العينة على  $k$  مفردة معينة أو  $k$  مرة نجاح إذا اعتبرنا أن الحصول على المفردة المعنية نجاح وعدم الحصول عليها فشل. ونقدم الآن الحالة التي يكون فيها سحب العينة بدون إحلال – أى أن المفردة المسحوبة لا تعاد إلى الكيس قبل سحب المفردة التالية – وهذه الحالة يطبق فيها قانون احتمالي يختلف عن القانون ذو الحدين – هذا القانون نسميه بالقانون الاحتمالي الهابيرجيومتري – ونقدمه فيما يلي:

نفرض أن لدينا كيس به  $M$  مفردة منها  $m$  مفردة معينة (أو لها خاصية معينة) – حيث  $m = PM$  و  $0 \leq P \leq 1$  – وأن التجربة العشوائية تتكون من  $n$  محاولة متكررة كل محاولة عبارة عن سحب مفردة من الكيس بدون إحلال – أى أن المفردة المسحوبة لا تعاد إلى الكيس قبل سحب المفردة التالية – وهذه المحاولات هي التي نسميها بالمحاولات المتكررة غير المستقلة. والمطلوب هو إيجاد احتمال أن تشمل العينة التي حجمها  $n$  مفردة على  $k$  مفردة معينة. في هذه الحالة نجد أن فراغ العينة  $S$  للتجربة العشوائية المركبة المكونة من المحاولات التي عددها  $n$  يمكن إيجاده باستخدام العلاقة (1. 16. 1) حيث نجد أن حجم فراغ العينة في هذه الحالة هو:

$$N(S) = M_{(n)} = M (M-1) \dots (M-n+1)$$

حالة متماثلة. وإذا اعتبرنا أن الحصول على مفردة من هذه المفردات المعنية يعتبر نجاح، فيمكن طبقاً للعلاقة (1. 16. 1) إثبات أن عدد الحالات الموافقة للحصول على  $k$  مرة نجاح من بين المحاولات التي عددها  $n$  إذا كانت مرات النجاح هذه ذات ترتيب معين يساوي:

$$m_{(k)} \cdot (M-m)_{(n-k)} = m(m-1) \dots (m-k+1) \times (M-m)(M-m-1) \dots (M-m-n+k+1)$$

وبذلك يكون عدد الحالات الموافقة للحصول على  $k$  مرة نجاح من بين المحاولات المتكررة غير المستقلة التي عددها  $n$  – دون اشتراط ترتيب معين – هو:

$$\binom{n}{k} m_{(k)} (M-m)_{(n-k)}$$

ويكون احتمال الحصول على مرات نجاح عددها  $k$  مرة من بين  $n$  محاولة غير مستقلة (نتيجة كل منها نجاح أو فشل) طبقاً للعلاقة (1. 14. 2) هو عدد الحالات الموافقة للحدث مقسوماً على عدد الحالات الممكنة للتجربة المركبة – وهو ما نعبّر عنه رمزياً كما يلي:

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

$$(1.27.1): h(k; M, m, n) = \frac{1}{M_{(n)}} \cdot \binom{n}{k} m_{(k)} (M-m)_{(n-k)}$$

والعلاقة السابقة يمكن وضعها في الصورة التالية:

$$h(k; M, m, n) = \frac{1}{\binom{M}{n}} \binom{m}{k} \binom{M-m}{n-k}$$

وبذلك يمكن تقديم القانون الهائبرجيومتري في التعريف التالي:

القانون الاحتمالي الهائبرجيومتري (الهنسي للزائد):

تعريف (1-27-1):

احتمال الحصول على  $k$  مفردة معينة ( $k$  مرة نجاح) في  $n$  من المحاولات غير المستقلة ( $k \leq n$ ) التي تكون نتيجة كل محاولة منها عبارة عن سحب مفردة من كيس به  $M$  مفردة منها  $m$  مفردة معينة — (حيث  $0 \leq P \leq 1$  و  $m = PM$ )  
عندما يكون السحب بدون إحلال هو:

$$(1.27.2): h(k; M, m, n) = \frac{1}{\binom{M}{n}} \binom{m}{k} \binom{M-m}{n-k}$$

$$, 0 \leq k \leq \min(n, m); ; 0 \leq n-k \leq M-m$$

مثال (1-27-1): كيس يحتوي على 6 كرات متشابهة في كل شيء عدا اللون منها 4 كرات بيضاء والباقي من لون آخر — عند سحب عينة من الكيس مكونة من 3 كرات — بدون إعادة — ما هو احتمال أن تشمل هذه العينة على كرتين بيضاء؟

(الحل)

طبقاً للقانون الهائبرجيومتري يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$h(2; 6, 4, 3) = \frac{1}{\binom{6}{3}} \binom{4}{2} \binom{6-4}{3-2} = \frac{3!}{6! 3!} \cdot \frac{4!}{2! 2!} \cdot 2 = \frac{1}{60}$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

### (1 - 28) القنون الاحتمالي ذو الحدين كتقريب للقنون الهايبرجوميترى:

كما سبق يتضح أن القنون الاحتمالي الهايبرجوميترى المعطى بالعلاقة (1. 27. 2) مشتق أصلاً من العلاقة (1. 27. 1) وبالتالي يمكن الرجوع إلى العلاقة (1. 27. 1) ووضعها في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} h(k; M, m, n) &= \binom{n}{k} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{M(M-1)\dots(M-k+1)} \\ &\times \frac{(M-m)(M-m-1)\dots(M-m-n+k+1)}{(M-k)(M-k-1)\dots(M-n+1)} \\ &= \binom{n}{k} \frac{m^k (1 - \frac{1}{M}) (1 - \frac{2}{M}) \dots (1 - \frac{k-1}{M})}{M^n (1 - \frac{1}{M}) (1 - \frac{2}{M}) \dots (1 - \frac{k-1}{M})} \\ &\times \frac{(M-m)^{(n-k)} (1 - \frac{1}{M-m}) (1 - \frac{2}{M-m}) \dots (1 - \frac{n-k-1}{M-m})}{(1 - \frac{k}{M-m}) (1 - \frac{k+1}{M-m}) \dots (1 - \frac{n-1}{M-m})} \end{aligned}$$

$$q = \frac{M-m}{M} = 1-P, \quad P = \frac{m}{M} \text{ ويوضع}$$

يمكن وضع العلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} (1. 28. 1): h(k; M, m, n) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &\times \left[ \frac{(1 - \frac{1}{M}) \dots (1 - \frac{k-1}{M}) (1 - \frac{1}{M-m}) \dots (1 - \frac{n-k-1}{M-m})}{(1 - \frac{1}{M}) (1 - \frac{2}{M}) \dots (1 - \frac{k-1}{M}) (1 - \frac{k}{M-m}) \dots (1 - \frac{n-1}{M-m})} \right] \end{aligned}$$

$$P = \frac{m}{M}, \quad q = 1-P \text{ حيث}$$

فإذا كانت الكميات  $\frac{n}{M}, \frac{n-k}{M-m}, \frac{k}{m}$  كلها كميات صغيرة فإن الكمية الموجودة

داخل القوس المربع في العلاقة السابقة تؤول إلى الواحد الصحيح ويصبح الاحتمال  $h(k; M, m, n)$  الهايبرجوميترى هو نفسه الاحتمال  $b(k; n, p)$  ذات الحدين، وبذلك يمكن القول أنه إذا تحقق للشرط التالي:

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1. 28. 2):

$$\left[ \text{إذا كانت الكميات } \frac{n}{M}, \frac{n-k}{M-m}, \frac{k}{m} \text{ كلها كميات صغيرة (لتكن أقل من 0.1 تقريباً)} \right]$$

يكون القانون الاحتمالي الهابيرجيومتري المعطى بالعلاقة (1. 27. 2) يساوى تقريباً القانون الاحتمالي ذو الحدين المعطى بالعلاقة (1. 26. 3) أى أن:

$$(1. 28. 3): h(k; M, m, n) \approx b(k; n, p).$$

$$\text{حيث } P = \frac{m}{M}.$$

والتقريب المعطى بالعلاقة السابقة يمكننا من استخدام جداول التوزيع ذو الحدين فى حساب الاحتمالات الخاصة بالقانون الهابيرجيومتري فى حالة السحب بدون إعادة أى فى حالة التجارب المتكررة غير المستقلة.

مثال (1 – 28 – 1): كيس به 30 كرة متشابهة فى كل شيء عدا اللون – منها 8 كرات بيضاوتان والكرات الباقية كلها سوداء. عند سحب ثلاث كرات من الكيس ما هو احتمال أن تكون بينها كرة واحدة بيضاء؟

أولاً: إذا كان السحب مع الإعادة.

ثانياً: إذا كان السحب بدون إعادة.

ثالثاً: أوجد الفرق بين الاحتمالين فى أولاً وثانياً – وهل ترى من ذلك أن استخدام القانون ذو الحدين كتقريب للقانون الهابيرجيومتري فى هذه الحالة يكون ذو جدوى؟

(الحل)

أولاً: فى حالة السحب مع الإعادة نطبق القانون ذو الحدين المعطى بالعلاقة (1. 26. 3) حيث:

$$P = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}, \quad q = \frac{14}{15}, \quad n = 3, \quad k = 1$$

فيذا كان الحدث E هو: أن تكون كرة واحدة بيضاء.

$$\therefore P(E) = b(1; 3, \frac{1}{15})$$

$$= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{15}\right) \left(\frac{14}{15}\right)^2 = 0.1742$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ثانياً: في حالة السحب بدون إعادة تطبيق القانون الهابيرجيومتري المعطى بالعلاقة (1. 27. 2) حيث نجد أن:

$$P(E) = h(1; 30, 2, 3)$$

$$P(E) = \binom{2}{1} \binom{28}{2} / \binom{30}{3} = 0.1862$$

ثالثاً: الفرق بين الاحتمالين في أولاً وثانياً يساوي تقريباً 0.01 وبقسمة هذا الفرق على الاحتمال  $P(E)$  المحسوب باستخدام القانون الهابيرجيومتري في ثانياً نجد أن هذه النسبة تساوي تقريباً 0.05.

أى أننا عندما نستخدم القانون ذو الحدين كتقريب للقانون الهابيرجيومتري فنكون معرضين لخطأ يعادل تقريباً 5% من قيمة الاحتمال نفسه – وهذا الخطأ يمكن التغاضي عنه في مقابل سهولة حساب الاحتمال وخاصة في الحالات التى يكون فيها حساب الاحتمال الهابيرجيومتري صعب في حين أن جداول القانون ذو الحدين تقدم لنا النتيجة في سهولة ويسر.

### (1 – 29) القانون الاحتمالى البواسونى Poisson Probability Law:

(1 – 29 – 1): هو قانون احتمالى اقّمه العالم الفرنسى الشهير 'بواسون' وسمى باسمه ويمكن تعريفه كما يلي:

تعريف (1 – 29 – 1): (القانون الاحتمالى البواسونى)

أى تجربة عشوائية يتكون فيها فراغ العينة  $S$  من مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة:

$$S = \{0, 1, 2, \dots, k, \dots\}$$

ومعرف عليها دالة الاحتمال  $P(.)$  بالصيغة التالية:

$$(1. 29. 1): P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad ; \quad \lambda > 0$$

حيث:

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

يقال أن هذه التجربة تتبع قانون بواسون الاحتمالى بمعلمه  $\lambda$ .

## الفصل الأول — نظرية الاحتمالات

### (1 - 29 - 2) القانون البواسوني كتقريب للقانون ذات الحدين:

في كثير من الحالات التطبيقية التي نتعامل فيها مع تجارب برنوللي المتكررة المستقلة قد تكون عدد المحاولات  $n$  كبيرة إلى حد ما واحتمال النجاح  $P$  صغيراً بحيث تكون الكمية  $p$  كمية محدودة. نرمز لهذه الكمية بالرمز  $\lambda$ :

$$(1. 29. 2): np = \lambda$$

حيث  $\lambda > 0$  (لأن كل من  $n$ ،  $p$  كمية موجبة)

والكمية  $\lambda$  كمية محدودة بالرغم من أن  $n$  كبيرة و  $p$  صغيرة ونعلم أنه عندما تكون  $n$  كبيرة،  $p$  صغيرة يكون حساب الاحتمال ذو الحدين  $b(k; n, p)$  مرهقاً جداً — لذلك نقدم التقريب التالي الذي قدمه العالم الشهير بواسون الذي أثبت أنه عندما تكون  $n$  كبيرة و  $p$  صغيرة بحيث تكون  $np$  كمية محدودة يمكن استخدام القانون البواسوني كتقريب للقانون الاحتمالي ذو الحدين إذ أنه في مثل هذه الحالة يمكن إثبات أن العلاقة التالية صحيحة:

$$(1. 29. 3): b(k; n, p) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

حيث  $\lambda = np$  وذلك لجميع قيم  $k = 0, 1, 2, \dots$  و  $b(k; n, p)$  هو القانون الاحتمالي ذو الحدين المعطى بالعلاقة (1. 26. 3).

ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

بوضع  $np = \lambda$  (أي  $p = \frac{\lambda}{n}$ ) في القانون ذو الحدين (1. 26. 3) نجد أن:

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

وبكتابة مفكوك  $\binom{n}{k}$  وأخذ نهاية طرفي العلاقة السابقة عندما  $n \rightarrow \infty$  (مع اعتبار أن  $\lambda$

$np$  = تظل كمية محدودة وذلك لصغر  $p$ ) يمكن الوصول إلى العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b(k; n, p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &\quad \times \frac{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{n^k} \end{aligned}$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

وبما أن:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b(k; n, p) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\end{aligned}$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (1. 29. 3).

والتقريب السابق يمكن استخدامه عملياً إذا كانت  $p \leq 0.1$ .

مثال (1 – 29 – 1): عند إلقاء 6 زهرات نرد متزنة مرة واحدة أوجد:

- احتمال الحصول على الآس مرة واحدة على الأقل.
- احتمال الحصول على الآس مرة واحدة بالضبط.
- احتمال الحصول على الآس مرتين بالضبط.
- قارن الاحتمالات في أ، ب، ج بتقريب بولسون لكل منها.

### (الحل)

التجربة تمثل 6 محاولات مستقلة من محاولات برنولي – كل محاولة تمثلها زهرة نرد – وكل محاولة لها إحدى نتيجتين، نجاح أو فشل، النجاح هو الحصول على الآس ولنرمز لها بالرمز  $s$  والفشل هو عدم الحصول على الآس ولنرمز له بالرمز  $f$  وبالتالي يكون احتمال النجاح هو  $P(\{s\}) = \frac{1}{6}$  واحتمال الفشل هو  $P(\{f\}) = \frac{5}{6}$ ، وعدد المحاولات  $n = 6$ .

(أ) نفرض أن الحدث  $A$  هو: الحصول على الآس مرة واحدة على الأقل.

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.6651$$

(ب) نفرض أن الحدث  $B$  هو: الحصول على الآس مرة واحدة بالضبط

$$\therefore P(B) = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.40188$$



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(جـ) نفرض أن الحدث C هو: الحصول على الأس مرتين بالضبط

$$\therefore P(C) = \left(\frac{6}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^4 = 0.2009$$

(د) تقريبات بواسون للاحتمالات السابقة نحصل عليها من العلاقة (3) (29) (1). وذلك كما يلي:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - b(0; n, p)$$

حيث  $b(0; n, p)$  هي احتمال عدم الحصول على الأس طبقاً لقانون ذى الحدين.

$$\lambda = np = 6\left(\frac{1}{6}\right) = 1$$

$$\therefore P(A) \simeq 1 - e^{-1} = 0.6321$$

كذلك:

$$P(B) \simeq b(1; n, p) = e^{-1} = 0.3679$$

و

$$P(C) \simeq b(2; n, p) = \frac{e^{-1}}{2} = 0.1839$$

ويمكن إجراء المقارنة كما يلي:

P(A)	P(B)	P(C)	
0.6651	0.40188	0.2009	القيمة الحقيقية
0.6321	0.3679	0.1839	تقريب بواسون

## (1 – 30) التجارب المتكررة المستقلة المتعددة النتائج The Multinomial

### :Repeated Independent Trials

تكلمنا فى البند (1 – 26 – 1) عن التجارب (أو المحاولات) المتكررة المستقلة التى من نوع محاولات برنولى وهى تتميز بأن كل محاولة لها إحدى ناتجين – لذلك تسمى محاولة أو تجربة ذات حدين – ولكن كثيراً ما تكون المحاولات أو التجارب المتكررة المستقلة كل تجربة لها أكثر من وجهين أو أكثر من ناتجين – وتسمى التجربة فى هذه الحالة بالتجربة متعددة الأوجه أو المتعددة النواتج – مثال ذلك إذا كانت فى

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

المحاولات المنكررة المستقلة كل محاولة عبارة عن إلقاء زهرة نرد متزنة – هنا تكون كل محاولة لها 6 نتائج ممكنة أى تعتبر محاولة ذات ستة أوجه – وعند تكرار هذه المحاولة  $n$  مرة يكون اهتمامنا منصب على معرفة احتمال ظهور الوجه الأول  $k_1$  مرة والوجه الثانى  $k_2$  مرة ... والوجه السادس  $k_6$  مرة بحيث يكون  $k_1 + k_2 + \dots + k_6 = n$  والقانون العام الذى يمكن به حساب مثل هذا الاحتمال يسمى بالقانون الاحتمالى المتعدد الحدود والذى نعلمه فيما يلى:

### (1 – 30 – 1) القانون الاحتمالى المتعدد الحدود The Multinomial Probability Law

نفرض أن لدينا تجربة عشوائية تتكون من عدة محاولات متكررة مستقلة عددها  $n$  محاولة وكل محاولة لها نتيجة واحدة فقط من  $r$  من النتائج الممكنة الشاملة المتنافية (أى ذات  $r$  وجهاً) حيث  $r$  عدد صحيح أكبر من 2 وبذلك يكون فراغ العينة لأى محاولة منفردة من هذه المحاولات (إذا رمزنا للأوجه المختلفة بالرموز  $s_1, \dots, s_r$ ) هو:

$$T = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$$

وفى أى محاولة نفرض أن احتمال أن تكون نتيجة المحاولة هى الوجه  $s_k$  هو  $P_k$  حيث  $P_1 + P_2 + \dots + P_r = 1$  أى أنه يوجد  $r$  من الأعداد الحقيقية هى  $P_1, P_2, \dots, P_r$  تحقق العلاقة التالية:

$$(1.30.1): \begin{cases} P_1 + P_2 + \dots + P_r = 1 \\ P_k = P\{[s_k]\} \quad , \quad 0 < P_k < 1 \\ k = 1, 2, 3, \dots, r \end{cases}$$

إذا كانت  $S$  هى فراغ العينة للتجربة المكونة من  $n$  محاولة مستقلة من المحاولات السابقة التى نتيجة كل منها  $T$  فإن  $S$  تكون هى المجموعة التالية:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = s_1 \text{ or } s_2 \text{ or } \dots \text{ or } s_r\}$$

لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$

أى أن  $S$  تتكون من  $r^n$  حدث بسيط – فإذا كان عدد مرات ظهور الأوجه  $s_1, s_2, \dots, s_r$  فى الحدث البسيط المفرد  $(x_1, \dots, x_n)$  هو  $k_1, k_2, \dots, k_r$  على الترتيب حيث  $k_1 + \dots + k_r = n$  فإن احتمال تحقق مثل هذا الحدث يكون:

$$P\{[x_1, \dots, x_n]\} = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

ولكن عدد الأحداث البسيطة التى يظهر فيها الوجه  $s_1$  مرات عددها  $k_1$  مرة و  $\dots$  والوجه  $s_r$  مرات عددها  $k_r$  مرة تساوى تماماً عدد طرق تقسيم  $n$  من الأشياء إلى  $r$  من المجموعات – تحتوى المجموعة الأولى على  $k_1$  شيئاً متشابهها من هذه الأشياء والثانية

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

على  $k_2$  شيئاً متشابهاً من الأشياء وهكذا حتى المجموعة  $r$  تحتوى على  $k_r$  شيئاً متشابهاً من هذه الأشياء وبحيث أن  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$  — وعدد طرق التقسيم هذه تساوى:

$$(1.30.2): \binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

وبالتالى يكون احتمال الحصول على الوجه الأول  $k_1$  مرة والوجه الثانى  $k_2$  مرة وهكذا حتى الوجه  $r$  مرات عددها  $k_r$  مرة يساوى:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

وبناء على ذلك يمكن تقديم القانون الاحتمالى المتعدد الحدود بالتعريف التالى:

**تعريف (1 - 30 - 1) القانون الاحتمالى المتعدد الحدود:**

فى  $n$  من المحاولات العشوائية المتكررة المستقلة إذا كانت نتيجة كل محاولة عبارة عن وجه واحد من الأوجه المتنافسة  $s_1, \dots, s_r$  التى عددها  $r$  وجهاً — فإن احتمال ظهور الوجه الأول ( $s_1$ )  $k_1$  مرة والوجه الثانى ( $s_2$ )  $k_2$  مرة و  $\dots$  والوجه الرالى ( $s_r$ )  $k_r$  مرة — حيث  $k_1, \dots, k_r$  أعداد صحيحة غير سالبة تحقق للمعادلة

$$k_1 + \dots + k_r = n$$

هو:

$$(1.30.3): P(k_1, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} P_1^{k_1} \dots P_r^{k_r}$$

حيث  $P_j$  هو احتمال ظهور الوجه  $s_j$  فى أى محاولة منفردة و  $P_1 + \dots + P_r = 1$  والقانون السابق يسمى بالقانون الاحتمالى المتعدد الحدود لأنه هو نفسه الحد العام

فى المفكوك المتعدد الحدود  $[P_1 + \dots + P_r]^n$  على شكل حدود فى  $P_1, P_2, \dots, P_r$ .

عندما  $r = 2$  يختزل القانون السابق إلى القانون الاحتمالى ذو الحدين الذى فيه  $n - k = k_2$  ،  $k = k_1$  و  $P = P_1$  ،  $q = P_2$ .

ذكرنا أن العلاقة (1.30.3) هى الحد العام فى مفكوك  $[P_1 + \dots + P_r]^n$  وهذا يوصلنا إلى العلاقة الهامة التالية الخاصة بالقانون الاحتمالى المتعدد الحدود المعطى بالعلاقة (1.30.3) والتى توضح أن:

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

$$(1.30.4): \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \dots \sum_{k_r=0}^{(n-k_1-\dots-k_{r-1})} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \\ = [p_1 + \dots + p_r]^n = 1$$

حيث  $k_1, \dots, k_r$  أعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة  $k_1 + \dots + k_r = n$

مثال (1 - 30 - 1): عند إلقاء إحدى وعشرون زهرة نرد متزنة مرة واحدة - ما هو احتمال الحصول على الوجه الأول مرة واحدة والوجه الثاني مرتين والثالث ثلاث مرات والرابع أربع مرات والخامس خمسة مرات والوجه السادس ستة مرات؟

(الحل)

نرمز للوجه الستة بالرموز  $s_1, \dots, s_6$  حيث احتمال كل وجه منها في كل رمية لزهرة نرد منفردة يساوي  $(\frac{1}{6})$  أى أن:

$$P_1 = P_2 = \dots = P_6 = \frac{1}{6}$$

وطبقاً للقانون الاحتمالى المتعدد الحدود (1.30.3) يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(1,2,3,\dots,6) = \frac{(21)!}{1! 2! \dots 6!} (\frac{1}{6}) (\frac{1}{6})^2 \dots (\frac{1}{6})^6 \\ = 0.0000936$$

ملاحظة (1 - 30 - 1):

يوجد تطبيق إحصائى للقانون الاحتمالى المتعدد الحدود - يتمثل فى حالة وجود مجتمع محدود مكون من  $N$  مفردة ومقسم إلى  $r$  من الطبقات المختلفة  $E_1, \dots, E_r$  حيث تتكون الطبقة  $E_j$  من  $N P_j$  مفردة لجميع قسم  $r, 2, 1, J$  حيث  $N P_1 + \dots + N P_r = N$  (أى أن  $P_1 + \dots + P_r = 1$ ) - عند سحب عينة حجمها  $n$  مفردة (مع الإعادة) من هذا المجتمع فإن احتمال أن تشتمل هذه العينة على  $k_1$  مفردة من الطبقة الأولى و  $k_2$  مفردة من الطبقة الثانية و  $\dots$  و  $k_r$  مفردة من الطبقة رقم  $r$  حيث  $k_1 + \dots + k_r = n$  يمكن الحصول عليه باستخدام القانون الاحتمالى المتعدد الحدود (1.30.3) حيث أن  $P_j$  هو احتمال أن مفردة مسحوبة من المجتمع تكون من الطبقة  $E_j$  هو:

$$P_j = \frac{N P_j}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ملاحظة (1 - 30 - 2): عندما تكون  $n$  كبيرة و  $p_j = \lambda_j$  كمية محدودة لجميع قيم  $j = 1, 2, \dots, r-1$  يمكن إثبات أن القانون الاحتمالي المتعدد الحدود المعطى بالعلاقة (1. 30. 3) يساوى تقريباً

$$(1. 30. 5): e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_{r-1})} \frac{\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_{r-1}^{k_{r-1}}}{k_1! k_2! \dots k_{r-1}!}$$

كما يمكن إثبات أن مجموع حدود القانون السابق يساوى الواحد الصحيح.

والقانون السابق يسمى بتوزيع بواسون المتعدد. **Multiple Poisson Distribution.** أى أنه يمكن استخدام توزيع بواسون المتعدد كتقريب للقانون الاحتمالي المتعدد الحدود. انظر تمرين (1 - 82).

بعد تقديم التعريف الحديث للاحتمال – التعريف (1 - 13 - 1) – ذكرنا أنه لا يحدد كيفية حساب احتمال وقوع حدث معين ولكن من خصائص هذا التعريف ومن طبيعة التجربة العشوائية محل الدراسة يمكن حساب احتمال وقوع الحدث، وأوضحنا ذلك فى البند (1 - 14) بالنسبة للتجارب العشوائية التى يكون فيها فراغ العينة محدود سواء كان مكوناً من أحداث بسيطة متماثلة أو غير متماثلة – ونحاول الآن توضيح ذلك فى حالة فراغ العينة غير المحدود سواء كان قابلاً للعد أو غير قابل للعد.

(1 - 31) فراغ العينة غير المحدود (اللاتهائى) **Infinite Sample Space:**

(1 - 31 - 1) فراغ العينة غير المحدود (اللاتهائى) المكون من مجموعة لانهائية

**قابلة للعد Infinite Countable Sample Space:**

نفرض أن لدينا فراغ احتمالى  $(S, \beta, P(\cdot))$  حيث فراغ العينة  $S$  عبارة عن مجموعة مكونة من عدد لانهائى (قابل للعد) من العناصر

$$S = \{e_1, e_2, \dots\}$$

ودالة الاحتمال  $P(\cdot)$  تحدد الاحتمال  $P(\{e_j\}) = P_j$  لكل عنصر من عناصر الفراغ  $S$  لجميع قيم  $j = 1, 2, \dots$  والاحتمالات  $P_1, P_2, \dots$  ليس من الضروري أن تكون كلها متساوية أى أن فراغ العينة مكون من عناصر غير متماثلة – كما ن:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\{e_j\}) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \{e_j\}\right) = P(S) = 1$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

أى أن:

$$\sum_j P_j = 1$$

كما أنه لأي مجموعة جزئية من فراغ العينة  $S$  ولتكن المجموعة  $A$  التى تكون عنصراً من عناصر العائلة  $\beta$  يمكن تحديد الاحتمال  $P(A)$  باستخدام العلاقة التالية:

$$(1.31.1): P(A) = \sum_{\{e_j \in A\}} P_j$$

حيث أن المجموع  $\Sigma$  مأخوذ على جميع قيم  $j$  التى تحقق العلاقة  $e_j \in A$  ويمكن بذلك إثبات أن الدالة  $P(\cdot)$  تحقق المسلمات الثلاثة للتعريف الحديث للاحتمال. ويجب أن نتذكر دائماً أن كل المجموعات الجزئية من أى مجموعة قابلة للعد تعتبر مجموعة بورالية.

### The Negative Binomial (1 - 31 - 1) القانون الاحتمالى ذو الحدين السالب :Probability Law

إذا كان لدينا تجربة عشوائية تتمثل فى إجراء سلسلة من محاولات برنوللى المستقلة كل محاولة نتیجتها إما نجاح (s) باحتمال  $P$  أو فشل (f) باحتمال  $q = 1 - P$ . فإذا افترضنا أن هذه المحاولات يستمر تكرارها حتى نحصل على مرات نجاح عددها  $r$ . أى أن آخر محاولة تكون هى للنجاح رقم  $r$ . فى هذه الحالة لن يقل عدد مرات إجراء التجربة عن  $r$  مرة وذلك إذا كانت المحاولات الأولى التى عددها  $r$  كلها نجاح أى لا يوجد خلالها أى مرة فشل – ولكن لو حدث مرة فشل واحدة قبل النجاح رقم  $r$  يكون عدد مرات إجراء التجربة  $(r + 1)$  مرة – ولو حدث مرتين فشل سيكون عدد مرات إجراء التجربة  $(r + 2)$  مرة وهكذا لسو حدث  $x$  مرة فشل سيكون عدد مرات إجراء التجربة  $(x + r)$  مرة – وعلى ذلك فإن فى هذه التجربة يكون عدد مرات النجاح عدد ثابت يساوى  $r$  ولكن عدد مرات الفشل  $x$  متغير يأخذ للقيم  $x = 0, 1, 2, \dots$

فإذا كان عدد مرات الفشل  $x$  مرة يكون عدد مرات إجراء التجربة  $(x + r)$  مرة وتكون المرة الأخيرة التى رقمها  $(x + r)$  نجاح واحتمالها  $P$  والمرات التى قبلها التى عددها  $(x + r - 1)$  مرة يكون منها  $(r - 1)$  مرة نجاح و  $x$  مرة فشل واحتمال النجاح فى كل منها  $P$  واحتمال الفشل  $q$  – وعلى ذلك يمكن باستخدام القانون الاحتمالى ذو الحدين (1.26.3) إثبات أن احتمال الحصول على  $(r - 1)$  مرة نجاح و  $x$  مرة فشل فى المرات التى عددها  $(x + r - 1)$  هو  $\binom{x+r-1}{r-1} P^{r-1} q^x$  وعلى ذلك يكون احتمال الحصول

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

على  $r$  مرة نجاح و  $x$  مرة فشل في جميع مرات إجراء التجربة التي عددها  $(r+x)$  والتي تنتهي بحالة نجاح لاحتمالها  $P$  هو:

$$(1.31.2): P(x; r, p) = \binom{x+r-1}{x} P^r q^x$$

$$x = 0, 1, 2, \dots \quad P > 0, \quad P+q = 1$$

والقانون السابق يسمى بالقانون الاحتمالي ذو الحدين السالب وذلك لأن الاحتمال  $P(x; r, p)$  هو الحد العام في مفكوك ذو الحدين السالب  $(1-q)^{-r}$  مضروباً في  $P^r$  حيث:

$$(1.31.3): a) (1-q)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-r}{j} (-q)^j$$

علماً بأن:

$$b) \binom{-r}{j} = \frac{-r(-r-1)\dots(-r-j+1)}{j!} = (-1)^j \binom{r+j-1}{j}$$

وعلى ذلك يكون:

$$(1.31.4): (1-q)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r+j-1}{j} q^j$$

وبمقارنة العلاقتين (1.31.2) ، (1.31.4) نجد أن  $P(x; r, p)$  هي الحد العام في مفكوك ذو الحدين السالب  $(1-q)^{-r}$  مضروباً في  $P^r$  وذلك بوضع  $x = j$ . ويمكن الآن إثبات أن:

$$(1.31.5): \sum_{x=0}^{\infty} P(x; r, p) = 1$$

وذلك لأنه من العلاقة (1.31.2) نجد أن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x; r, p) = P^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} q^x$$

ومن العلاقة (1.31.4) عندما  $x = j$  نجد أن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x; r, p) = P^r (1-q)^{-r} = P^r P^{-r} = 1.$$

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

ملاحظة (1 - 31 - 1):

في القانون الاحتمالي ذو الحدين السالب  $P(x; r, p)$  المعطى بالعلاقة (1. 31. 2) عندما  $q \rightarrow 0$  و  $r \rightarrow \infty$  بطريقة ما بحيث تظل  $\lambda = r q$  كمية ثابتة، يمكن إثبات أن:

$$(1. 31. 6): P(x; r, p) \approx \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

وهذا يقدم تقريب للاحتمال ذو الحدين السالب باستخدام الاحتمال البواسوني.

(1 - 31 - 1 ب) القانون الاحتمالي الهندسي The Geometric Probability Law

في القانون الاحتمالي ذو الحدين السالب المعطى بالعلاقة (1. 31. 2) عندما يكون من المفروض أن تتوقف التجربة عند أول مرة نجاح (أي أن عدد مرات النجاح  $r = 1$ ) يسمى القانون الاحتمالي ذو الحدين السالب بالقانون الاحتمالي الهندسي ويأخذ الصورة التالية:

$$(1. 31. 7): P(x) = P(x; 1, p) = P q^x$$

$$x = 0, 1, 2, \dots \quad (p > 0, \quad q = 1 - p)$$

ويجب ملاحظة أن:

$$(1. 31. 8): \sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$$

وذلك لأن:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} P q^x = P \sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{P}{1 - q} = \frac{P}{P} = 1$$

ملاحظة (1 - 31 - 1 ب):

ويعتبر القانون الاحتمالي الهندسي نموذجاً لحالة فراغ العينة غير المحدود المكون من مجموعة قابلة للعد من العناصر البسيطة غير المتماثلة – مثله في ذلك تماماً القانون الاحتمالي ذو الحدين السالب وكذلك القانون الاحتمالي البواسوني – وذلك لأنه لا يمكن أن يكون فراغ العينة مكون من مجموعة لا نهائية قابلة للعد من عناصر بسيطة متماثلة لأنه في هذه الحالة يكون احتمال كل عنصر يساوي الواحد الصحيح مقسوماً على عدد العناصر اللانهائي أي أن احتمال كل عنصر يكون مساوياً للصفر تقريباً.



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

مثال (1 - 31 - 1): تجربة عشوائية تتمثل في إلقاء زهرة نرد متزنة عدد من المرات حتى يظهر العدد 6 لأول مرة. ما هو احتمال أن تستمر المحاولات مرتين على الأكثر؟

(الحل)

هذه التجربة تتبع القانون الاحتمالي الهندسي – حيث ظهور العدد 6 هو النجاح واحتماله  $P = \frac{1}{6}$  وعدد مرات النجاح  $r = 1$  والفشل هو عدم ظهور العدد 6 واحتماله  $q = \frac{5}{6}$  وعدد مرات الفشل نرسم له بالرمز  $x$  حيث  $x$  تأخذ القيم  $x = 0, 1, 2, \dots$ .  
من العلاقة (1. 31. 7) للقانون الهندسي نجد أن:

$$P(x) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^x$$

حيث  $x$  هو عدد مرات الفشل  $x = 0, 1, 2, \dots$   
فإذا كان عدد المحاولات يستمر حتى حدوث أول مرة نجاح سيكون عدد المحاولات يساوي  $(x + 1)$  وبذلك يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(x + 1 \leq 2) = P(x \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}$$

## (1 - 32) فراغ العينة غير المحدود (اللاتهائي) المكون من مجموعة لاتهائية غير قابلة للعد: Infinite Uncountable Sample Space:

نقدم فيما يلي حالة التجارب العشوائية التي يكون فراغ العينة في كل منها مكون من مجموعة لاتهائية غير قابلة للعد وذلك عن طريق تقديم قانونين احتماليين أحدهما يسمى القانون الاحتمالي المنتظم ويمكن اعتباره تعميم لحالة فراغ العينة للمحدود المكون من أحداث بسيطة متمثلة الذي سبق تقديمه في البند (1 - 14). والثاني يسمى القانون الاحتمالي الأسى السالب والذي يمكن اعتباره تعميم لحالة فراغ العينة المحدود المكون من أحداث بسيطة غير متمثلة الذي سبق تقديمه في البند (1 - 18).

### (1 - 32 - 1) القانون الاحتمالي المنتظم The Uniform Probability Law:

نفرض أن لدينا تجربة عشوائية – لها فراغ العينة  $S$  الذي يمكن تمثيله بالفترة المحدودة  $a \leq x \leq b$  حيث  $x$  عدد حقيقي و  $a$  و  $b$  عدديان حقيقيان محدودان:

$$S = \{x : a \leq x \leq b \text{ عدد حقيقي}\}$$

## الفصل الأول — نظرية الاحتمالات

إذا كانت دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  تحدد لأي فترة  $B$  عدد حقيقي  $P(B)$  بالعلاقة:

(1. 32. 1):

$$P(B) = \begin{cases} \frac{L(B)}{L(S)} & (BS = B \text{ أى } S) \\ 0 & (BS = \emptyset \text{ أى } S, B) \end{cases}$$

إذا كانت  $B$  مجموعة جزئية من  $S$  (أى  $BS = B$ )  
إذا لم توجد نقطة مشتركة بين  $S, B$  (أى  $BS = \emptyset$ )

حيث  $L(S)$  هو طول الفترة  $S$ ،  $L(B)$  طول الفترة  $B$ .

والدالة  $P(\cdot)$  تحدد قيمة الاحتمال  $P(B)$  لأي فترة  $B$  لذلك فهي صالحة لتحديد الاحتمال لأي مجموعة جزئية بورالية من الأعداد الحقيقية في  $S$ . وعلى ذلك يمكن إثبات أن الدالة  $P(\cdot)$  تحقق المسلمات الثلاثة المعطاة في التعريف الحديث للاحتمال — تعريف (1 — 13 — 1) — والقانون السابق المقدم بالعلاقة (1. 32. 1) يسمى بالقانون الاحتمالي المنتظم.

مثال (1 — 32 — 1): تجربة عشوائية تتمثل في اختيار نقطة (أو عدد حقيقي) بطريقة عشوائية من الفترة  $[0, 1]$  فما هو احتمال أن يكون العدد المقابل للنقطة المختارة أكبر من  $\frac{1}{2}$ ؟

(الحل)

فراغ العينة لهذه التجربة هو

$$S = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$$

وهي فترة طولها  $L(S) = 1$

والفترة التي تقع داخل  $S$  ويقابلها أعداد حقيقية أكبر من  $\frac{1}{2}$  هي الفترة  $B = [\frac{1}{2}, 1]$  وطول هذه الفترة  $L(B) = \frac{1}{2}$  — إذن احتمال أن يكون العدد المختار أكبر من  $\frac{1}{2}$  يمكن الحصول عليه باستخدام العلاقة (1. 32. 1) السابقة كما يلي:

الاحتمال المطلوب هو:

$$P(B) = \frac{L(B)}{L(S)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

## الفصل الأول — نظرية الاحتمالات

فى المثال السابق استخدمنا تعبير معين هو — «اختيار نقطة عشوائية من الفترة  $[0,1]$  أو بصورة عامة من الفترة  $[a,b]$ » — هذا التعبير كثيراً ما يواجهها ويكون هدفنا حساب احتمال أن تكون النقطة المختارة واقعة فى فترة ما تمثل مجموعة جزئية بورالية من الفترة  $[a,b]$  وهذا الاحتمال يمكن حسابه باستخدام العلاقة (1. 32. 1) السابقة والقانون الاحتمالى الذى يحكم هذه العلاقة يسمى بالقانون الاحتمالى المنتظم ومثل هذه المسائل كان يتم دراستها فى الماضى تحت مسمى «الاحتمال الهندسى» ولكن فى نظرية الاحتمالات الحديثة يتم دراسة مثل هذه المسائل تحت مسمى جديد هو — «المتغير العشوائى الذى له توزيع منتظم» — وهو ما سوف نتعرض له بالدراسة فيما بعد.

(1 — 32 — 2) القانون الاحتمالى الأسى السالب The Negative Exponential Probability Law

نفرض أن لدينا فراغ احتمالى معين  $(P(.), \beta, S)$  حيث فراغ العينة  $S$  مكون من مجموعة خطية غير قابلة للعد هي:

$$S = \{x : 0 \leq x \leq \infty \text{ عدد حقيقى}\}$$

فإذا كانت دالة الاحتمال  $P(.)$  تحدد لأى فترة  $B$  عدد حقيقى  $P(B)$  بالعلاقة:

(1. 32. 2):

$$P(B) = \begin{cases} \int_B \lambda e^{-\lambda x} dx & ; \lambda > 0 ; B \subset S \\ 0 & \text{إذا لم توجد أى نقطة مشتركة بين } S, B \end{cases}$$

وما دامت الدالة  $P(.)$  تحدد قيمة الاحتمال  $P(B)$  لأى فترة  $B$  فإنها تحدد الاحتمال لأى مجموعة بورالية جزئية فى  $S$  وعلى ذلك يمكن إثبات أن الدالة  $P(.)$  تحقق المسلمات الثلاثة للتعريف الحديث للاحتمال — تعريف (1 — 13 — 1) — والقانون السابق المعطى بالعلاقة (1. 32. 2) يسمى بالقانون الاحتمالى الأسى السالب بمعلمه  $\lambda$ .

مثال (1 — 32 — 2): إذا كان معلوم أن الفترة المنقضية بالدقائق بين وصول سيارتين متتاليتين فى إحدى محطات البنزين تتبع القانون الأسى السالب بمعلمه  $\lambda = 1$ . احسب احتمال أن الفترة المنقضية بين وصول سيارتين متتاليتين تزيد عن 5 دقائق وتقبل عن 8 دقائق.

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

### (الحل)

نفرض أن:

الحدث B هو: أن الفترة المنقضية بين ميلارين متتاليتين تزيد عن 5 دقائق ونقل عن 8 دقائق.

إذن من العلاقة (1. 32. 2) عندما  $\lambda = 1$  يكون

$$P(B) = \int_5^8 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_5^8 = e^{-5} - e^{-8} = 0.0064$$

يجب ملاحظة أن القانون الاحتمالي المنتظم يعطي احتمال متساوى لأي فترتين مختلفتين إذا كانتا متساويتان في الطول لذلك يمكن اعتباره مثال لحالة فراغ العينة غير القابل للعد المكون من أحداث بسيطة متماثلة - أما القانون الاحتمالي الأسى السالب يعطي قيمتي احتمال غير متساويتين لأي فترتين مختلفتين ومتساويتين في الطول - لذلك يمكن اعتباره مثال لحالة فراغ العينة غير القابل للعد المكون من أحداث بسيطة غير متماثلة.

فمثلا في مثال (1 - 32 - 1) لو اعتبرنا الفترتين:

$$B = [\frac{1}{2}, 1] \quad , \quad C = [0, \frac{1}{2}]$$

سنجد أنه طبقاً للاحتمال المنتظم

$$P(B) = \frac{L(B)}{L(S)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{L(C)}{L(S)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

أي أن الاحتمالين متساويين مادامت الفترتين متساويتى الطول.

ولكن في مثال (2 - 32 - 1) لو اعتبرنا الفترتين:

B : الفترة المنقضية بين سيارتين متتاليتين تزيد عن 5 دقائق ونقل عن 8 دقائق (طولها 3 دقائق)

C : الفترة المنقضية بين سيارتين متتاليتين تزيد عن دقيقة واحدة ونقل عن 4 دقائق (طولها 3 دقائق)

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

سنجد أنه طبقاً للاحتمال الأسى السالب

$$P(B) = 0.0064$$

كما في مثال (1 – 32 – 2) في حين أن:

$$P(C) = \int_1^4 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^4 = e^{-1} - e^{-4} = 0.3495638$$

أي أن الاحتمالين غير متساويين مع أن الفترتين متساويتى الطول.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

### تمارين الباب الأول

- (1 – 1): عند إلقاء قطعة عملة 3 مرات متتالية ما هو احتمال:
- (أ) الحصول على صورتين؟
- (ب) الحصول على كتابة مرة واحدة على الأقل؟
- (1 – 2): عند سحب ورقتين من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) محكمة الخلط، إذا كان السحب مع الإعادة (بدون إعادة) ما هو احتمال أن تكون كلا الورقتين أس؟
- (1 – 3): كيس به 3 كرات بيضاء و5 كرات سوداء. سحب كرة من الكيس ووضع جانبا دون معرفة لونها، ثم سحب كرة ثانية. فما هو احتمال أن تكون الكرة الثانية سوداء (بيضاء)؟
- (1 – 4): عند إلقاء زهرتي نرد متزنة  $n$  مرة. ما هو احتمال الحصول على الوجهين (6, 6) مرة واحدة على الأقل؟
- (1 – 5): عند توزيع  $n$  من الكرات بطريقة عشوائية على  $N$  من الصناديق. ما هو احتمال أن صندوق معين يحتوى على  $m$  من هذه الكرات؟
- (1 – 6): عند إلقاء 3 زهرات نرد متزنة مرة واحدة. ما هو احتمال أن يكون مجموع النقاط على الأوجه الثلاثة:
- أ: 9 ؟    ب: 10 ؟    ج: 11 ؟
- (1 – 7): عند إلقاء 4 قطع عملة متزنة مرة واحدة. ما هو احتمال الحصول على صورتين وكتابة؟
- (1 – 8): عند سحب 6 ورقات من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) محكمة الخلط (بدون إعادة) ما هو احتمال أن تكون 3 منها حمراء و3 سوداء؟
- (1 – 9): 12 كرة متشابهة تم توزيعها عشوائياً بين ثلاثة صناديق. ما هو احتمال أن الصندوق الأول سيحتوى على 3 كرات؟
- (1 – 10): سحب ورقتان عشوائياً من مجموعة أوراق اللعب (محكمة الخلط) بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية. احسب الاحتمالات الآتية:
- (أ) أن تكون الورقتان المسحوبتان من اللون الأسود.
- (ب) أن تكون الورقتان من شكل معين.
- (ج) أن تكون الورقتان من نفس الشكل.

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

- (1 – 11): حل المسألة السابقة إذا كان السحب بدون إعادة.
- (1 – 12): رميت زهرتان من زهرات النرد. ما هو احتمال الحصول على نقط مجموعها 7؟
- (1 – 13): عند إلقاء قطعة عملة متزنة 5 مرات أحصر الحالات الممكنة واحسب احتمال كل منها.
- (1 – 14): ما هو احتمال الحصول على عددين متشابهين معينين عند إلقاء زهرتي نرد وما هو احتمال الحصول على أى عددين متشابهين؟
- (1 – 15): لدينا ثلاثة أزواج من الأشخاص المتزوجين. اخترنا من كل زوج فرداً واحداً دون تحيز. ما هو احتمال أن يكون الأفراد الثلاثة المختارون من جنس واحد؟ وما احتمال أن يكونوا رجلين وامراً؟
- (1 – 16): كتاب مكون من ثلاث أجزاء. وضعت هذه الأجزاء الثلاثة على رف دون تعمد ترتيبها. ما هو احتمال أن تكون مرتبة ترتيباً صحيحاً؟
- (1 – 17): مجموعة مكونة من طفلين وثلاث سيدات. جلست هذه المجموعة بطريقتين: فى خط مستقيم وفى دائرة. ما هو احتمال ألا يكون الطفلان متجاوران فى كل من الطريقتين؟
- (1 – 18): رميت قطعة عملة 5 مرات متتالية. احسب احتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل (الحصول على صورتين على الأقل):  
أولاً: إذا كانت للقطعة متجانسة.
- ثانياً: إذا كان احتمال الحصول على صورة يساوى  $\frac{2}{11}$ .
- (1 – 19): رميت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ما هو احتمال ألا تحدث صورتان متتاليتان؟ وما هو احتمال ألا تحدث صورتان أو كتابتان متتاليتان؟
- (1 – 20): يقوم شخص برمي قطعة نقود فإذا حصل على صورة وضع ثلاث كرات سوداء فى صندوق أما إذا حصل على كتابة فإنه يضع كرتين سوداوين وكرة بيضاء. فإذا كرر هذا الشخص هذه العملية  $n$  مرة ثم سحب كرة من الصندوق (عشوائياً) فاحسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء.
- (1 – 21): رميت زهرة نرد  $n$  مرة. احسب احتمال أن:
- (أ) أكبر رقم سيظهر على الزهرة سيكون رقماً معيناً  $k$ .
- (ب) أصغر رقم سيظهر على الزهرة سيكون رقماً معيناً  $k$ .

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1 – 22): إذا كانت  $\{A_k\} = A_1, A_2, A_3, \dots$  متتابعة من المجموعات المضطردة الزيادة  $A_k \subset A_{k+1}$  لجميع قيم  $k = 1, 2, 3, \dots$ . أوجد النهاية  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  إذا كانت:

$$A_k = \left\{x : \frac{1}{k} \leq x \leq 3 - \frac{1}{k}\right\}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (أ)$$

$$A_k = \left\{(x, y) : \frac{1}{k} \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{1}{k}\right\}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (ب)$$

(1 – 23): إذا كانت  $\{A_k\} = A_1, A_2, A_3, \dots$  متتابعة من المجموعات المضطردة النقصان  $A_k \supset A_{k+1}$  لجميع القيم  $k = 1, 2, 3, \dots$  أوجد النهاية  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ ، إذا كانت:

$$A_k = \left\{x : 2 - \frac{1}{k} < x \leq 2\right\} \quad (أ)$$

$$A_k = \left\{x : 2 < x \leq 2 + \frac{1}{k}\right\} \quad (ب)$$

$$A_k = \left\{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{k}\right\} \quad (جـ)$$

(1 – 24): مجموعة مكونة من 720 طالب تم اختبارهم في ثلاث مواد هي الإحصاء والرياضة والاقتصاد. رسب منهم 90 طالب في الإحصاء و90 طالب في الرياضة و90 طالب في الاقتصاد ورسب 30 طالب في الإحصاء والرياضة كما رسب 30 طالب في الرياضة والاقتصاد ورسب 30 طالب في الاقتصاد والإحصاء. ورسب 10 طالب في المواد الثلاثة. أوجد عدد الطلاب الذين رسبوا في:

(أ) k مادة بالضبط.

(ب) k مادة على الأقل.

(جـ) k مادة على الأكثر.

جميع قيم  $k = 0, 1, 2, 3$

(1 – 25): بين أنه لأي حدث E في فراغ العينة S، تمثل المجموعات  $E, \bar{E}, \phi, S$  عائلة بورال.



## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1 – 26): إذا كان فراغ العينة  $S$  هو كل خط الأعداد الحقيقية  $R_1$ :

(أ) بين أن أى عائلة بوراليه تشتمل على كل الفترات المغلقة تشتمل أيضاً على كل الفترات المفتوحة.

(ب) بين أن العائلة البوراليه المتولدة بالفترات  $(-\infty, x]$  هي نفس العائلة البوراليه المتولدة بالفترات المحدودة.

(1 – 27): لآى مجموعة  $A$ ، نفرض أن  $Q(A) = \sum_A f(x)$  حيث:

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. إذا كانت:

$$A_1 = \{x : x = 0, 1, 2, 3\}; \quad A_2 = \{x : x = 0, 1, 2, \dots\}$$

أوجد:  $Q(A_2)$  و  $Q(A_1)$

(1 – 28): لآى مجموعة  $A$  نفرض أن:

$$Q(A) = \int_A f(x) dx \quad \text{حيث} \quad f(x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1 \quad \text{وتساوى}$$

الصفر خلاف ذلك، هذا إذا كان التكامل موجود أما إذا لم يكن التكامل موجود نعتبر أن  $Q(A)$  غير معرفة. فإذا كان  $A_1 = \{x : \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\}$  و  $A_2 = \{x : x = \frac{1}{2}\}$  و  $A_3 = \{x : 0 < x < 10\}$  أوجد  $Q(A_1)$  و  $Q(A_2)$  و  $Q(A_3)$ .

(1 – 29): لآى مجموعة  $A$  نفرض أن  $Q(A)$  تساوى عدد النقاط فى  $A$  المقابلة للأعداد الصحيحة الموجبة. فإذا كان:

$$A_1 = \{x : x \text{ a multiple of 3, less than or equal to } 50,$$

$x$  مضاعفات 3 التى تقل عن أو تساوى 50

$$A_2 = \{x : x \text{ a multiple of 7, less than or equal to } 50,$$

$x$  مضاعفات 7 التى تقل عن أو تساوى 50

أوجد:  $Q(A_1)$  و  $Q(A_2)$  و  $Q(A_1 \cup A_2)$  و  $Q(A_1 \cap A_2)$ . وبين أن:

$$Q(A_1 \cup A_2) = Q(A_1) + Q(A_2) - Q(A_1 \cap A_2).$$

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

$$Q(A) = \iint_A (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{إذا كانت: } (30 - 1)$$

وذلك عندما يكون التكامل موجود أما خلاف ذلك نعتبر أن  $Q(A)$  غير معرفة.  
فإذا كان:

$$A_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}; A_2 = \{(x, y) : -1 \leq x = y \leq 1\}$$

$$; A_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

أوجد:  $Q(A_1)$  و  $Q(A_2)$  و  $Q(A_3)$ .

$$(1 - 31) : \text{لأى مجموعة } A \text{ إذا كانت } Q(A) = \int_{\mathbb{R}} x^2 dx \text{ عندما يكون التكامل موجود}$$

وتكون  $Q(A)$  غير معرفة عندما لا يكون التكامل موجود.

$$(1) \text{ إذا كانت } A_k = \{x : 0 \leq x \leq 2 - \frac{1}{k}\}; k = 1, 2, 3, \dots \text{ يبين أن}$$

$$Q(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(A_k)$$

$$(ب) \text{ إذا كانت } A_k = \{x : |x| \leq 1 + \frac{1}{k}\}; k = 1, 2, 3, \dots \text{ يبين أن}$$

$$Q(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q(A_k)$$

(1 - 32): صندوق به 8 كرات متشابهة في كل شيء عدا اللون منها 5 كرات بيضاء و3 سوداء سحبت كرتان عشوائياً من الصندوق مع الإعادة (بدون إعادة) أوجد احتمال أن:

(أ) كلا الكرتين المسحوبتين بيضاء.

(ب) كلا الكرتين من نفس اللون.

(ج) كرة واحدة على الأقل بيضاء.

(1 - 33): صندوق به 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 سحبت كرتان عشوائياً من الصندوق مع الإعادة (بدون إعادة) أوجد احتمال أن:

(أ) أن يكون مجموع رقمي الكرتين 7.

(ب) مجموع رقمي الكرتين يساوي k لجميع الأعداد الصحيحة k من 2 حتى 12

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1 – 34): صندوق به 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9. سحبنا منه عينة عشوائية مكونة من 3 كرات مع الإعادة (بدون إعادة). ثم كتبنا أرقام الكرات المسحوبة في صف حسب ترتيب سحبها لتكوين رقم. بذلك سيكون الرقم المكون عبارة عن عدد صحيح ينحصر بين 0 و 999. فما هو احتمال أن الرقم المكون يقبل القسمة على 39؟

(1 – 35): صندوق به 52 كرة مرقمة من 1 إلى 52 نفرض أن الكرات من 1 إلى 13 تعتبر كرات حظ "مكسب". عند سحب كرتان عشوائيا من الصندوق مع الإعادة (بدون إعادة) أوجد احتمال:

(أ) أن تكون كلا الكرتان من كرات الحظ.

(ب) أن لا تكون كلا الكرتان من كرات الحظ.

(ج) أن تكون كرة واحدة على الأقل من كرات الحظ.

(د) أن تكون كرة واحدة بالضبط من كرات الحظ.

(1 – 36): عند إلقاء قطعة عملة مترنة عشرة مرات متتالية. أوجد احتمال الحصول على:

(أ) صورة في الخمسة رميات الأولى وكتابة في الخمسة للتالية.

(ب) صورة في الرميات 1 و 3 و 5 و 7 و 9 وكتابة في الرميات 2 و 4 و 6 و 8 و 10

(ج) 5 صور و 5 كتابة.

(د) 5 صور على الأقل.

(هـ) 5 صور على الأكثر.

(1 – 37): أربعة أشخاص وضعوا أحذيتهم في مكان واحد وعند انصرافهم في المساء انقطع تيار الكهرباء وأظلم المكان وسحب كل واحد منهم حذاء. فما هو احتمال ألا يأخذ أى منهم الحذاء الخاص به؟

(1 – 38): مجموعة من 4 أشخاص. ما هو احتمال أن يكون بينهم 2 على الأقل:

(أ) لهما نفس يوم الميلاد؟

(ب) مولودين في نفس الشهر؟

(1 – 39): في تمرين (1 – 37) أوجد احتمال:

(أ) أن يأخذ كل شخص حذاءه الخاص.

(ب) أن شخص منهم يأخذ حذاءه.

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(1 - 40): في يتصيب معين طرح للبيع  $n^2$  تذكرة منها  $n$  تذكرة تكسب جوائز. فإذا اشترى شخص ما  $n$  تذكرة:

(أ) فما هو احتمال أن يفوز بجائزة.

(ب) أوجد احتمال الفوز وعدم الفوز عندما  $n = 10$  وعندما  $n \rightarrow \infty$ .

(1 - 41): كيس به 3 كرات بيضاء وكرتان (2) سوداء، سحبنا منه كرة وركناها جانباً دون ملاحظة لونها. عند سحب كرة أخرى ما هو احتمال أن تكون بيضاء؟

(1 - 42): في التمرين السابق إذا ركنا كرتين دون ملاحظة لونهما ثم سحبنا كرة أخرى ما هو احتمال أن تكون الكرة الأخيرة بيضاء؟

(1 - 43):  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاثة أحداث و  $P(C) > 0$  أثبت أن:

(أ) إذا كان  $S$  حدث مؤكد فإن  $P[S|C] = 1$

(ب) إذا كانت  $C \subset A$  فإن  $P[A|C] = 1$

(ج) إذا كانت  $P(A) = 0$  فإن  $P[A|C] = 0$

(د)  $P[A \cup B|C] = P[A|C] + P[B|C] - P[AB|C]$

(هـ)  $P(\bar{A}|C) = 1 - P(A|C)$

(1 - 44): عند لقاء ثلاث (3) زهرات نرد متزنة دفعة واحدة، إذا علمت أنه لا توجد زهرتان لهما نفس الناتج، فما هو احتمال أن:

(أ) مجموع الأوجه 7؟

(ب) ناتج إحدى الزهرات 4؟

(1 - 45): إذا كان  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$  هل من الممكن أن يكون الحدثان  $A$  و  $B$  متنافيان؟ بين السبب.

(1 - 46): صندوق يحتوى على  $M$  كرة منها  $m$  كرة بيضاء (حيث  $m \leq M$ ). عند سحب عينة حجمها  $n$  كرة من الصندوق مع الإحلال (أو بدون إحلال)، إذا كان الحدث  $B_j$  هو أن الكرة المسحوبة في السحبة رقم  $j$  بيضاء  $j = 1, 2, \dots, n$ ، والحدث  $A_k$  هو أن تحتوى العينة المسحوبة على  $k$  كرة بالضبط بيضاء  $k = 1, 2, \dots, n$ . أثبت أن:  $P[B_j | A_k] = \frac{k}{n}$ .

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1 – 47): صندوق يحتوي على  $M$  كرة منها  $m$  ( $M \geq m$ ) كرة بيضاء. سحبته منه  $n$  ( $M > n$ ) كرة ووضعت جانبا (لم تعد للصندوق) دون معرفة لونها، ثم سحبته كرة أخرى، فما هو احتمال أن تكون الكرة الأخيرة بيضاء؟  
(1 – 48): صندوق به 8 كرات بيضاء و4 كرات سوداء.

- (أ) عند سحب كرة من الصندوق ما هو احتمال أن تكون بيضاء؟  
(ب) عند سحب عينة مكونة من كرتين، ما هو احتمال أن تحتوي على كرة واحدة بالضبط بيضاء؟  
(ج) ما هو الاحتمال الشرطي أن تحتوي العينة على كرتين بالضبط بيضاء علما بأنها تحتوي على كرة واحدة على الأقل بيضاء؟

(1 – 49): في التمرين السابق إذا فقدنا من الصندوق 5 كرات قبل السحب ولم نلاحظ لون الكرات المفقودة. أوجد أثر ذلك على نتائج التمرين السابق في (أ) و(ب) و(ج).

(1 – 50): صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و6 حمراء و3 سوداء من حجم واحد سحبته ثلاث كرات عشوائيا. ما هو احتمال أن تكون من لون واحد؟  
(1 – 51): صندوق به 12 كرة متماثلة منها 5 كرات بيضاء و3 حمراء و4 سوداء. سحبته منه ثلاث كرات احسب احتمال:

- (أ) عدم ظهور كرات حمراء.  
(ب) ظهور كرة واحدة حمراء.  
(ج) أن تكون كرة واحدة على الأقل حمراء.  
(د) أن تكون الكرات كلها من نفس اللون.  
(هـ) عدم وجود كرتان من لون واحد.

(1 – 52): صناديق عددها  $n$  يحتوي كل منها على  $a$  كرة بيضاء و  $b$  كرة سوداء. أخذت كرة عشوائيا من الصندوق الأول ووضعت في الثاني ثم أخذت كرة من الثاني ووضعت في الثالث ... وهكذا حتى أخذت كرة من الصندوق قبل الأخير ووضعت في الأخير وأخيرا سحبته كرة من الصندوق الأخير فما هو احتمال أن تكون بيضاء؟

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1 – 53): صندوقان الأول به  $(N - 1)$  كرة بيضاء وكرة واحدة سوداء والثاني به  $N$  كرة كلها بيضاء. سحب كرة عشوائياً من كل صندوق ووضعت في الصندوق الآخر وكررت العملية عدداً من المرات. احسب احتمال أنه بعد عدد من السحب قدره  $n$  ستكون الكرة السوداء موجودة بالصندوق الأول وأدرس نهاية هذا الاحتمال عندما  $N \rightarrow \infty$  (وكذلك عندما  $N = n$ . ثم  $N \rightarrow \infty$ ).

(1 – 54): صندوق يحتوي على  $a$  من الكرات البيضاء و  $b$  من الكرات السوداء. بدأت سلسلة من سحب الكرات من الصندوق كرة واحدة في كل سحبة بشرط أن تعاد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد سحب الكرة التالية مباشرة. ما هو احتمال أن الكرة التي ستظهر في السحبة رقم  $n$  ستكون بيضاء؟

(1 – 55): إذا كان  $P[A] = 0.5$  و  $P[A \cup B] = 0.6$  أوجد  $P[B]$  إذا كان:

(أ) الحدثان  $A$  و  $B$  متنافيان.

(ب) الحدثان  $A$  و  $B$  مستقلان.

(ج)  $P[A | B] = 0.4$ .

(1 – 56): مجموعة من الأشخاص 60% منهم رجال و 40% نساء. فإذا كان 40% من الرجال و 60% من النساء مدخنين. فما هو احتمال أن يكون شخص مدخن من هذه المجموعة رجلاً؟ وما هو احتمال أن يكون امرأة؟

(1 – 57): لدينا حدثان  $A$  و  $B$  حيث  $P(A) = \frac{1}{4}$  و  $P(B | A) = \frac{1}{2}$  و  $P(A | B) = \frac{1}{4}$ . حدد أى من الحالات الآتية صح أو خطأ:

(أ) الحدثان  $A$  و  $B$  متنافيان.

(ب)  $A \subset B$ .

(ج)  $P(\bar{A} | \bar{B}) = \frac{3}{4}$ .

(د)  $P(A | B) + P(A | \bar{B}) = 1$ .

(1 – 58): صندوق يحتوي على 12 كرة منها 8 كرات بيضاء. سحبنا منه عينة مكونة 4 كرات مع الإحلال (بدون إحلال). ما هو احتمال أن أول كرة مسحوبة ستكون بيضاء إذا علمت أن العينة تحتوي بالضبط على:

(أ) كرتين بيضاء؟

(ب) 3 كرات بيضاء؟

## الفصل الأول – نظرية الاحتمالات

(1 – 59): لدينا 3 مجموعات من أوراق اللعب (الكوتشينة). سحبت ورقة واحدة عشوائيا من كل مجموعة. ما هو احتمال أن تحتوى الأوراق الثلاثة المسحوبة على العشرة الطيبة مرة واحد على الأقل؟

(1 – 60): صندوق به  $n$  كرة ذات حجم متماثل ولكنها ذات ألوان مختلفة، منها  $b$  كرة سوداء سحبت الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى دون إعادة. أثبت أن

$$\text{احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثالثة سوداء يساوى } \frac{b}{n}.$$

(1 – 61): سحبت ورقة من مجموعة أوراق لعب محكمة الخلط ثم أعيدت وسحبت ورقة ثانية احسب احتمال:

(أ) أن تكون الورقة الأولى من نفس لون الورقة الثانية.

(ب) أن تكون الورقة الأولى هي نفس الورقة الثانية.

(ج) أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد.

(د) أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد أو نفس الصورة.

(1 – 62): احسب احتمال إصابة مركب إذا أطلق عليها 5 قذائف بفرض أن احتمال إصابة القذيفة الواحدة  $\frac{1}{5}$ .

(1 – 63): يلعب ثلاث أشخاص  $a$  و  $b$  و  $c$  إحدى ألعاب الصدفة حيث تتساوى فيها احتمالات الكسب لكل منهم وبحيث يكون الفائز أول من يكسب ثلاث مباريات. فإذا كسب المباراة الأولى  $a$  والثانية  $b$  والثالثة  $a$ . احسب احتمال أن يفوز  $c$ .

(1 – 64): صندوق به عدد متساو من الكرات من كل من ثلاثة ألوان مختلفة. سحبت إحدى الكرات وسجل لونها وأعيدت إلى الصندوق وكررت هذه العملية  $n$  من المرات حيث  $n > 2$ . أثبت أن احتمال أن يكون كل من الألوان الثلاثة قد ظهر

$$\text{مرة واحدة على الأقل أثناء هذه العملية يساوى } \frac{3^{(n-1)} - 2^n + 1}{3^{(n-1)}}.$$

(1 – 65): إذا كان  $A$  و  $B$  حدثان مستقلان و  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$  أوجد  $P(A \bar{B} \cup \bar{A} B)$

(1 – 66): إذا كان  $P(A|B) = P(B|A) = P(ABC)$  أوجد  $P(ABC)$ .

(1 – 67): إذا كان  $A$  و  $B$  حدثان مستقلان و  $P(A) = P(B|A) = \frac{1}{2}$  أوجد  $P(A \cup B)$ .

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(1 - 68): إذا علمت أن  $P(A) = 0.5$  و  $P(A \cup B) = 0.7$ :

(أ) أوجد  $P(B)$  إذا كان  $A$  و  $B$  مستقلان.

(ب) أوجد  $P(B)$  إذا كان  $A$  و  $B$  متنافيين.

(ج) أوجد  $P(B)$  إذا كان  $P(A|B) = 0.5$ .

(1 - 69): أثبت صحة أو عدم صحة العلاقات التالية:

(أ) إذا كان  $P(A|B) \geq P(A)$  فإن  $P(B|A) \geq P(B)$ .

(ب) إذا كان  $P(B|\bar{A}) = P(B|A)$  فإن  $A$  و  $B$  يكونا مستقلان.

(ج) إذا كان  $P(A) = a$  و  $P(B) = b$  فإن  $P(A|B) \geq (a + b - 1)/b$ .

(1 - 70): صندوق يحتوي على 6 كرات منها 4 كرات بيضاء. سحبته منه عينة مكونة من 3 كرات مع الإحلال (بدون إحلال). نفرض أن الحدث  $A$  هو أن تحتوي العينة للمسحوبة على كرتان بالضبط بيضاء والحدث  $B$  هو أن الكرة للمسحوبة في السحبة الثالثة بيضاء. أثبت أن:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

حيث  $\bar{A}$  هو مكمل الحدث  $A$ .

(1 - 71): لدينا ثلاث صناديق أ وب وجـ. الصندوق أ يحتوي على كرتان (2) بيضاء و4 حمراء والصندوق ب يحتوي على 8 كرات بيضاء و4 حمراء والصندوق جـ يحتوي على كرة واحدة بيضاء و3 حمراء. سحبنا عشوائياً كرة واحدة من كل صندوق. ما هو احتمال أن الكرة للمسحوبة من الصندوق الثاني ستكون بيضاء إذا علمت أن الكرات الثلاثة للمسحوبة تحتوي على كرتان بالضبط بيضاء؟

(1 - 72): صندوقان يحتوي الأول على  $a$  كرة بيضاء و  $b$  كرة سوداء ويحتوي الثاني على  $c$  كرة بيضاء و  $d$  كرة سوداء. سحبته كرة من الصندوق الأول ووضعت في الصندوق الثاني ثم سحبته كرة من الصندوق الثاني. ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء؟

(1 - 73): في التمرين السابق إذا سحبته كرتان من الصندوق الأول ووضعت في الثاني ثم سحبته كرة واحدة من الصندوق الثاني. احسب احتمال أن تكون الكرة للمسحوبة بيضاء.



## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(1 - 74): نفرض أن  $B_1$  و  $B_2$  و  $B_3$  ثلاث أحداث متنافية. فإذا كان  $P(B_1) = \frac{1}{3}$  و  $P(A | B_j) = \frac{1}{6}$  لقيم  $j = 1, 2, 3$ . أوجد  $P(A)$ .

(1 - 75): صندوقان الأول به كرتان بيضاء وكرة سوداء والثاني به كرة بيضاء و5 كرات سوداء. أخذت كرة عشوائياً من الأول ووضعت في الثاني ثم سحبت كرة من الثاني ووجد أنها بيضاء. احسب احتمال أن الكرة المسحوبة من الصندوق الأول كانت سوداء.

(1 - 76): نفرض أن  $B_1, B_2, \dots, B_n$  مجموعة من الأحداث المتنافية و  $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$  و  $P(B_j) > 0$  و  $P(A | B_j) = q$  لقسم  $j = 1, 2, \dots, n$  أثبت أن:  

$$P(A | B) = q$$

(1 - 77): صندوق يحتوي على 10 كرات وكل ما نعرفه هو أن بعض هذه الكرات لونها أبيض وبعضها أسود. سحبت كرة من الصندوق عشوائياً ووجد أن لونها أبيض فما هو احتمال أن يحتوي الصندوق على 5 كرات بيضاء على الأقل؟

(1 - 78): في التمرين السابق إذا كانت  $P_1 = \dots = P_{10} P_0$  = أوجد الاحتمال المطلوب. حيث  $P_k$  هو احتمال أن يحتوي الصندوق على  $k$  كرة بيضاء،  
 $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ .

(1 - 79): صندوق يحتوي على 10 كرات وكل ما نعرفه هو إما أن: (أ) كل الكرات بيضاء أو (ب) 5 كرات بيضاء و5 كرات سوداء. سحبت كرة من الصندوق وكانت بيضاء.

فما هو احتمال أن تكون كل الكرات الموجودة في الصندوق بيضاء؟

(1 - 80): في  $n$  من المحاولات المتكررة المستقلة لتجربة ما إذا كان احتمال النجاح في كل محاولة يساوي  $p$ . بين أن احتمال أن تكون نتيجة محاولة معينة نجاح، إذا علمت أن عدد مرات النجاح في  $n$  محاولة يساوي  $k$ ، هو  $\frac{n!}{k!}$ .

(1 - 81): أجرى شخص  $m + n$  محاولة مستقلة لتجربة ما واحتمال النجاح في كل محاولة يساوي  $p$  و  $q = 1 - p$ .

(أ) بين أن احتمال أن  $m + k$  محاولة ستكون نتيجتها نجاح إذا علمت أن الـ

$m$  محاولة الأولى نجاح يساوي  $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  لجميع قيم  
 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

## الفصل الأول - نظرية الاحتمالات

(ب) بين أن احتمال أن  $m + k$  محاولة ستكون نتيجتها نجاح إذا علمت أن  $m$  محاولة على الأقل نتيجتها نجاح هو:

$$\frac{\binom{m+n}{m+k} \left(\frac{p}{q}\right)^k}{\sum_{j=0}^n \binom{m+n}{m+j} \left(\frac{p}{q}\right)^j}$$

(1 - 82): أثبت صحة العلاقة (1. 30. 5) واثبت أن مجموع حدود القانون الاحتمالي المعطى بهذه العلاقة يساوى الواحد الصحيح.

(1 - 83): خط مستقيم طوله  $a$  ونقطة منتصفه  $m$ . اخترنا عشوائياً نقطتين على الخط المستقيم على جانبي نقطة المنتصف  $m$ . أوجد احتمال أن المسافة بين النقطتين المختارتين تكون أقل من  $\frac{a}{3}$ .

(1 - 84): عند اختيار نقطتين عشوائياً على ضلعين متجاورين لمربع. أوجد احتمال أن مساحة المثلث الذي يتكون من ضلعي المربع والخط الواصل بين النقطتين يكون:

(أ) أقل من  $\frac{1}{6}$  مساحة المربع.

(ب) أكبر من  $\frac{1}{2}$  مساحة المربع.

(1 - 85): نقطتان اختيرتا عشوائياً على خط مستقيم طوله  $a$ . ما هو احتمال أن أي من الأجزاء الثلاثة التي يتجزأ إليها الخط المستقيم لا تقل عن  $\frac{a}{4}$ ؟

## الفصل الثانى

### المتغيرات العشوائية

### ودوال التوزيع الاحتمالى

## Random Variables and Probability Distribution Functions

### (1 - 2) مقدمة:

لقد قدمنا فى الباب الأول بعض المفاهيم الرياضية الهامة مثل الاحتمال والفراغ الاحتمالى بهدف استخدام هذه المفاهيم فى إخضاع الظواهر العشوائية للدراسة العلمية المنظمة. وفى هذا الباب نقدم مفهوم آخر غاية فى الأهمية هو "المتغير العشوائى" الذى يمثل دالة حقيقية معرفة على فراغ العينة بهدف إيجاد مدخل آخر لدراسة الظواهر العشوائية. وباستخدام مفهوم المتغير العشوائى يمكن بناء هيكل رياضى مناظر لفراغ الاحتمال نستطيع بواسطته إخضاع الظواهر العشوائية للدراسة العلمية الجادة. لذا سنبدأ بتعريف المتغير العشوائى ودالة كثافة احتماله ودالة توزيعه الاحتمالى فى حالة المتغير العشوائى المفرد ثم المتغير العشوائى المتعدد المركبات كما سنتناول بالدراسة استقلال المتغيرات العشوائية.

### (2 - 2) المتغير العشوائى Random Variable:

ذكرنا عند تعريف علم الإحصاء فى بداية الباب الأول إتعاريف (1 - 1 - 1) أنه ذلك العلم الذى يعمل على جمع البيانات المتعلقة بأى ظاهرة علمية أو اجتماعية وصياغتها فى شكل رقمى لإخضاعها للدراسة العلمية المنظمة باستخدام الأساليب والطرق العلمية المتوفرة فى أفرعه المختلفة خاصة ما يزخر به ذلك الفرع الهام من أفرع هذا العلم وهو فرع "نظرية الإحصاء". والظواهر التى تواجهها فى الدراسة نوعان - النوع الأول هو ما

## الفصل الثاني — المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

يسمى بالظواهر الكمية — Numerical Valued Random Phenomena وهي ظواهر كمية مقيسة مثل الطول والوزن ودرجات الحرارة وغير ذلك من الظواهر التي تتميز بأن نتيجتها يمكن قياسها كمياً والتعبير عنها بعدد حقيقي — فلو رمزنا لظاهرة مثل درجات الحرارة بالرمز  $X$  فيمكن القول أن  $X$  عدد حقيقي ينحصر بين  $-\infty$  و  $+\infty$  والنوع الثاني من الظواهر يعرف بالظواهر النوعية أو الوصفية Descriptive Phenomena مثل الجنس (ذكر أو أنثى) والحالة التعليمية لمجموعة من الأشخاص وغير ذلك من الظواهر التي تتميز بأن نتيجة الظاهرة تتحدد بالوصف وليس بالكم. ولما كان علم الإحصاء يعمل على صياغة أي بيانات في شكل رقمي قبل التعامل معها — لذلك فإن البيانات التي نحصل عليها من أي ظاهرة وصفية يمكن صياغتها في الأخرى في شكل كمي — فلو كانت الظاهرة محل الدراسة هي مثلاً جنس المولود فيمكن الإشارة للذكر بالعدد (1) والأنثى بالعدد (0) — أو العكس — فتكون نتيجة الظاهرة إما واحد أو صفر بالنسبة لأي مفردة من مفردات الدراسة وهي نتيجة كمية — وبذلك يمكن — عملياً — اعتبار كل الظواهر الخاصة للدراسة ظواهر كمية (مقاسة). والظواهر بصفة عامة يمكن تمثيلها بالتجارب العشوائية فلو كانت الظاهرة محل الدراسة هي جنس المولود فيمكن اعتبارها كتجربة عشوائية نتيجتها (1 أو صفر) — ويكون فراغ العينة لهذه التجربة العشوائية (أو الظاهرة العشوائية) هو:  $S = \{0, 1\}$  ولو كانت الظاهرة العشوائية هي أطوال مجموعة من الأشخاص فيمكن تمثيل هذه الظاهرة بتجربة عشوائية فراغ العينة فيها هو:

$$S = \{X(\text{real no.}): a \leq X \leq b\}$$

حيث  $X$  عدد حقيقي و  $a$  عدد حقيقي يمثل أقل طول و  $b$  عدد حقيقي يمثل أكبر طول ممكن. وعادة عند دراسة أي ظاهرة عشوائية تتم الدراسة عن طريق عينة عشوائية يتم سحبها من مجتمع هذه الظاهرة — لذلك فإن النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها عند دراسة أي ظاهرة يمكن اعتبارها مشابهة تماماً لنتائج التجارب العشوائية — لذلك نطلق على هذه الظواهر اسم الظواهر العشوائية Random Phenomena. ويمكن النظر إلى أي ظاهرة عشوائية كمية على أنها تجربة عشوائية نتيجتها عبارة عن عدد  $X$  من الأعداد الحقيقية وفراغ العينة لمثل هذه الظواهر هو مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$S = \{X: -\infty \leq X \leq \infty\} = R_1$$

حيث  $R_1$  هو خط الأعداد الحقيقية. ونظرية الاحتمالات تقدم لنا الأساس الرياضي لدراسة الظواهر العشوائية الكمية باعتبار أن أي ظاهرة عشوائية كمية (أو تجربة عشوائية) تكون نتيجتها عدد حقيقي — وفراغ العينة لمثل هذه الظواهر هو مجموعة الأعداد الحقيقية  $R_1$ ، ومعرف على هذا الفراغ دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  التي تحدد لكل مجموعة جزئية بوراليه  $E$  من الأعداد الحقيقية (أو حدث  $E$ ) عدداً حقيقياً هو  $P(E)$  طبقاً للمسلمات الثلاث المذكورة في التعريف الحديث للاحتتمال إيتريف (1 — 13) [[بالباب الأول، وبذلك يمكن حساب احتمال تحقق أي حدث  $E$  معرف على الظاهرة العشوائية محل

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

الدراسة. ويتم إخضاع أى ظاهرة عشوائية للدراسة العلمية المنظمة عن طريق فراغ الاحتمال — أى عن طريق التجربة العشوائية وفراغ العينة لها السدى يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية  $S = R_1$  والأحداث المختلفة  $E$  المعرفة على فراغ العينة  $S$  والتي تكون عائلة بوراليه. وهذا ليس هو المدخل الوحيد لدراسة الظواهر العشوائية — إنما يوجد مدخل آخر لإخضاع الظواهر العشوائية للدراسة العلمية المنظمة — هذا المدخل يمكن تقديمه باستخدام مفهوم جديد هو المتغير العشوائى ودالة توزيعه الاحتمالي، حيث يمكن لكل ظاهرة عشوائية (أو تجربة عشوائية) تحديد ما يسمى بالمتغير العشوائى المرافق لهذه الظاهرة (أو لهذه التجربة)، وباستخدام مفهوم المتغير العشوائى يمكن بناء هيكل رياضى مناظر لفراغ الاحتمال يتم بواسطته دراسة أى ظاهرة عشوائية دراسة علمية جادة. ويمكن الآن تقديم مفهوم المتغير العشوائى كما يلي:

نفرض أن لدينا تجربة عشوائية تتمثل فى إلقاء قطعة عملة متزنة مرة واحدة — نعلم أن فراغ العينة لهذه التجربة هو مجموعة مكونة من 4 عناصر — أى 4 أحداث بسيطة — هى المجموعة:

$$S = \{TT, TH, HT, HH\} \\ = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

حيث  $H$  ترمز للصورة و  $T$  ترمز للكتابة. ولو اعتبرنا أن الأحداث البسيطة متماثلة — وهى كما نعلم شاملة ومتنافية — فإننا نكون بذلك قد عرفنا دالة احتمال  $P(\cdot)$  على الفراغ  $S$  التى تحدد لكل عنصر  $e_i$  الاحتمال  $P(e_i) = \frac{1}{4}$  لجميع قيم  $i = 1, 2, 3, 4$  — وإذا رمزنا لعدد الصور بالرمز  $X$  منجد أنه إذا كانت نتيجة التجربة هى العنصر  $e_1 = TT$  تكون  $X = 0$  وإذا كانت نتيجة التجربة  $e_2$  أو  $e_3$  تكون  $X = 1$  وإذا كانت النتيجة  $e_4$  تكون  $X = 2$ . من ذلك نرى أن عدد الصور  $X$  يمثل دالة حقيقية وحيدة القيمة معرفة على فراغ العينة  $S$  وتحدد لكل عنصر من عناصر  $S$  عدد حقيقى وحيد — هذه الدالة  $X$  هى ما نطلق عليها اسم المتغير العشوائى  $X$  المرافق لهذه التجربة العشوائية. وعلى ذلك يمكن تحديد قيم المتغير العشوائى  $X$  لكل عنصر من عناصر التجربة العشوائية محل الدراسة كما يلي:

$$X(e_1) = 0, \quad X(e_2) = X(e_3) = 1, \quad X(e_4) = 2.$$

أى لن:

$$(2.2.1) : \begin{cases} X = 0 & (e = TT \quad \text{عندما}) \\ X = 1 & (e = TH \text{ or } HT \quad \text{عندما}) \\ X = 2 & (e = HH \quad \text{عندما}) \end{cases}$$

## الفصل الثاني — المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

في الواقع العلاقة الدالية للمتغير العشوائي  $X$  بالنسبة لعناصر فراغ العينة لا تهتمنا بقدر ما يهمنا معرفة احتمال أن المتغير  $X$  يأخذ قيمة معينة أو ينتمي لمجموعة معينة — أى لا يهمنا حساب القيمة  $X(e)$  التى يأخذها المتغير العشوائي  $X$  بالنسبة لعنصر معين  $e$  من عناصر فراغ العينة  $S$  — بقدر ما يهمنا معرفة احتمال أن  $X$  يساوى قيمة معينة مثل  $X=1$  أو ينتمي لمجموعة معينة مثل احتمال أن  $X \geq 1$  مثلاً. وهذه الاحتمالات يمكن حسابها باستخدام دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  المعرفة على فراغ العينة  $S$  كما يلي:

بفرض أن  $E$  مجموعة جزئية في  $R_1$  ونريد معرفة احتمال أن المتغير العشوائي  $X$  ينتمي إلى المجموعة  $E$  فإن:

$$P(X \in E) = P(\{e : X(e) \in E\}) = P_X(E)$$

حيث  $E$  مجموعة جزئية بوراليه من مجموعة الأعداد الحقيقية  $R_1$  (أى أن  $E$  حدث معين). بذلك نكون قد حددنا دالة احتمال للمتغير العشوائي  $X$  هي الدالة  $P_X(E)$  التى تمثل احتمال تحقق الحدث  $E$  (أو احتمال المجموعة الجزئية البورالية  $E$  من فراغ المتغير العشوائي  $X$ ) باستخدام العلاقة:

$$(2.2.2): P_X(E) = P(X \in E) = P(\{e : X(e) \in E\}).$$

بهذه الدالة يمكن تحديد الاحتمالات المختلفة لأن ينتمي المتغير العشوائي  $X$  لأى مجموعة جزئية بوراليه من الفراغ  $R_1$ . من هذا نرى أن دالة الاحتمال  $P_X(E)$  المرافقة للمتغير العشوائي  $X$  تقوم بنفس الدور الذى تقوم به دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  المرافقة لفراغ العينة  $S$  حيث أنها تقوم بتوزيع الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) على المجموعات الجزئية البورالية المختلفة  $E$  لفراغ المتغير العشوائي  $X$  بحيث يكون ما يخص أى مجموعة  $E$  من الاحتمال الكلى هو الكمية  $P_X(E)$  — لذلك يمكن استخدام المتغير العشوائي  $X$  ودالة الاحتمال المرافقة له  $P_X(\cdot)$  لدراسة الظواهر العشوائية بتكوين هيكل رياضى مناظر تماماً لفراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  الذى يستخدم لتوزيع الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) على كل المجموعات الجزئية البورالية لفراغ العينة  $S$  ولتى تعتبر عناصر لعائلة  $\beta$  التى تسمى فراغ الأحداث. والهيكل الرياضى المناظر لفراغ الاحتمال هو فراغ احتمالى آخر خاص بالمتغير العشوائي  $X$  والدالة المرافقة له  $P_X(\cdot)$  ويمكن أن نرمز له بالرمز  $(R_1, P_X(\cdot), \beta_1)$  حيث  $R_1$  هو خط الأعداد الحقيقية الذى قد يكون هو فراغ المتغير العشوائي  $X$  أو شاملاً لهذا الفراغ و  $\beta_1$  هى أصغر عائلة بوراليه عناصرها كل المجموعات الجزئية البورالية للفراغ  $R_1$  و  $P_X(\cdot)$  هى دالة الاحتمال المعرفة بالعلاقة (2.2.2) ولتى تحدد الاحتمال المناظر لكل مجموعة جزئية بوراليه فى الفراغ  $R_1$ . ومما هو جدير بالذكر أن كل ظاهرة عشوائية (أو تجربة عشوائية) يرافها متغير عشوائى. والمتغيرات العشوائية — مثلها مثل الظواهر العشوائية قد تكون متقطعة (منفصلة) Discrete وقد تكون مستمرة (متصلة) Continuous. ويجب ملاحظة أن الظاهرة العشوائية

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(أو التجربة العشوائية) التي تكون نتيجتها عدد حقيقي يكون فراغ العينة لها  $S$  هو نفسه فراغ المتغير العشوائي المرافق لها  $X$  وبالتالي تكون دالة الاحتمال  $P(.)$  المعرفة على فراغ العينة  $S$  هي نفسها الدالة  $P_X(.)$  المعرفة على فراغ المتغير  $X$ . والمتغير العشوائي عندما يكون من النوع المنقطع يكون من السهل تحديد كل المجموعات الجزئية البورالية لفراغه، كما تكون كل المجموعات الجزئية لفراغه مجموعات بورالية، ولكن الأمر لا يكون بنفس السهولة في حالة الظواهر العشوائية المتصلة. لهذا سنحاول فيما يلي تقديم مفهوم المتغير العشوائي  $X$  والدالة  $P_X(.)$  المرافقة له والمعرفة على كل المجموعات الجزئية البورالية المعرفة على فراغه بصورة أعمق بعض الشيء من حيث المعالجة الرياضية وذلك بتقديم ما يسمى بدالة كثافة احتمال المتغير العشوائي ودالة توزيعه الاحتمالي بهدف تكوين بنیان رياضي دقيق يمكن به إخضاع الظاهرة العشوائية للدراسة العلمية الدقيقة وتحديد خصائص الظواهر العشوائية المختلفة.

وحيث أنه قد سبق لنا في الباب الأول من هذا الكتاب تقديم بعض المفاهيم الرياضية الأساسية واستخدام رموز معينة للإشارة إليها مثل فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  وخط الأعداد  $R_1$  في الفراغ ذو البعد الواحد، وقياساً على ذلك نرمز للفراغ ذو النون بعداً بالرمز  $R_n$  كما نستخدم التعبير المرتب  $(X_1, \dots, X_n)$  للدلالة على نقطة في الفراغ  $R_n$ ، كما نرمز لأصغر عائلة بورالية في الفراغ  $R_n$  بالرمز  $\beta_n$ . وعلى هذا فإن فراغات الاحتمال  $(R_n, \beta_n, P)$  لجميع قيم  $n = 1, 2, \dots$  تلعب دوراً أساسياً وهاماً في الدراسات الإحصائية موضوع هذا الكتاب. ونبدأ الآن بتقديم تعريف دقيق للمتغير العشوائي.

### (2 - 3) تعريف المتغير العشوائي (I):

إذا كان  $(S, \beta, P)$  فراغ احتمال و  $X(e)$  دالة حقيقية (Real) وحيدة القيمة Single Valued - معرفة على كل عنصر (أو نقطة عينة)  $e$  في فراغ العينة  $S$  - والحدث  $E_r$  يمثل مجموعة جزئية من  $S$  هي:

$$(2. 3. 1): E_r = \{e : X(e) \leq r\}$$

لكل عدد حقيقي  $r$  - فإذا كان أي حدث  $E_r$  عنصراً في العائلة  $\beta$  (التي تمثل فراغ الأحداث) فإن الدالة  $X(e)$  تسمى "متغيراً عشوائياً" مرافقاً للعائلة  $\beta$  "Random Variable relative to  $\beta$ " أو "دالة بورالية مقيسة"  $\beta$ -measurable function.

والتعريف السابق يتضمن شرط هام هو أن تكون المجموعة  $E_r$  عنصراً في العائلة البورالية  $\beta$  ( $E_r \in \beta$ ) التي تمثل فراغ الأحداث وهذا يؤكد أن اهتمامنا منصوب على المجموعات المقيسة فقط والتي تعتبر أحداثاً نهتم بها أما المجموعات التي لا يمكن اعتبارها عنصراً في العائلة  $\beta$  فإنها تعتبر مجموعات غير مقيسة ولا نعتبرها أحداث ولا

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

نهتم بحساب احتمال تحقق أى منها وبالتالي فإن مثل هذه المجموعات لا تؤخذ فى الاعتبار عند تعريف المتغير العشوائى.

إذا كانت  $\beta_1$  تمثل أصغر عائلة بوراليه للمجموعات البوراليه فى خط الأعداد  $R_1$  — والمتغير العشوائى  $X(e)$  يمثل دالة تحدد لكل نقطة  $e$  فى فراغ العينة  $S$  عدداً حقيقياً وحيداً فى الفراغ  $R_1$  بطريقة ما بحيث أن لكل مجموعة بوراليه  $A$  فى العائلة  $\beta_1$  ( $A \in \beta_1$ ) يوجد مجموعة (أو حدث)  $E$  فى فراغ الأحداث  $\beta$  ( $E \in \beta$ ) ونستخدم الرمز  $E \in A$ ،  $A$  عناصر فى كل من  $\beta_1$ ،  $\beta$  وليست مجموعات جزئية فيهما] بحيث يتكون  $E$  من كل العناصر  $e$  لفراغ العينة  $S$  التى تحقق للعلاقة:

$$(2.3.2): X(e) \in A$$

أى أن المجموعة  $E$  تنتقل بواسطة الدالة  $X(e)$  إلى المجموعة  $A$  وهذا ما نعبّر عنه دالياً بالعلاقة:

$$(2.3.3): E \xrightarrow{X(e)} A$$

حيث  $A$  تسمى صورة (image) للمجموعة  $E$  وهذا يمكن التعبير عنه رمزياً بصورة قياسية كما يلى:

$$(2.3.4): E = X^{-1}(A)$$

حيث  $E$  تسمى صورة عكسية (inverse image) للمجموعة  $A$ . وبذلك فإن احتمالات المجموعات البوراليه التى تمثل عناصر العائلة  $\beta_1$  يمكن تحديدها باستخدام احتمالات العناصر المناظرة فى العائلة  $\beta$  وذلك كما يلى:

نعلم أن :  $E \in \beta$  ،  $A \in \beta_1$  فإذا كان فراغ الاحتمال المرافق لفراغ العينة  $S$  هو  $(S, \beta, P)$  فإن احتمال تحقق الحدث  $E$  (الذى يعتبر عنصراً فى  $\beta$ ) هو  $P(E)$  — وإذا رمزنا لاحتمال تحقق الحدث  $A$  (الذى يعتبر عنصراً فى  $\beta_1$ ) بالرمز  $P_X(A)$  فإن:

$$P_X(A) = P(E)$$

ومن العلاقة (2.3.4) نجد أن:

$$(2.3.5): P_X(A) = P(E) = P[X^{-1}(A)]$$

وبهذا يمكن استخدام فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  للمرافق لفراغ العينة  $S$  لتحديد أو استنباط فراغ الاحتمال  $(R_1, \beta_1, P_X)$  المرافق لخط الأعداد  $R_1$ . ومن السهل إثبات أن  $(R_1, \beta_1, P_X)$  تمثل فراغ احتمال وهذا متروك للطالب.

فتمنا حتى الآن حالة متغير عشوائى واحد على فراغ العينة  $S$  وهذه تسمى حالة المتغير العشوائى المفرد Single Random Variable ويمكن تعريف أكثر من متغير



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

عشوائي على فراغ العينة  $S$  وهو ما يسمى بحالة المتغير العشوائي متعدد المركبات أو المتغير العشوائي المشترك Multi – Component Random Variable or Joint Random Variable فإذا كان لدينا فراغ احتمال معين  $(S, \beta, P)$  وكلفت  $X_1(e), \dots, X_n(e)$  تمثل  $n$  من المتغيرات العشوائية – والحدث  $E_{r_1, \dots, r_n}$  يتكون من كل العناصر  $e$  للفراغ  $S$  التي تحقق العلاقات الآتية:

$X_i(e) \leq r_i$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$  حيث  $r_i$  عدد حقيقي – أي أن:

$$(2.3.6): E_{r_1, \dots, r_n} = \{e: X_1(e) \leq r_1, \dots, X_n(e) \leq r_n\}$$

حيث  $r_1, \dots, r_n$  أعداد حقيقية.

فإن الحدث  $E_{r_1, \dots, r_n}$  يعتبر عنصراً في العائلة البورالية  $\beta$  (التي تمثل فراغ الأحداث لفراغ العينة  $S$ ) كما أن  $(X_1(e), \dots, X_n(e))$  يسمى "متغير عشوائي مشترك" مرافق للعائلة  $\beta_n$  أو "متغير عشوائي متعدد المركبات عدد مركباته  $n$ " أو "متغير عشوائي متعدد بورالي مقيس عدد مركباته  $n$ "  $r. v. n$  – dimensional measurable  $\beta$  وعادة نطلق عليه مجرد اسم "متغير عشوائي متعدد" للسهولة. كما أن احتمال أن المتغيرات العشوائية تحقق العلاقات  $X_i(e) \leq r_i$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$  يمكن الحصول عليها بدلالة احتمال تحقق المجموعة  $E_{r_1, \dots, r_n}$  المعطاة بالعلاقة (2.3.6) كما يلي:

$$P_{X_1, \dots, X_n}(X_1(e) \leq r_1, \dots, X_n(e) \leq r_n) = P(E_{r_1, \dots, r_n})$$

كذلك إذا كانت العائلة  $\beta_n$  هي عائلة المجموعات البورالية لكل المجموعات الجزئية للفراغ  $R_n$  وكانت المجموعة  $A_n$  تتبع العائلة  $\beta_n$  ( $A_n \in \beta_n$ ) – فإن المجموعة  $E$  التي تتكون من كل العناصر  $e$  لفراغ العينة  $S$  والتي تحقق العلاقة:

$$\{X_1(e), \dots, X_n(e)\} \in A_n$$

تكون هي الأخرى إحدى عناصر العائلة  $\beta$  ( $E \in \beta$ ) – أي أن  $A_n$  تعتبر صورة للمجموعة  $E$  كما أن  $E$  تعتبر الصورة العكسية للمجموعة  $A_n$  وبالتالي فإن:

$$P_{X_1, \dots, X_n}(A_n) = P(E)$$

وبهذا يمكن تحديد احتمال أي مجموعة  $A_n$  من عناصر العائلة  $\beta_n$  وذلك بتحديد احتمال المجموعة  $E$  (الصورة العكسية لـ  $A_n$ ) المناظرة لها في العائلة  $\beta$ . وبهذا يمكن أن نستبط فراغ الاحتمال  $(R_n, \beta_n, P_{X_1, \dots, X_n})$  من فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  بواسطة المتغيرات العشوائية  $X_1(e), \dots, X_n(e)$ .

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وإذا كانت العلاقة  $|X(e)| < C$  صحيحة - حيث  $C$  عدد حقيقي محدود ( $C < +\infty$ ) لكل عنصر  $e$  من عناصر فراغ العينة  $S$  فإن  $X(e)$  يسمى متغيراً عشوائياً محدوداً (a bounded r. v.) والمتغير العشوائى المتعدد الذى عدد مركباته  $n$  يكون محدوداً إذا كانت كل مركبة من مركباته محدودة. ويمكن توضيح مفهوم المتغير العشوائى المفرد وكذلك المشترك بتقديم بعض الأمثلة للتوضيحية.

مثال (2 - 3 - 1): عند إلقاء قطعتي عملة متزنة مرة واحدة يكون فراغ العينة هو:

$$S = \{TT, TH, HT, HH\}$$

حيث  $H$  ترمز للصورة،  $T$  للكتابة

$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

وحيث أن الأحداث البسيطة  $e_1, e_2, e_3, e_4$  متماثلة وشاملة ومتنافية فإن

$$P(\{e_1\}) = \dots = P(\{e_4\}) = \frac{1}{4}$$

وهذا يحدد دالة الاحتمال  $P$  المرافقة لفراغ العينة  $S$  ويمكن كذلك تحديد العائلة  $\beta$  التى تمثل فراغ الأحداث كما يلى:

$$\beta = \{\phi, \{e_1\}, \dots, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \dots, \{e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \dots, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\}$$

ويمكن باستخدام الدالة  $P(\cdot)$  حساب احتمال أى عنصر من عناصر العائلة  $\beta$  فمثلاً احتمال العنصر  $\{e_2, e_3\}$  هو احتمال الحصول على صورة واحدة:

$$P(\{e_2, e_3\}) = P(\text{one Head}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

وهكذا.

وبهذا يتحدد فراغ الاحتمال ( $S, \beta, P$ ) والذى يمكن بواسطته تحديد الاحتمال المخصص لأى عنصر من عناصر  $\beta$  (أى لأى مجموعة جزئية من  $S$ ). فإذا كان المتغير العشوائى  $X$  يمثل عدد الصور فإن:

$$X(e_1) = 0, \quad X(e_2) = X(e_3) = 1, \quad X(e_4) = 2$$

فيمكن تحديد فراغ العينة للمتغير العشوائى  $X(\cdot)$  بأنه

$$A = \{0, 1, 2\}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فإذا رمزنا لفراغ الاحتمال المرافق للمتغير العشوائي  $X$  بأنه  $(A, \beta_1, P_X(\cdot))$  فيمكن تحديد كل من  $\beta_1$ ،  $P_X(\cdot)$  كما يلي:  
 باستخدام العلاقة (2.3.5) نجد أن:

$$P_X(\{0\}) = P[X^{-1}(\{0\})] = P[e_1] = \frac{1}{4}$$

وبالمثل

$$P_X(\{1\}) = P[X^{-1}(\{1\})] = P[e_2] \cup [e_3] = \frac{1}{2}$$

$$P_X(\{2\}) = P[X^{-1}(\{2\})] = P[e_4] = \frac{1}{4}$$

ويمكن تلخيص قيم  $X(\cdot)$  والاحتمالات المناظرة في الجدول التالي:

$X(\cdot)$	0	1	2	$\Sigma$
$P_X(\cdot)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

والجدول السابق يوضح الطريقة التي توزع بها الدالة  $P_X(\cdot)$  الاحتمال الكلي السدى يعادل للوحدة على قيم المتغير العشوائي  $X$  وهو ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  كما سنوضح فيما بعد. ويمكن تحديد للعائلة  $\beta_1$  التي تتكون من كل المجموعات الجزئية البورالية للمجموعة  $A$  في الصورة التالية:

$$\beta_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

وباستخدام الدالة  $P_X(\cdot)$  يمكن تحديد الاحتمال لأي عنصر من عناصر العائلة  $\beta_1$  —  
 فمثلاً احتمال للعنصر  $\{0, 1\}$  هو:

$$P_X(\{0, 1\}) = P[X = 0 \text{ or } X = 1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

وهكذا بالنسبة لباقي عناصر  $\beta_1$ .

مما سبق يتضح أن فراغ الاحتمال المرافق لفراغ العينة  $A$  للمتغير  $X$  هو  $(A, \beta_1, P_X)$  وهذا الفراغ يمكن استنباطه من فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  المرافق لفراغ العينة  $S$ .

وسوف نقدم الآن مثال توضيحي لمنهضة حالة متغيرين والتي يمكن تعميمها إلى حالة أكثر من متغيرين.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

**مثال (2 – 3 – 2):** عند إلقاء قطعة عملة متزنة ثلاث مرات متتالية مع الاهتمام بالترتيب – إذا كان المتغير  $X_1$  هو عدد الصور في الرميّتين الأولى والثانية والمتغير  $X_2$  هو عدد الصور في الرميّات الثلاث. سنجد أن فراغ العينة هو:

$$S = \{TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

كما أن  $X_1, X_2$  يمكن اعتبارهما دالتين معرفتين على فراغ العينة  $S$  حيث أن:

$$X_1(e_1) = X_1(e_2) = 0 ; X_1(e_3) = X_1(e_4) = 1$$

$$= X_1(e_5) = X_1(e_6) = 1 ; X_1(e_7) = X_1(e_8) = 2$$

و

$$X_2(e_1) = 0 , X_2(e_2) = X_2(e_3) = X_2(e_4) = 1$$

$$; X_2(e_5) = X_2(e_6) = X_2(e_7) = 2 ; X_2(e_8) = 3.$$

إذن  $X_1, X_2$  دالتان حقيقتان وحيثما القيمة معرفتان على فراغ العينة  $S$  وينقلنا من فراغ العينة  $S$  إلى الفراغ التالي:

$$A = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3)\}$$

وهي مجموعة من النقاط في المستوى ذو البعدين. ولذلك نقول أن  $A$  هو الفراغ المرافق للمتغير الثنائي  $(X_1, X_2)$ . فإذا كانت المجموعة  $E$  تمثل مجموعة جزئية من  $A$  ( $E \subset A$ ) فإننا نرغب في حساب احتمال الحدث  $E$  والذي نرمز له بالرمز  $P\{(X_1, X_2) \in E\}$ . نفرض أن  $C$  هي المجموعة الجزئية التي تتكون من كل العناصر  $e$  لفراغ العينة  $S$  والتي تحقق العلاقات  $\{X_1(e), X_2(e)\} \in E$  أي:

$$C = \{e : \{X_1(e), X_2(e)\} \in E\}$$

إذن

$$(2.3.7): P_{X_1, X_2}(E) = P\{\{X_1(e), X_2(e)\} \in E\} = P[C].$$

حيث  $P$  هي دالة الاحتمال المعرفة في فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  وبالتالي يمكن استخدام دالة الاحتمال  $P_{X_1, X_2}(\cdot)$  لتحديد الاحتمال لأي مجموعة جزئية من الفراغ  $A$  – فإذا كانت  $E$  مجموعة جزئية من الفراغ  $A$  هي مثلاً:

$$(2.3.8): E = \{(0,1), (1,2)\}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ونرغب في حساب احتمال الحدث E سنجد من العلاقة (2. 3. 7) أن

$$P_{X_1, X_2}(E) = P(C)$$

حيث C تتكون من كل عناصر فراغ العينة S التي تكون فيها المتغيران  $(X_1, X_2)$  تحققان العلاقة  $(X_1, X_2) \in E$  وهذا يتحقق بالنسبة للعناصر التالية:

$$e_2 = TTH ; X_1(e_2) = 0, X_2(e_2) = 1$$

$$e_5 = THH ; X_1(e_5) = 1, X_2(e_5) = 2$$

$$e_6 = HTH ; X_1(e_6) = 1, X_2(e_6) = 2$$

$$\therefore C = \{e_2, e_5, e_6\}$$

$$(2. 3. 9): P_{X_1, X_2}(E) = P(C) = P[\{e_2, e_5, e_6\}] = \frac{3}{8}.$$

حيث أن دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  تخصص احتمال يساوي  $\frac{1}{8}$  لكل عنصر e من

عناصر فراغ العينة S. ويمكن إيجاد احتمالات كل عناصر الفراغ A ووضعها في الجدول التالي:

$(X_1, X_2)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	$\Sigma$
$P_{X_1, X_2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

وهذا الجدول يوضح الطريقة التي يمكن أن نستخدم بها دالة الاحتمال  $P_{X_1, X_2}$  لتوزيع الاحتمال الكلي الذي يساوي للوحدة على قيم المتغير الثنائي  $(X_1, X_2)$  وهو ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير الثنائي. ويمكن تحديد العائلة  $\beta_2$  التي تتكون من كل المجموعات الجزئية البورالية للفراغ A واستخدام الدالة  $P_{X_1, X_2}$  لتحديد احتمال أي عنصر من عناصر العائلة  $\beta_2$  مثل الاحتمال (2. 3. 9) الذي يحدد احتمال الحدث E المعطى بالعلاقة (2. 3. 8) ويتضح من ذلك أن فراغ الاحتمال المناظر لفراغ المتغير المشترك  $(X_1, X_2)$  والذي نرمز له بالرمز  $(A, \beta_2, P_{X_1, X_2})$  يمكن استنباطه من فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  المرافق لفراغ العينة S.

ولتبسيط الكتابة فإننا بدلا من أن نستخدم الرمز  $X(e)$  أو  $X(\cdot)$  للإشارة إلى المتغير العشوائي فإننا سنكتفي باستخدام الرمز X كما نستخدم الرمز  $P(E)$  بدلا من  $P_X(E)$  للإشارة إلى احتمال أن ينتمي المتغير العشوائي X للمجموعة E. ونفس الشيء بالنسبة للمتغير المشترك إذ أننا سوف نعتاد على استخدام الرمز  $(X_1, X_2)$  بدلا من  $(X_1(e), X_2(e))$  وكذلك

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$P[E]$  بدلا من  $P_{X_1, X_2}[E]$  وذلك لتبسيط الكتابة مادام معروف من سياق العرض أن  $P(E)$  هي دالة الاحتمال المرافقة للمتغير الثنائي  $(X_1, X_2)$  – وسوف نتبع هذا الاختصار في الكتابة بالنسبة لأي متغير مفرد أو متعدد. وعادة نرمز للمتغيرات العشوائية بالأحرف اللاتينية الكبيرة:

$X, Y, Z, U, V, T, R, \dots$

ونرمز لأي قيمة معينة من قيم المتغير العشوائي بالحرف اللاتيني الصغير المقابل – فإذا كان المتغير العشوائي هو  $Y$  فإن أي قيمة معينة منه يمكن أن نرمز لها بالحرف الصغير  $y$  وبالتالي فإن القيم الخاصة للمتغيرات العشوائية يمكن أن نرمز لها بالأحرف الصغيرة:

$x, y, z, u, v, t, r, \dots$

ومن تعريف المتغير العشوائي نرى أن مجاله عناصر فراغ العينة  $S$  ومجاله المقابل (مداه) يقع في مجموعة الأعداد الحقيقية  $R_1$  حيث أشرنا إلى أن المتغير العشوائي عبارة عن دالة حقيقية وحيدة القيمة تنقل من  $S$  إلى  $R_1$  أو هي علاقة من  $S$  إلى  $R_1$  أو بصورة رمزية  $R_1 \xrightarrow{X} S$  ومعنى ذلك أن مدى أي متغير عشوائي  $X$  يمكن تمثيله بمجموعة  $A$  تسمى بفراغ العينة للمتغير العشوائي  $X$  أو تسمى بفراغ المتغير العشوائي  $X$ . والمجموعة  $A$  قد تكون مجموعة جزئية من  $R_1$  وقد تشمل كل خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  أي أن  $A \subset R_1$ . فإذا كانت المجموعة  $A$  التي تمثل فراغ المتغير  $X$  تتميز بأنها تشمل على عدد محدود من النقاط على الأكثر في كل فترة محدودة في  $R_1$  فإن هذه المجموعة ( $A$ ) تسمى مجموعة من النقاط المنفصلة وأي متغير عشوائي  $X$  مداه مجموعة منفصلة  $A$  يسمى متغير منفصل أو متغير متقطع Discrete r. v. – أما إذا كانت المجموعة  $A$  تحتوي على عدد غير محدود من النقاط في كل فترة محدودة في  $R_1$  فإن هذه المجموعة ( $A$ ) تسمى مجموعة متصلة من النقاط وكذلك المتغير  $X$  يسمى متغير مستمر أو متغير متصل Continuous r. v.

وأي متغير عشوائي  $X$  يكون فراغه خط الأعداد  $R_1$  أو مجموعة جزئية منه وتكون له دالة الاحتمال  $P_X(\cdot)$  المعطاة بالعلاقة (2. 2. 2) والتي تحدد الاحتمال لكل مجموعة جزئية بوراليه في الفراغ  $R_1$ ، يكون فراغ الاحتمال لهذا المتغير هو  $(R_1, \beta_1, P_X)$  حيث  $\beta_1$  هي أصغر عائلة بوراليه عناصرها كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ  $R_1$ . وهنا نستخدم التحليل  $I$  للإشارة إلى أن كل من الفراغ  $R_1$  والعائلة  $\beta_1$  هما للمتغير المفرد  $X$  تمييزاً لهما عن الفراغ  $R_2$  والعائلة  $\beta_2$  اللتان تكونا للمتغير الثنائي  $(X_1, X_2)$  وكذلك  $R_n, \beta_n$  للمتغير المتعدد  $(X_1, \dots, X_n)$  كما سنقدم ذلك فيما بعد.

سبق أن ذكرنا أن الدالة (أو المتغير العشوائي)  $X$  تنقل من فراغ العينة  $S$  إلى خط الأعداد الحقيقية  $R_1$   $(R_1 \xrightarrow{X} S)$  وبناء على ذلك فإن لكل مجموعة من النقاط  $E$  في  $R_1$  يوجد مجموعة من النقاط (أو العناصر)  $C$  في  $S$  تتكون من كل عناصر  $S$  التي تحقق

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

العلاقة  $E \xrightarrow{x} C$  وهذا يمكن التعبير عنه رمزياً بصورة مناسبة كما سبق القول على النحو التالي:

$$X^{-1}(E) = C$$

حيث  $E$  تسمى صورة المجموعة  $C$  والمجموعة  $C$  تسمى الصورة العكسية للمجموعة  $E$ . وباستخدام هذا الترميز يمكن وضع التعريف المرافق التالي للمتغير العشوائي:

### (2 - 4) تعريف المتغير العشوائي (II):

الدالة  $X$  تسمى متغيراً عشوائياً، إذا وفقط إذا، كان:

$$X^{-1}(-\infty, x] \in \beta$$

لجميع الأعداد الحقيقية  $x$ .

حيث  $\beta$  هي فراغ الأحداث المناظر لفراغ العينة  $S$ ،  $(-\infty, x]$  هي مجموعة النقاط على خط الأعداد الحقيقية من  $-\infty$  وحتى  $x$  حيث  $x$  عدد حقيقي يمثل إحدى قيم المتغير العشوائي  $X$ .

ذكرنا سابقاً أن فراغ الاحتمال  $(R_1, \beta_1, P_x)$  للمتغير العشوائي  $X$  يتم استنباطه من فراغ الاحتمال  $(S, \beta, P)$  المرافق لفراغ العينة  $S$  وذلك لاستخدامه في تحديد احتمال كل عنصر من عناصر العائلة  $\beta_1$  التي تمثل كل المجموعات الجزئية البورالية للفراغ  $R_1 -$  ومن أهم المجموعات الجزئية البورالية في الفراغ  $R_1 -$  بل أهم هذه المجموعات على الإطلاق - هي المجموعة (أو الفترة) التالية:

$$(2.4.1): E_x = \{X : X \leq x\} = (-\infty, x]$$

وهي الفترة التي تتكون من جميع النقاط على خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  من  $-\infty$  وحتى قيمة معينة  $x$ . واحتمال هذه المجموعة يعتبر دالة في  $x$  وهي دالة من أهم الدوال التي تستخدم في نظرية التوزيعات في الإحصاء الرياضي لأهمية استخدامها في توزيع الاحتمال الكلي على فراغ المتغير العشوائي وتحديد الاحتمال لكل مجموعة جزئية بورالية في هذا الفراغ - لذلك يوضع لهذه الدالة تسمية خاصة ويستخدم للإشارة إليها رمز خاص - فيطلق عليها اسم 'دالة التوزيع الاحتمالي' Probability Distribution Function (D. F.) لأهمية استخدامها في توزيع الاحتمال ويستخدم لها غالباً الرمز  $F(x)$  لأنها دالة في القيمة  $x$  التي تعتبر إحدى قيم المتغير العشوائي  $X$ . لذلك سنقدم فيما يلي تعريف وخصائص دالة التوزيع الاحتمالي لكل من:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

أولاً: المتغير المفرد (المنقطع والمستمر والمختلط)

ثانياً: المتغير المتعدد

كما سنقدم دالة أخرى شديدة الاتصال بدالة التوزيع الاحتمالي تسمى 'دالة كثافة الاحتمال' Probability Density Function للمتغير المستمر أو 'دالة الاحتمال' Probability Function للمتغير المنقطع.

### (2 - 5) دوال التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المفردة:

#### Distribution Functions of One - dimensional Random Variable:

##### (2 - 5 - 1) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المفرد:

نفرض أن  $X$  متغير عشوائي فراغه الاحتمالي  $(R_1, \beta_1, P_X)$  - حيث  $R_1$  خط الأعداد الحقيقية و  $\beta_1$  أصغر عاقلة بوراليه عناصرها كل المجموعات الجزئية البوراليه للفراغ  $R_1$  و  $P_X$  دالة الاحتمال المرافقة للمتغير  $X$ . سنرى أن توزيع الاحتمال الكلي على فراغ المتغير  $X$  في  $R_1$  يمكن أن يتم باستخدام دالة تسمى 'دالة التوزيع الاحتمالي' "Distribution Function"  $F(x)$  للمتغير المفرد  $X$  معرفة عند كل نقطة في الفراغ  $R_1$  ولها خصائص معينة. لذلك سنعرف أولاً دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  ثم نقدم خصائصها بعد ذلك. وسنستخدم الرمز  $Pr$  للدلالة على الاحتمال بدلاً من الرمز  $P$  حيث يخصص الرمز  $P$  للإشارة إلى دالة احتمال المتغير المنقطع.

##### تعريف (2 - 5 - 1) دالة التوزيع الاحتمالي:

لأي فترة  $[-\infty, x]$  على خط الأعداد  $R_1$  - والتي تعبر عنصراً من عناصر العاقلة  $\beta_1$  - يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير العشوائي  $X$  كما يلي:

$$(2.5.1): F(x) = Pr(X \leq x)$$

لأي عدد حقيقي  $x$ .

ومن التعريف السابق يتضح أن  $F(x)$  دالة حقيقية وحيدة القيمة وغير سالبة لجميع قيم  $x$  في الفراغ  $R_1$  وهي دالة نقطة وليست دالة مجموعة.

نرى مما تقدم في البنود (2 - 2) حتى (4 - 2) أن أي متغير عشوائي  $X$  يكون له توزيع احتمالي معين في الفراغ  $R_1$ . والاحتمال الكلي الذي يساوي الوحدة يمكن تمثيله ملأياً بتوزيع كتلة (من مادة ما) وزنها يساوي الوحدة (وحدة الوزن) على جميع نقاط الفراغ  $R_1$  بطريقة ما بحيث أن الكمية  $P(E)$  تكون هي تلك الجزء من الكتلة التي تخصص بها المجموعة البوراليه  $E$  ( $E \subset R_1$ ) وهذه الكمية تمثل احتمال أن المتغير العشوائي  $X$  يأخذ قيمة تقع داخل المجموعة  $E$ . كما أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  تمثل ذلك الجزء



## الفصل الثامن – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

من الكتلة الذى تختص به الفترة  $(-\infty, x]$  وهو طبعاً كسر أقل من أو يساوى الواحد الصحيح.

وفى الواقع أمامنا أحد أسلوبين مترادفين لتوزيع الاحتمالي الكلى (الذى يساوى الوحدة) للمتغير العشوائى. الأول باستخدام دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  والتى تسمى دالة احتمال المتغير العشوائى والمعرفة بالعلاقة (2. 2. 2) وهى دالة مجموعة والثانى باستخدام دالة نقطة هى دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  والمعرفة بالعلاقة (2. 5. 1). ولكننا فى الواقع سوف نستخدم دائماً دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  لتوزيع الاحتمال الكلى للمتغير العشوائى على المجموعات الجزئية البورالية للفراغ  $R_1$ . ومما هو جدير بالذكر أن الأسلوبين مترادفين ومتكافئين وذلك لوجود علاقة تبادل وحيدة  $(1 - 1)$  بين دالة الاحتمال  $P(\cdot)$  ودالة التوزيع الاحتمالى  $F(\cdot)$  لآى متغير عشوائى  $X$ . وسنقدم فيما يلى خصائص دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  وبعد ذلك نقدم مثالين توضيحيين نستعرض من خلالهما دالة توزيع احتمالى لمتغير منقطع وأخرى لمتغير مستمر حتى يساعد ذلك على سهولة عرض وفهم خصائص دالة التوزيع الاحتمالى بصفة عامة، ولكن قبل ذلك نقدم الملاحظة التالية:

**ملاحظة (2 - 5 - 1):** المجموعات الخطية التى نهتم بها والتى سنواجهها طوال دراستنا فى بقية هذا الكتاب (والتي تعتبر مجموعات جزئية من خط الأعداد الحقيقية  $R_1$ ) كلها مجموعات بورالية مقبسة – وكذلك الدوال التى سوف نتناولها فى بقية هذا الكتاب كلها دوال بورالية مقبسة – لذلك سنكتفى دائماً فى بقية هذا الكتاب بذكر كلمة مجموعة (أو دالة) دون أن نذكر صراحة أن المجموعة (أو الدالة) بورالية مقبسة (إلا إذا دعت الحاجة لذلك) وذلك يجب أن يكون مفهوم دائماً دون ذكره صراحة.

### 2 - 5 - 2) خصائص دالة التوزيع الاحتمالى Properties of The Distribution Function

دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  للمتغير العشوائى المفرد  $X$  تتميز بالخصائص التالية:

(1)  $F(x)$  دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة وتتحصر بين الصفر والواحد الصحيح.

وذلك لأن من العلاقة (2. 5. 1) نرى أن

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

والدالة  $\Pr(\cdot)$  دالة احتمال فهى حقيقية وحيدة القيمة موجبة وتتحصر بين الصفر والواحد الصحيح كما يتضح من التعريف الحديث للاحتمال فى الباب الأول.

$$(2) \quad F(-\infty) = 0 \quad ; \quad F(+\infty) = 1 \quad (2. 5. 2)$$

وذلك لأنه:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

بإستخدام المجموعة  $E_x$  المعطاة بالعلاقة (2. 4. 1) نجد أن:

$$E_{-1} \supset E_{-2} \supset \dots$$

وهي مجموعات مضطردة (غير تزايدية) لها نهاية موجودة هي المجموعة الفارغة  $\phi$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E_{-x} = \phi$$

وبإستخدام العلاقة (1. 13. 12) نجد أن:

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} F(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \Pr(E_{-x}) \\ &= \Pr\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} E_{-x}\right) = \Pr(\phi) = 0 \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن  $F(+\infty) = 1$  إذا اعتبرنا المجموعات المضطردة غير التناقصية

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

حيث

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E_x = R_1.$$

$$\begin{aligned} F(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Pr(E_x) \\ &= \Pr\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} E_x\right) = \Pr(R_1) = 1. \end{aligned}$$

(3)  $F(x)$  دالة غير تناقصية Non - decreasing Function  $F(x)$ :

أى أنه إذا كانت  $a < b$  فإن

$$(2. 5. 3): F(b) \geq F(a) ; a < b$$

وذلك لأن من (2. 5. 1)

$$\begin{aligned} (2. 5. 4): F(b) - F(a) &= \Pr(-\infty < X \leq b) - \Pr(-\infty < X \leq a) \\ &= \Pr(a < X \leq b) \geq 0 \end{aligned}$$

إن

$$F(b) \geq F(a)$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(4) دالة مستمرة من ناحية اليمين عند كل قيم المتغير العشوائي  $X$ :

The Function  $F(x)$  is Continuous on the Right at each Value of  $X$ :

أى أن:

$$(2.5.5): F(x+0) = F(x)$$

$$F(x-0) \leq F(x)$$

[حيث  $x+0$  تعتبر (تصورياً) النقطة التالية مباشرة للنقطة  $x$  من ناحية اليمين و  $x-0$  هي السابقة لها مباشرة من ناحية اليسار.]  
(الإثبات)

من العلاقة (2.5.1) نرى أن:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \Pr(E_x)$$

حيث  $E_x$  هي الفترة  $(-\infty, x]$  وباستخدام العلاقة (1.13.12) نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = \Pr\left(\lim_{x \rightarrow a+0} E_x\right) = \Pr(E_{a+0}) = F(a+0)$$

أى أن:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = F(a+0)$$

وبالمثل:

$$(2) \lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a-0)$$

وبما أن الدالة  $F(x)$  دالة غير تناقصية إذن

$$(3) F(a-0) \leq F(a+0)$$

ولأى قيمة  $x$  عندما  $x > a$  تكون:

$$(4) F(x) - F(a) = \Pr(a < X \leq x) = \Pr(I_x)$$

حيث

$$(5) I_x = \{X : a < X \leq x\}$$

## الفصل الثّاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وعندما تأخذ  $x$  قيم متناقصة مقترية من النقطة  $a$  تكون  $I_x$  متتابعة من المجموعات المضطردة التناقصية لها نهاية محددة عندما  $a \leftarrow x$  هي

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} I_x = \phi \quad (\text{المجموعة الفارغة})$$

ومن العلاقة (12، 13، 1) من الباب الأول نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow a} \Pr(I_x) = \Pr(\lim_{x \rightarrow a} I_x)$$

ومن (4)، (5) مع العلاقة السابقة نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow a} (F(x) - F(a)) = \Pr(\lim_{x \rightarrow a} I_x) = \Pr(\phi) = 0$$

ومن (4)، (1) - مع الأخذ في الاعتبار أن  $x > a$  - نجد أن العلاقة السابقة تصبح:

$$F(a+0) - F(a) = 0$$

إن:

$$(7) F(a+0) = F(a)$$

وبالمثل عندما  $X < a$  تكون:

$$F(a) - F(x) = \Pr(x < X \leq a)$$

وبما أن:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{x : x < X \leq a\} = \{a\}$$

أي أن نهاية الفترة  $(x, a]$  عندما  $x \rightarrow a$  تكون هي المجموعة  $\{a\}$  التي تتكون من نقطة واحدة هي النقطة  $X = a$  - وهذا على خلاف العلاقة (6) السابقة - إذن يمكن بأسلوب مماثل لما سبق أن نصل إلى أن:

$$(8) F(a) - F(a-0) = \Pr(X = a)$$

أو أن:

$$(9) F(a-0) = F(a) - \Pr(X = a) \leq F(a)$$

من (7)، (9) نرى أن الدالة  $F(x)$  دائماً مستمرة من ناحية اليمين.

هـ. ط. ث.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ملاحظة (2-5-2): بكتابة العلاقة (8) في الإثبات السابق في الصورة التالية:

$$(2.5.6): Pr(X = x) = F(x) - F(x-0).$$

نرى أنه إذا كانت  $Pr(X = x) > 0$  تكون الدالة  $F(x)$  غير مستمرة عند النقطة  $X = x$  — وتقفز الدالة عند هذه النقطة بقدر تساوي الاحتمال  $Pr(X = x)$  — أما إذا كانت  $Pr(X = x) = 0$  تكون الدالة  $F(x)$  مستمرة عند هذه النقطة.

يمكن الآن تلخيص ما سبق في التعريف التالي:

تعريف (2-5-2) دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير المفرد  $X$  وتحديد خصائصها:

من فراغ الاحتمال  $(R_1, \beta_1, P)$  للمتغير العشوائي المفرد  $X$  يمكن تحديد دالة حقيقية وحيدة القيمة وغير سالبة تسمى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$(2.5.7): F(x) = Pr(X \leq x)$$

وذلك لجميع قيم  $x$  في خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  وتتميز بالخصائص التالية:

$$(2.5.8): (a) F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$$

$$(b) F(b) \geq F(a)$$

عندما  $b > a$  لجميع الأعداد الحقيقية  $a, b$  ( $a < b$ )

$$(c) F(x+0) = F(x)$$

$$F(x-0) \leq F(x)$$

أي أن الدالة مستمرة من ناحية اليمين.

بعد تقديم دالة التوزيع الاحتمالي وتحديد خصائصها في البند السابق (2-5-5) سنتعامل مع نوعين أساسيين من المتغيرات العشوائية المفردة هما: المتغيرات المنقطعة والمتغيرات المستمرة — كما يوجد نوع آخر أقل منهما في العمومية هي المتغيرات العشوائية المختلطة وهو كما يبدو من التسمية خليط من النوعين المنقطع والمستمر. وسنقدم كل نوع من هذه الأنواع الثلاثة على حده. وحيث أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  وكذلك الاحتمالات المختلفة  $P(E)$  للمجموعات الجزئية المختلفة  $E$  من فراغ المتغير العشوائي يمكن الحصول عليها باستخدام دالة معينة تسمى دالة كثافة الاحتمال، لذلك سنقدم أيضاً دالة التوزيع الاحتمالي وكذلك دالة كثافة الاحتمال والعلاقة بينهما واستخدام كل منهما في حساب الاحتمالات المختلفة بالنسبة لكل نوع من الأنواع الثلاثة (المنقطعة والمستمرة والمختلطة) في البنود (2-6) و(2-7) و(2-8) على الترتيب.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 – 6) دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي

#### المتقطع Distribution Function & Density Function of The

Discrete r. v.:

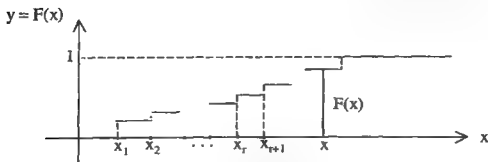
دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير المتقطع  $X$  تسمى دالة توزيع احتمالي من النوع المتقطع – وهي دالة مستمرة من ناحية اليمين فقط (أي أن استمرارها ليس مطلقاً) – فهي غير مستمرة عند مجموعة من النقاط  $S$  على خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  (تمثل مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير  $X$ ) هذه المجموعة  $(S)$  تكون على أكثر تقدير مجموعة قابلة للعد (أي أن عدد نقاط  $S$  إما محدود أو لانهائي قابل للعد) وذلك لأي متغير عشوائي متقطع  $X$  – وكل نقطة  $x$  من نقاط المجموعة  $S$  تمثل حدث بسيط احتماله موجب أي أن:

$\Pr(X = x) > 0$  عندما  $x \in S$  وهذا الاحتمال معطى بالعلاقة (2.5.6) كما يلي:

$$\Pr(X = x) = F(x) - F(x-0)$$

وعند أي نقطة أخرى  $x'$  في  $R_1$ ،  $\Pr(X = x') = 0$ .

وهذا يوضح أن قيمة الاحتمال  $\Pr(X = x)$  عند نقاط المجموعة  $S$  يساوى الفرق بين قيمة دالة التوزيع الاحتمالي عند النقطة  $x$  وقيمتها عند النقطة التي تسبق  $x$  مباشرة مما نعبر عنه بالقول أن عند النقطة  $x$  تقفز دالة التوزيع الاحتمالي قفزة (فجائية) تساوى قيمة الاحتمال  $\Pr(X = x)$ ، وبالتالي فإن نقاط المجموعة  $S$  تعتبر نقاط عدم استمرار لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$ ، لأنها نقاط قفزات، حيث نجد أن شكل الدالة  $F(x)$  يكون موازياً للمحور الأفقي (محور  $x$ ) بين نقاط هذه المجموعة ثم تقفز قفزة فجائية عند كل نقطة  $x$  من نقاط هذه المجموعة تعادل احتمال هذه النقطة. وشكل الدالة  $F(x)$  يأخذ شكل السلم (الدرج) لذلك فإن الدالة  $F(x)$  للمتغير المتقطع  $X$  تسمى "دالة درجيه" "Step function" – أو "دالة قفازة" وتأخذ الشكل التالي:



شكل (2-6-1)  
دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير متقطع

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

حيث  $x_1, x_2, \dots$  هي نقاط المجموعة  $S$  التي أشرنا إليها وهي مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير المنقطع  $X$  (ولا يمكن أن يأخذ قيم أخرى غيرها) وتسمى "نقاط القفز" "Jump Points" أو "نقط الاحتمال" "Probability Points" والاحتمالات عند هذه النقاط هي "القفزات". والاحتمال عند النقطة  $x$  ( $\Pr(X = x)$ ) يسمى بـ "دالة الاحتمال" "Probability Function" أو بـ "دالة كثافة الاحتمال" "Probability density function" للمتغير المنقطع  $X$  عند النقطة  $x$  وهي تعادل "القفز" التي تحدث في الدالة  $F(x)$  عند النقطة  $x$ . وسنرمز لدالة كثافة الاحتمال عند النقطة  $x_i$  بالرمز  $P_i$  أو  $P(x_i)$  — ويمكن الآن تلخيص ما سبق في التعريف التالي:

(2 - 6 - 1) المتغير العشوائي المنقطع:

تعريف (2 - 6 - 1): يقال أن المتغير العشوائي  $X$  من النوع المنقطع إذا كان يأخذ، باحتمال يساوي لواحد الصحيح، قيم  $x$  تنتمي إلى مجموعة  $S$  ( $S \subset R_1$ ) تتكون من، عدد محدود أو على الأكثر قابل للعد، من النقاط. وكل قيمة  $x$  (أو نقطة) في  $S$  يكون عندها الاحتمال موجب ( $\Pr(X = x) > 0$ ).

وعلى هذا يقال أن المتغير العشوائي  $X$  من النوع "المنقطع" "Discrete" إذا كان يأخذ مجموعة من القيم  $S$  تتكون من عدد محدود finite أو لانهاى قابل للعد countable من النقاط لتكن:

$$S = \{x_1, x_2, \dots\}$$

وعند كل نقطة  $x_i$  من نقاط  $S$  يكون احتمال أن يأخذ المتغير  $X$  هذه النقطة احتمال موجب هو:

$$\Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i > 0$$

هذه الاحتمالات تسمى "قفزات". كما أن نقاط المجموعة  $S$  تسمى "نقط الاحتمال" أو قيم المتغير العشوائي  $X$  أو "مدى المتغير العشوائي المنقطع  $X$ "، وهي مجموعة النقاط التي يأخذها المتغير المنقطع  $X$  ولا يمكن أن يأخذ غيرها وهذا ما نعبّر عنه في التعريف السابق بأن  $X$  يأخذ هذه النقاط باحتمال يساوي الواحد الصحيح، أى أنه لا يأخذ قيمة خارج هذه المجموعة  $S$ . واحتمال أن يأخذ المتغير  $X$  قيمة معينة  $x_i$  (إحدى قسيم  $S$ ) هو الذى نرمز له بالرمز:

$$\Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i > 0$$

والدالة  $P(x_i)$  أو  $P_i$  تسمى "دالة احتمال المتغير المنقطع  $X$  عند النقطة  $x_i$ " (Probability function of  $X$  at  $x_i$ ) أو تسمى "دالة كثافة احتمال المتغير المنقطع  $X$  عند النقطة  $x_i$ " (Probability density function of  $X$  at  $x_i$ ) وهى دالة موجبة. ومما سبق يمكن أن نستنتج ما يلي:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

إذا كان  $X$  متغير عشوائي من النوع المنقطع يأخذ القيم  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) باحتمالات  $P(x_i)$  (أو  $P_i$ ) فإنه طبقاً للتعريف (2 - 6 - 1) السابق يكون:

$$(2. 6. 1): \sum_i P_i = 1$$

والمجموع مأخوذ على جميع قيم  $x_i$  التي يأخذها المتغير  $X$ .

ويمكن الآن تعريف دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع كما يلي:

(2 - 6 - 2) دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  ودالة كثافة الاحتمال  $P_i$  للمتغير المنقطع  $X$  والعلاقة بينهما:

تعريف (2 - 6 - 2): إذا كان  $X$  متغير عشوائي منقطع يأخذ عدد محدود أو قابل للعد من القيم:  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) - فإن:

أولاً:

احتمال أن المتغير  $X$  يأخذ القيمة  $x_i$  يسمى "دالة احتمال" أو "دالة كثافة احتمال" المتغير المنقطع  $X$  عند النقطة  $x_i$  التي تسمى نقطة احتمال وتكتب في الصورة:

$$(2. 6. 2a): Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i$$

لجميع قيم  $i$  وتحقق العلاقة:

$$(2. 6. 2b): P_i > 0 \quad , \quad \sum_i P_i = 1$$

ثانياً:

دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لنفس المتغير المنقطع  $X$  تأخذ الصورة:

$$(2. 6. 3): F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} P_i$$

أن المجموع مأخوذ على جميع قيم  $i$  التي عندها  $x_i \leq x$ .

والعلاقة (2. 6. 3) توضح كيفية الحصول على  $F(x)$  باستخدام دالة الاحتمال  $P_i$  - كما أن العلاقة (2. 5. 6) توضح كيفية الحصول على  $P_i$  باستخدام  $F(x)$ . حيث نجد أن:

$$(2. 6. 4): P_i = Pr(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 0) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

(حيث  $F(x_i - 0)$  تساوى  $F(x_{i-1})$ )



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وبذلك يمكن إيجاد  $P_i$  من  $F(x)$  عند جميع نقط الاحتمال  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) من العلاقة السابقة وخلاف ذلك  $P_i = 0$ .

من التعريف السابق ومن العلاقة (4. 6. 2) يتضح أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير العشوائي المنقطع  $X$  تتحدد بصفة وحيدة باستخدام دالة الاحتمال  $P(x_i)$  والعكس صحيح.

(2- 6- 3) حساب احتمال أن ينتمي المتغير المنقطع  $X$  إلى المجموعة  $E$ :

احتمال أن لمتغير العشوائي المنقطع  $X$  ينتمي إلى المجموعة  $E$  هو:

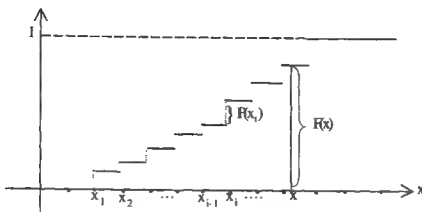
$$(2. 6. 5): \Pr\{X \in E\} = \sum_{i: x_i \in E} P(x_i)$$

حيث أن المجموع  $\Sigma$  مأخوذ على جميع قيم  $x_i$  التي تنتمي للمجموعة  $E$ ،  $P(x_i)$  هي دالة كثافة احتمال المتغير  $X$  عند نقط الاحتمال  $x_i$  التي تنتمي إلى المجموعة  $E$ .

عند التعامل مع المتغير العشوائي المنقطع  $X$  يكون واضحاً من سياق العرض ما هي نقط الاحتمال – أي ما هي القيم التي يأخذها المتغير  $X$  – ولذلك لن يكون هناك أي غموض إذا أهملنا الدليل  $i$  عند الإشارة إلى الاحتمال  $P(x_i)$  فيمكن الاكتفاء بكتابة دالة الاحتمال في الصورة  $P(x)$ ، فيمكن الإشارة إلى دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي المنقطع  $X$  بالرمز  $P(x)$  عندما يكون الهدف هو مجرد الإشارة إلى دالة كثافة الاحتمال دون الحاجة إلى تحديد الاحتمال عند نقطة معينة بذاتها. ولكن إذا لزم الأمر تحديد الاحتمال عند نقطة معينة  $x_i$  فنرمز لدالة كثافة الاحتمال عند هذه النقطة بالرمز  $P(x_i)$  أو مجرد  $P_i$ ، وتكون هي نفسها الاحتمال عند هذه النقطة. ومن الناحية العملية نرى أن استخدام دالة كثافة احتمال المتغير المنقطع – الدالة  $P(x)$  – يكون أكثر سهولة ويسراً في حساب الاحتمالات المختلفة من استخدام دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$ .

ويمكن تمثيل دالة لتوزيع الاحتمالي  $F(x)$  بيانياً للمتغير العشوائي المفرد المنقطع  $X$  بخط بياني لدالة درجيه (على شكل درج أو سلم) لها قفزات عند النقط  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) تعادل القيم أو الاحتمالات  $P(x_i)$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$  على الترتيب. كما يتضح من شكل (2- 6- 2) التالي.

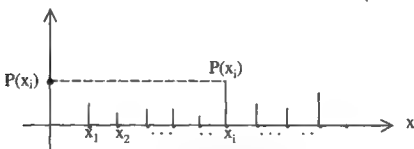
## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي



شكل (2 - 6 - 2)

دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لمتغير مفرد منقطع

كما أن دالة كثافة الاحتمال  $P(x)$  لنفس المتغير المنقطع  $X$  الذي له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  الموضحة بالشكل (2 - 6 - 2) - يمكن تمثيلها بيانياً بخطوط عمودية عند نقط الاحتمال  $x_i$  بحيث يكون الخط العمودي على النقطة  $x_i$  طوله يساوي  $P(x_i)$ ، أي يساوي الاحتمال عند هذه النقطة، لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$  على الترتيب كما يتضح من شكل (3 - 6 - 2).



شكل (3 - 6 - 2)

دالة كثافة الاحتمال  $P(x)$  لمتغير مفرد منقطع

(4 - 6 - 2) المتغير المفرد المنقطع: The Degenerate r. v.

لو كانت دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير المنقطع  $X$  لها قفزة واحدة، لنكن عند نقطة الاحتمال  $x = c$  فإن المتغير  $X$  يسمى متغير عشوائي "متلاشي أو منمذج"  $P(c)$ ، وسنرمز لدالة توزيعه الاحتمالي برمز خاص هو: "Degenerate" r. v.

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(2. 6. 6a): F_c(x) = \begin{cases} 1 & x \geq c \\ 0 & x < c \end{cases}$$

وتكون دالة كثافة احتماله هي:

$$(2. 6. 6b): P(x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & x \neq c \end{cases}$$

إذن:

$$(2. 6. 6c): \Pr(X = c) = 1$$

أى أن الاحتمال الكلى للمتغير العشوائى  $X$  يتركز عند نقطة واحدة  $x = c$ ، هي نقطة الاحتمال الوحيدة لهذا المتغير كما أنها هي نقطة للتزايد الوحيدة لدالة التوزيع الاحتمالي  $F_c(x)$  كما أن:

$$(2. 6. 6d): F(c+0) - F(c-0) = 1$$

ويمكن التعبير عن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  المعطاة بالعلاقة (2. 6. 3) باستخدام الدالة (.)  $\in$  المعطاة بالعلاقة (2. 6. 6a) كما يلي:

$$(2. 6. 7): F(x) = \sum_i P(x_i) \in (x - x_i)$$

وهذا يوضح أن المجموع مأخوذ على جميع قيم  $i$  التى تحقق العلاقة  $x_i \leq x$ ، لأنه طالما  $x_i \leq x$  تكون  $(x - x_i) = 1$  ولكن عندما تزيد  $x_i$  عن قيمة  $x$  فإن  $(x - x_i) = 0$ .

يمكن تقديم العديد من الأمثلة لدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المفرد، وسنقدم فى باب التوزيعات الاحتمالية أمثلة على ذلك لأهم المتغيرات العشوائية المنقطعة ولكننا الآن نقدم المثال البسيط التالى:

مثال (2 - 6 - 1): إذا كان  $X$  متغير عشوائى منقطع يمثل عدد الصور عند إلقاء قطعة عملة متزنة مرة واحدة - نجد من مثال (2 - 3 - 1) أن نقط الاحتمال للمتغير العشوائى  $X$  هى  $x_1, x_2, x_3$  حيث  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$  وأن دالة كثافة الاحتمال  $P(x)$  عند نقط الاحتمال  $x_1, x_2, x_3$  هى:

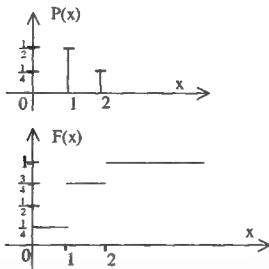
$$P(x_1) = \frac{1}{4}, \quad P(x_2) = \frac{1}{2}, \quad P(x_3) = \frac{1}{4}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  هي:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x < 0 \\ &= \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ &= \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ &= 1, & x \geq 2 \end{aligned}$$

ويمكن تمثيل دالة كثافة الاحتمال  $P(x)$  ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  كما يلي:



نذكرنا أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  - بصفة عامة - مستمرة من ناحية اليمين - كما أن كل نقطة (أو قيمة)  $x$  من قيم المتغير العشوائي  $X$  يكون عندها  $\Pr(X = x) > 0$  تعتبر نقطة عدم استمرار للدالة  $F(x)$  أو نقطة قفز Jump point، حيث تقفز الدالة  $F(x)$  عند هذه النقطة قفزة تعادل الاحتمال  $\Pr(X = x)$  - وهذا هو ما يحدث في حالة المتغيرات المتقطعة - ونقط عدم الاستمرار هذه (إن وجدت) تشكل مجموعة محدودة من النقاط finite أو قليلة للعد countable على أكثر تقدير، وهذا ما تنص عليه النظرية التالية:

نظرية (2-6-4):

نقط عدم الاستمرار لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لأي متغير عشوائي متقطع تشكل (على أكثر تقدير) مجموعة قليلة للعد. (قظر تمرين (2-28)).

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لذلك عند تعريف المتغير العشوائي المنقطع  $X$  ذكرنا أن المتغير  $X$  يأخذ، باحتمال يساوى الواحد الصحيح، عدد محدود أو قابل للعد (على الأكثر) من القيم، وكل قيم المتغير العشوائي  $x$  التي يكون عندها  $Pr(X = x) = 0$  تعتبر نقاط استمرار للدالة  $F(x)$ . فإذا كانت  $F(x)$  مستمرة عند جميع نقاط (أو قيم) المتغير العشوائي  $X$  فإن هذا المتغير لا يكون له نقاط قفز وتكون الدالة  $F(x)$  مستمرة من كل اتجاه وليس من ناحية اليمين فقط Everywhere Continuous — ومنهتج أساساً بمجموعة خاصة (Special Class) من هذه المتغيرات العشوائية تسمى بالمتغيرات العشوائية المستمرة وسنقدم فيما يلي تعريف لدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المستمرة.

### (2 - 7) دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي

**المستمر Distribution Function and Density Function of Continuous Random Variable:**

نتناول الآن حالة المتغير العشوائي  $X$  الذي ليس له قفزات ويمكن أن يأخذ أى قيمة فى مدى تغيره ودالة توزيعه الاحتمالي مستمرة من كل اتجاه (Everywhere Continuous) — أى ليس بها قفزات. وسوف نهتم أساساً بمجموعة خاصة من مثل هذه المتغيرات تسمى المتغيرات العشوائية المستمرة، أخذين فى الاعتبار ما سبق تقديمه فى البند (2 - 5) عن تعريف دالة التوزيع الاحتمالي وخصائصها.

#### (2 - 7 - 1) تعريف المتغير العشوائي المستمر (I):

يعتبر المتغير العشوائي  $X$  من النوع المستمر إذا كان يأخذ — باحتمال يساوى الواحد الصحيح — مجموعة من القيم  $S$  (على الخط الحقيقي  $R_1$ ) تشكل مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد Uncountable ودالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  دالة مستمرة (من كل اتجاه) لا يوجد بها قفزات.

ويجدر أن ننبه القارئ أن التعريف السابق يعتمد على سبق تعريف دالة التوزيع الاحتمالي وخصائصها كما فى البند (2 - 5) ويمكن أن نقدم الآن تعريفاً آخر أكثر تفصيلاً للمتغير العشوائي يعتمد على سبق معرفتنا لدالة التوزيع الاحتمالي مع تقديم دالة أخرى هى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر.

#### (2 - 7 - 2) تعريف المتغير العشوائي المستمر (II):

يعتبر المتغير العشوائي  $X$  متغيراً مستمراً أو متصلأ Continuous r. v. إذا كانت دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  مستمرة من كل اتجاه، لا يوجد بها قفزات، وإذا كان يوجد دالة  $f(x)$  غير سالبة وتكاملية على كل الخط الحقيقي  $R_1$  تسمى دالة كثافة احتمال المتغير  $X$ ، (P. d. f. of  $X$ ) (Probability Density Function of  $X$ ) بحيث أن لكل عدد حقيقي  $x$  تكون دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  مطاة بالعلاقة التالية:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(2.7.1): F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

وفي هذه الحالة تكون المشتقة التفاضلية  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  موجودة

ومستمرة عند جميع قيم  $x$  على الخط الحقيقي  $R_1$  - (وإذا وجد نقط عدم استمرار فإنها تشكل مجموعة محدودة أو قابلة للعد من قيم  $x$ ) - وعند جميع نقط استمرار المشتقة التفاضلية  $F'(x)$  تكون دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  هي هذه المشتقة التفاضلية:

$$(2.7.2): f(x) = F'(x).$$

والتعريف السابق يشترط أن تكون دالة كثافة احتمال المتغير المستمر موجودة ومستمرة عند جميع قيم المتغير ما عدا (من الممكن) عند مجموعة قابلة للعد من هذه القيم. وهذا الشرط لا يعتبر قيداً مضيقاً لنطاق مجموعة الدوال التي يمكن اعتبارها دوال كثافات احتمال لمتغيرات مستمرة وذلك لأن جميع الدوال التي تصادفنا في التطبيق والتي يمكن اعتبارها دوال كثافات احتمال لمتغيرات مستمرة تكون جميعها دوال موجودة ومستمرة عند جميع قيم المتغير - مع إمكانية وجود عدد محدود على الأكثر من نقط عدم الاستمرار.

وبهذا فإن كل دوال كثافات الاحتمال التي تصادفنا في التطبيق لا تتعارض مع هذا الشرط. ودالة كثافة الاحتمال أحياناً نكتفي بالإشارة إليها بلفظ مختصر هو "دالة الكثافة". Density function.

(2-7-3): يمكن حساب احتمال تحقق حدث معين باستخدام كل من دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  في حالة المتغير المستمر، باستخدام نظرية (1-13-3) من الباب الأول - حيث نجد لأي عددين حقيقيين  $a, b$  ( $a \leq b$ ) ولأي متغير عشوائي مستمر  $X$  دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  ودالة كثافة احتماله  $f(x)$ :

$$(2.7.3): \Pr(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

وبصفة عامة نجد لكل مجموعة بورالية مقيسة  $E$  على الخط الحقيقي  $R_1$ :

$$(2.7.4): P(E) = \Pr[X \in E] = \int_E f(x) dx$$

فإذا كانت المجموعة  $E$  تتكون من نقطة واحدة عندها قيمة المتغير  $X$  تساوي  $x_0$  مثلاً فإن العلاقة السابقة تأخذ الصورة التالية:

$$(2.7.5): \Pr[X = x_0] = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

## الفصل الثاني — المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

أى أن احتمال أن المتغير المستمر يساوى قيمة معينة ( $x_0$  مثلاً) يساوى الصفر

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها بطريقة أخرى حيث أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لأى متغير مستمر تكون دالة مستمرة من كل اتجاه (ليس بها قفزات)، إذن عند أى قيمة معينة من قيم المتغير (لنكن  $X = x_0$ ) تكون  $F(x_0) = F(x_0 - 0)$  وبالتالي يتضح من العلاقة (2. 5. 6) أن:

$$Pr[X = x_0] = F(x_0) - F(x_0 - 0) = 0$$

ملاحظة (2-7-4):

إذا كانت المجموعة  $E$  تمثل مجموعة محدودة أو قابلة للعد من قيم متغير مستمر  $X$  فإن:

$$(2. 7. 6): Pr[X \in E] = 0$$

أى احتمال أن ينتمى المتغير المستمر لأى مجموعة محدودة أو قابلة للعد يساوى الصفر. لذا فإن أى مجموعة محدودة (منتهية) أو قابلة للعد من قيم أى متغير مستمر تسمى مجموعة ذات احتمال صفر أو مجموعة احتمالها صفر A set with probability measure zero وإثبات ذلك بسيط ومتروك للقارئ.

والعلاقة (2. 7. 6) لا تكون صحيحة فى حالة المتغير المنقطع — أى أن هذه الخاصية يختص بها المتغير المستمر دون المتغير المنقطع.

ملاحظة (2-7-4ب):

من المعلوم أن كل حدث مستحيل احتمالته يساوى الصفر وكل حدث مؤكد احتمالته يساوى الواحد الصحيح — ولكن العكس غير صحيح — إذ يتضح من العلاقات (2. 7. 5)، (2. 7. 6) أنه ليس من الضروري أن كل حدث احتمالته واحد صحيح يكون حدث مؤكد كما أنه ليس من الضروري أن كل حدث احتمالته صفر يكون حدث مستحيل. فلو كان  $X$  متغير عشوائى مستمر معرف على الخط الحقيقى  $R_1$  ودالة كثافة احتمالته  $f(x)$  فإن الحدث  $X = x_0$  يعتبر حدث بسيط وهو حدث غير مستحيل وبالرغم من ذلك نجد من العلاقة (2. 7. 5) أن  $Pr[X = x_0] = 0$  كما أن الحدث  $X = \bar{x}_0$  المكمل للحدث  $X = x_0$  ( $\bar{x}_0 = R_1 - x_0$ ) الذى يمثل كل الخط الحقيقى  $R_1$  بدون النقطة  $x_0$  يعتبر حدث غير مؤكد بالرغم من أن احتمالته يساوى الواحد الصحيح — حيث يتضح من العلاقة (2. 7. 4) أن:

$$Pr[X \in \bar{x}_0] = \int_{R_1 - x_0} f(x) dx = 1$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2-7-5) خواص دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي المستمر:

من خصائص دالة التوزيع الاحتمالي نرى من العلاقة (2-5-2) أن دالة كثافة الاحتمال لأي متغير عشوائي مستمر تحقق العلاقة التالية:

$$F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

وحيث أننا أشرنا في تعريف (2-7-2) أن دالة كثافة الاحتمال دالة غير سالبة — إذن يمكن القول أن دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  لأي متغير مستمر  $X$  تحقق الخاصيتين التاليتين:

$$(2.7.7): (a) f(x) \geq 0$$

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

وينتضح مما سبق أن أي دالة حقيقية  $f(x)$  إذا كانت مستمرة وغير سالبة وتحقق

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

فإنها تكون دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي مستمر.

(2-7-6): يمكن تمثيل الاحتمال الكلي للمتغير المفرد  $X$  بكثلة (من مادة ما) وزنها الوحدة (وحدة الوزن) وموزعة على الخط الحقيقي  $R_1$  بطريقة ما (تبعاً لدالة كثافة الاحتمال أو دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$ ) بحيث أن أي مجموعة جزئية  $E$  على الخط الحقيقي  $R_1$  تحتوي على كمية من هذه المادة وزنها يعادل الاحتمال  $P(E)$  الذي يمثل احتمال أن المتغير العشوائي  $X$  ينتمي إلى المجموعة  $E$  — وعلى ذلك فإن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  تمثل كمية الاحتمال أو كثلة ذلك الجزء من المادة الذي تحتوي عليه الفترة  $(-\infty, x]$  من الخط الحقيقي  $R_1$ ، كما أن دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  عند النقطة  $x$  تمثل كثافة المادة عند هذه النقطة، وهذا يعرف بالتمثيل الميكانيكي للاحتتمال Mechanical Interpretation of Pr.

(2-7-7): بعد أن تعرفنا على كل من دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي نرى أنه من الممكن استخدام أي منهما في حساب الاحتمالات المختلفة. إلا أنه من الناحية العملية نرى أن استخدام دالة كثافة الاحتمال أكثر سهولة ويسراً في حساب الاحتمالات من استخدام دالة التوزيع الاحتمالي لأي متغير مستمر. وقد سبق الإشارة إلى أن ذلك صحيح أيضاً في حالة المتغير المنقطع. ويمكن تمثيل دالة كثافة الاحتمال لأي متغير مستمر بخط متصل ودالة التوزيع الاحتمالي بخط متصل آخر (غير متناقص) ليس به قفزات كما يتضح من شكل (2-8-3) وشكل (2-8-3ب)، ولكن



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

قبل تقديم هذين الشكلين سنقدم ملخصاً لكيفية حساب الاحتمالات المختلفة باستخدام دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي في كل من المتغير المنقطع والمستمر لإيضاح التمثيل الهندسي لبعض هذه الاحتمالات على الرسمين المشار إليهما.

### (2 - 8) كيفية حساب احتمالات الأحداث المختلفة باستخدام دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي:

(2 - 8 - 1) احتمال أن المتغير العشوائي  $X$  يساوي قيمة معينة  $x$ :

(2 - 8 - 1 أ) حالة المتغير العشوائي المنقطع:

سبق أن قمنا بالعلاقة (2. 6. 2) التي تعطي احتمال أن المتغير المنقطع  $X$  يساوي قيمة معينة  $x_i$  بالعلاقة:

$$(2. 8. 1): \Pr[X = x_i] = P(x_i) = P_i$$

حيث  $P_i$  هي دالة كثافة احتمال المتغير  $X$  (أو دالة احتماله) عند نقطة الاحتمال  $x_i$  لجميع قيم  $i$ .

(2 - 8 - 1 ب) حالة المتغير العشوائي المستمر:

سبق أن أوضحنا في العلاقة (2. 7. 5) أن احتمال أن المتغير المستمر  $X$  يساوي قيمة معينة  $x$  هو:

$$(2. 8. 2): \Pr[X = x] = 0$$

لأي قيمة  $x$  لجميع قيم  $x$  على الخط الحقيقي  $R_1$ .

(2 - 8 - 2) احتمال أن المتغير العشوائي  $X$  ينتمي إلى المجموعة  $E$  (حيث  $E \subset \beta_1$ ) وذلك باستخدام دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$ :

إذا كانت المجموعة  $E$  عنصر من عناصر العائلة  $\beta_1$  التي تمثل عائلة المجموعات الجزئية البورالية لخط الأعداد  $R_1$  فإن:

$$(2. 8. 3): \Pr[X \in E] = \int_E f(x) dx$$

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  من النوع المستمر ودالة كثافة احتماله  $f(x)$ .

أما إذا كان  $X$  متغير منقطع فإن:

$$(2. 8. 4): \Pr[X \in E] = \sum_{i: x_i \in E} P(x_i)$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

حيث  $P(x_i)$  هي دالة كثافة احتمال  $X$  عند النقطة  $x_i$  والمجموع مأخوذ على جميع  
نقط الاحتمال  $x_i$  التي تنتمي للحدث  $E$ .

فإذا كانت  $E = R_1$  فإن

$$(2.8.5): \Pr(X \in R_1) = \int_{R_1} f(x) dx = 1$$

عندما يكون  $X$  متغير مستمر

$$= \sum_{i: x_i \in R_1} P(x_i) = 1$$

عندما يكون  $X$  متغير منقطع.

(2 - 8 - 3) احتمال أن يقع المتغير  $X$  في الفترة  $I$  باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي  
: $F(x)$

إذا كانت  $I$  فترة ما على خط الأعداد  $R_1$  حددا الأدنى العدد  $a$  وحددا الأعلى  
 $b$  ( $a \leq b$ ) فيمكن إثبات أن:

(ا) إذا كان  $X$  متغير منقطع:

$$(2.8.6): (a) \Pr[X = b] = F(b) - F(b-0) = P(b)$$

$$(b) \Pr[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

$$(c) \Pr[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) + P(a)$$

$$(d) \Pr[a \leq X < b] = F(b) - F(a) + P(a) - P(b)$$

$$(e) \Pr[a < X < b] = F(b) - F(a) - P(b)$$

حيث  $F(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المنقطع  $X$  و  $P(x)$  هي دالة كثافة  
احتماله عند النقطة  $X = x$ . والعلاقة الأولى (a) سبق إثباتها بالمعادلة (2.6.4) - وكما  
في البند (2 - 8 - 1) - كما أن العلاقة الثانية (b) سبق إثباتها بالعلاقة (2.5.4) - أما  
بقية العلاقات فيمكن إثباتها بتقديم الأحداث  $A, B, C, D$  كما يلي:

$$A = \{x : x \leq a\}, B = \{x : x \leq b\}, C = \{a\}, D = \{b\}$$

إن يمكن إثبات العلاقة (c) كما يلي:

$$\begin{aligned} \Pr[a \leq X \leq b] &= \Pr[B \bar{A} \cup C] = \Pr(B) - \Pr(A) + \Pr(C) \\ &= F(b) - F(a) + P(a) \end{aligned}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

والعلاقة (d)

$$\begin{aligned}\Pr[a \leq X < b] &= \Pr[B \bar{A} \bar{D} \cup C] \\ &= \Pr(B) - \Pr(A) - \Pr(D) + \Pr(C) \\ &= F(b) - F(a) - P(b) + P(a).\end{aligned}$$

وبالمثل (e):

$$\begin{aligned}\Pr[a < X < b] &= \Pr[B \bar{A} \bar{D}] \\ &= \Pr(B) - \Pr(A) - \Pr(D) = F(b) - F(a) - P(b)\end{aligned}$$

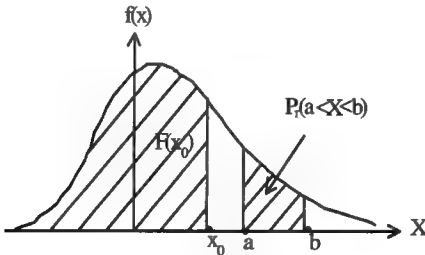
(ب) إذا كان  $X$  متغير مستمر:

إذا كان  $X$  متغير مستمر فإن احتمال أن يقع  $X$  في الفترة  $I$  التي حدها الأدنى  $a$  وحدها الأعلى  $b$  يكون:

$$(2.8.7): \Pr[X \in I] = F(b) - F(a)$$

سواء كانت  $I$  فترة مفتوحة أو مغلقة من أحد أو كلا طرفيها.

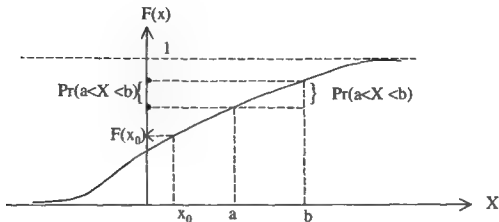
والاحتمال (2.8.7) يمكن توضيحه هندسياً بالشكل (2-8-3) حيث يكون  $\Pr[X \in I]$  هو المساحة أسفل المنحنى والمحصورة بين الخطين  $X = a$  ،  $X = b$ .



شكل (2-8-3)

دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  لمتغير مستمر

## الفصل الثقي – المتغيرات العشوائية ونوال التوزيع الاحتمالي



شكل (2-8-3 ب)

دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لمتغير مستمر

مثال (2-8-1):

إذا كان  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 2$$

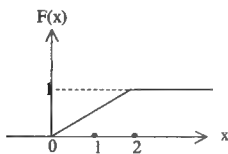
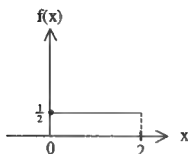
فإن دالة توزيعه الاحتمالي تكون:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} dt = \frac{x}{2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$= 1 \quad ; \quad x > 2$$

نرى أن كل من  $F(x)$ ،  $f(x)$  يمكن تمثيلها بخط متصل (لا يرتفع فيه من القلم عن ورقة الرسم) — كما أن  $F(x)$  دالة غير تنقصية، والمتغير هنا من النوع المستمر كما يتضح من شكل  $f(x)$  و  $F(x)$  في الرسم التالي:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي



مثال (2 - 8 - 2): إذا كان  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله:

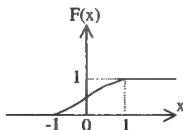
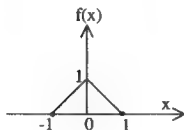
$$f(x) = 1 - |x|, \quad -1 \leq x \leq 1$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  وارسم كل من  $f(x)$ ،  $F(x)$  [انظر فقرة 2 - 12 - 3].

(الحل)

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (1+t) dt & ; -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}x^2 & ; -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



من الشكلين السابقين نجد أن:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(أ) منحنى الدالة  $f(x)$  يمكن تمثيله بخط متصل عبارة عن خط مستقيم بين النقطتين  $(-1, 0)$ ،  $(0, 1)$ ، وخط آخر مستقيم من النقطة  $(0, 1)$  حتى النقطة  $(1, 0)$  — والخطان المستقيمان المشار إليهما متصلان عند النقطة  $(0, 1)$  وبالتالي فإنهما يمثلان خط واحد متصل يمكن رسمه دون رفع سن القلم من على ورقة الرسم.

(ب) أما منحنى الدالة  $F(x)$  فهو منحنى متزايد حيث نتزايد  $F(x)$  من الصفر عندما  $x = -1$  عند النقطة  $(-1, 0)$  ثم تأخذ في التزايد حتى تصل إلى الواحد الصحيح عندما  $x = 1$ .

(جـ) ومنحنى الدالة  $F(x)$  يوجد له نقطة انقلاب عندما  $x = 0$  . وبالتالي فإن  $\frac{dF(x)}{dx} = 0$  عندما  $x = 0$  أى أنه عندما  $x = 0$  نجد أن  $f(x) \neq F'(x)$  (لأن  $f(x) = 1$  عندما  $x = 0$ ).

(د) من هذا يتضح أن  $f(x) = F'(x) > 0$  عند جميع قيم  $x$  ماعدا عند نقطة واحدة هي النقطة  $x = 0$  التي عندما  $F'(x) = 0$  أى أن  $F'(x) \neq f(x)$  وهذا ليس له تأثير لأن عدد النقط التي عندها  $F'(x) \neq f(x)$  محدود يمكن حصره (هنا نقطة واحدة) ولذلك يمكن تعريف  $f(x)$  كما يلي:

$$f(x) = F'(x) \quad ; \quad x = 0 \text{ ماعدا}$$

$$= 1 \quad ; \quad x = 0 \text{ عندما}$$

ويمكن أن تكون  $f(x) \neq F'(x)$  عند عدد غير منته من النقط، ولكن يمكن حصره وبالتالي يمثل مجموعة ذات احتمال صفر ومثال ذلك دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$f(x) = \frac{3}{\pi^2 |k|} [1 - |k - x|] ; |k - x| \leq 1, k = \pm 1, \pm 2^2, \pm 3^2, \dots$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. انظر تمرين (3 - 33).

من هذا يتضح أن دالة كثافة احتمال المتغير المستمر يمكن تمثيلها بخط متصل (يمكن رسمه دون أن نرفع سن القلم من على ورقة الرسم) إلا أنه يمكن أن توجد مجموعة من النقط يكون عندها  $f(x) \neq F'(x)$  حيث أن  $F'(x)$  لا تكون موجودة أو تساوى الصفر عند هذه النقط — وبالتالي فإن  $f(x)$  لا تكون معرفة عند هذه المجموعة من النقط والتي دائماً ما تمثل مجموعة ذات احتمال صفر، وبالتالي يمكن تحديد أى قيمة للدالة  $f(x)$  عند هذه النقط دون أن يؤثر ذلك على دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$ . لذلك فإننا نعتبر أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  هي الدالة الأساسية لتحديد المتغير العشوائى ونست دالة كثافة الاحتمال، لأننا في حالة المتغير العشوائى المستمر يمكن تغيير صيغة دالة كثافة

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

الاحتمال عند أى عدد يمكن حصره من النقاط دون أن يؤثر ذلك على توزيع المتغير العشوائى أو على حساب احتمالات الأحداث المختلفة المتعلقة به، فى حين أن تغيير صيغة دالة التوزيع الاحتمالى ولو عند نقطة واحدة يؤثر على دالة كثافة الاحتمال وكذلك على حساب احتمالات الأحداث المختلفة المتعلقة بالمتغير العشوائى المستمر وكذلك المقطع.

مثال (2 - 3):

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال إحدى الدالتين التاليتين:

$$f_1(x) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_2(x) = 1 \quad ; \quad 0 < x < 1$$

نجد أن دالة التوزيع الاحتمالى المناظرة لكلا الدالتين السابقتين دالة واحدة هى:

$$F(x) = x \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 1 \quad ; \quad x \geq 1$$

أى أن  $F(x)$  لم تتأثر باختلاف صيغة الدالة  $f(x)$  عند النقطتين  $x = 0, 1$  وهما نقطتان من نقط الفترة  $0 \leq x \leq 1$  وتكامل الدالة  $f(x)$  عند هاتين النقطتين يساوى الصفر لذا فهما يمثلان مجموعة ذات احتمال صفر وبالتالي فإن تغيير صيغة الدالة  $f(x)$  عندهما لا يكون له أى تأثير على حساب  $F(x)$  أو حساب الاحتمالات المختلفة.

## (2 - 9) عنصر الاحتمال Probability Element:

سبق أن ذكرنا فى حالة المتغير المتقطع أن دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى  $X$  عند نقطة الاحتمال  $x_i$  هى:

$$\Pr(X = x_i) = P(x_i) = P_i$$

ولكن بالنسبة للمتغير المستمر يكون الاحتمال عند نقطة يساوى الصفر أى أن  $\Pr(X = x) = 0$  وذلك لأن التكامل عند نقطة يساوى الصفر - وحيث أن:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \frac{\Delta x}{2}) - F(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

إذن

$$f(x) \cdot \Delta x \approx F(x + \frac{\Delta x}{2}) - F(x - \frac{\Delta x}{2})$$

$$f(x) \cdot \Delta x \approx \Pr[x - \frac{\Delta x}{2} < X \leq x + \frac{\Delta x}{2}]$$

أى احتمال أن يقع المتغير العشوائى المستمر  $X$  فى فترة صغيرة طولها  $(\Delta x)$  ومركزها النقطة  $x$  يساوى تقريباً  $f(x)$  مضروباً فى طول هذه الفترة. وكلما كانت الفترة

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

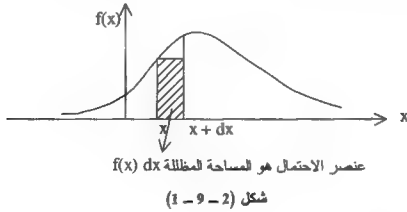
$\Delta x$  صغيرة كلما اقتربت قيمة  $f(x) \cdot \Delta x$  من الاحتمال  $P = \Pr\left[x - \frac{\Delta x}{2} < X \leq x + \frac{\Delta x}{2}\right]$  حتى في النهاية عندما تكون  $\Delta x$  متناهية الصغر ونرمز لها بالرمز  $dx$  يمكن اعتبار أن  $f(x) \cdot dx$  والاحتمال  $P$  السابق متساويان وفي هذه الحالة نطلق على الاحتمال السابق  $P$  لفظ عنصر الاحتمال – ويكون عنصر الاحتمال لأي متغير عشوائي مستمر  $X$  هو:

$$(2.9.1): f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \Delta x$$

ويمكن كتابته في الصورة التالية

$$f(x)dx = dF(x).$$

كما يمكن تمثيله بالرسم التالي:



## (2-10) التوزيعات المختلطة Mixed Distributions:

معظم التوزيعات الاحتمالية التي نواجهها في التطبيق إما دوال مستمرة أو دوال منقطعة ومع ذلك في بعض الحالات القليلة توجد دوال توزيع احتمالي تكون مستمرة في أجزاء من مدى المتغير العشوائي ومنقطعة في الأجزاء الأخرى والتوزيعات التي من هذا النوع تسمى توزيعات مختلطة، ويمكن تعريف التوزيع المختلط كما يلي:

### (2-10-1) تعريف للتوزيع الاحتمالي المختلط:

دالة للتوزيع الاحتمالي  $F(x)$  تسمى دالة توزيع احتمالي مختلطة إذا أمكن وضعها في شكل علاقة خطية بين دالتين توزيع احتمالي أحدهما مستمرة (نرمز لها بالرمز  $F^c(x)$ ) ولثلاثية منقطعة (نرمز لها بالرمز  $F^d(x)$ ) على الشكل التالي:

$$(2.10.1): F(x) = b F^d(x) + (1-b) F^c(x)$$

حيث  $b$  ثابت يحقق العلاقة  $0 < b < 1$ .



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

مثال (2 - 10 - 1):

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له دالة التوزيع الاحتمالي المختلطة التالية:

$$F(x) = \frac{2}{3} F_1(x) + \frac{1}{3} F_2(x)$$

حيث  $F_1(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المنقطع المعطاة في مثال (2 - 6 - 1) و  $F_2(x)$  دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر المعطاة في مثال (2 - 8 - 2)

(أ) اكتب الصيغة الجبرية للدالة  $F(x)$  وارسم منحنى  $F(x)$ .

(ب) أوجد  $\Pr(x > 1)$

(جـ) أوجد  $\Pr(1 < x < 2)$

(د) أوجد  $\Pr(x < 0)$

(هـ) أوجد  $\Pr(x = 1)$

(و) أوجد  $\Pr(x < 2 | x > 1)$

(ز) أوجد  $\Pr(x > 0 | x < 2)$

(الحل)

(i)

$$F_1(x) = \frac{1}{4}, [0, 1)$$

$$= \frac{2}{4}, [1, 2)$$

$$= 1, [2, \infty)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} x^2; [-1, 0)$$

$$= \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} x^2; [0, 1)$$

$$= 1; [1, \infty)$$

$$F(x) = \frac{2}{3} F_1(x) + \frac{1}{3} F_2(x), [-1, \infty)$$

$$\therefore F(x) = \frac{2}{3}(0) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + x + \frac{1}{2} x^2\right); [-1, 0)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{12}; x = 0$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} x^2\right); (0, 1)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}(1) = \frac{10}{12}; x = 1$$

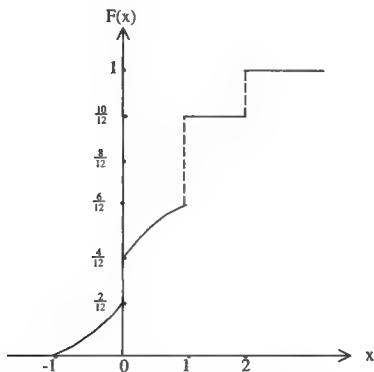
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}(1) = \frac{10}{12}; (1, 2)$$

$$= \frac{2}{3}(1) + \frac{1}{3}(1) = 1; x \geq 2$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2 & ; -1 \leq x < 0 \\
 &= \frac{4}{12} & ; x = 0 \\
 &= \frac{4}{12} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2 & ; 0 < x < 1 \\
 &= \frac{10}{12} & ; 1 \leq x < 2 \\
 &= 1 & ; x \geq 2
 \end{aligned}$$

(ب)



$$\Pr(x > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12}$$

(جـ) لإيجاد  $\Pr(1 < x < 2)$  نجد أن منحنى الدالة  $F(x)$  في الفترة  $1 < x < 2$  عبارة عن خط مستقيم موازى للمحور الأفقى – لذا فإن  $F(x)$  في هذه الفترة ثابتة لا يوجد بها زيادة أو قفزات – أى أن المتغير  $X$  بعد أن يأخذ القيمة 1 يأخذ القيمة 2 مباشرة وبالتالي فإن:

$$\Pr[1 < X < 2] = 0$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وعلى هذا يمكن إيجاد المطلوب في الفقرة (ب) السابقة بصورة أخرى كما يلي:

$$\Pr[X > 1] = \Pr[X = 2]$$

وباستخدام العلاقة (2. 5. 6)

$$= F(2) - F(2 - 0) = 1 - \frac{10}{12} = \frac{2}{12}$$

(د)

$$\Pr(X < 0) = F(0 - 0) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} 0^2 \right) = \frac{1}{6}$$

أو من الصيغة الأخيرة للدالة  $F(x)$  مباشرة باعتبار  $0 \sim 0 - 0$

$$\Pr(X < 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{6} 0^2 = \frac{1}{6}$$

(هـ)

$$\Pr[X = 1] = F(1 +) - F(1 -)$$

حيث

$$F(1 +) = \frac{10}{12}$$

$$F(1 -) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} (1)^2 \right] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

أو من الصيغة الأخيرة للدالة  $F(x)$  مباشرة باعتبار  $1 \sim 1 -$

$$F(1 -) = \frac{4}{12} + \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot 1^2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \Pr[X = 1] = \frac{10}{12} - \frac{6}{12} = \frac{4}{12}$$

(و)

$$\Pr[X < 2 | X > 1]$$

نفرض أن الحدث  $A$  هو  $X < 2$

والحدث  $B$  هو  $X > 1$

إذن الاحتمال المطلوب هو:

$$P = \Pr[X < 2 | X > 1] = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$A \cap B \equiv x < 2 \text{ and } X > 1 \equiv 1 < X < 2$$

$$\therefore P = \frac{\Pr[1 < X < 2]}{P(X > 1)} = \frac{0}{P(X > 1)} = 0$$

(ز) الاحتمال المطلوب  $P = \Pr[X > 0 | X < 2]$

نفرض أن الحدث  $A$  :  $X > 0$

الحدث  $B$  :  $X < 2$

$$\therefore P = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{P(0 < X < 2)}{P(X < 2)}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وباستخدام معادلات (2. 8. 6) نجد أن:

$$\begin{aligned}\Pr(0 < X < 2) &= F(2) - F(0) - \Pr(X = 2) \\ &= 1 - \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{6}{12}\end{aligned}$$

$$\Pr(X < 2) = F(2-) = \frac{10}{12}$$

$$\therefore P = \Pr[X > 0 | X < 2] = \frac{6}{12} + \frac{10}{12} = \frac{3}{5}.$$

### (2 – 11) التوزيعات المبترقة Truncated Distributions:

نفرض أن لدينا متغير عشوائي  $X$  فراغه خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  ودالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  – وحدث لأى سبب من الأسباب أننا نهتم فقط بالقيم التي يمكن أن يأخذها هذا المتغير في مدى معين ليكن  $A$  حيث  $A \subset R_1$  – فإن توزيع المتغير  $X$  في المدى (أو المجموعة)  $A$  يكون هو محور اهتمامنا. واحتمال أن المتغير  $X$  ينتمي إلى أى مجموعة جزئية  $B$  (حيث  $B \subset A$ ) علماً بأن  $X \in A$  (أي مع تحقق الشرط  $X \in A$ ) يمكن الحصول عليه طبقاً لقانون الاحتمال الشرطي من العلاقة (1. 19. 1) بالباب الأول – حيث أن هذا الاحتمال هو الاحتمال الشرطي لتحقيق الحدث:  $X \in B$  حيث  $B$  مجموعة جزئية من المجموعة  $A$  ( $B \subset A$ ) كما أن  $0 < P(A) < 1$  وذلك إذا علماً أن  $X \in A$  – ويمكن كتابة ذلك في الصورة التالية:

$$\begin{aligned}(2. 11. 1): \Pr(X \in B | X \in A) &= \Pr(X \in B ; X \in A) / \Pr(X \in A) \\ &= \Pr(X \in B) / \Pr(X \in A)\end{aligned}$$

فإذا كان المتغير  $X$  من النوع المنقطع ونقط احتماله (أو نقط القفز) هي  $x_i$  باحتمالات (أو قفزات)  $\{P_i\}$ ،  $i = 1, 2, \dots$ ، وكانت  $A$  مجموعة جزئية من مدى المتغير  $X$  و  $B$  مجموعة مكونة من نقطة واحدة هي النقطة  $X = x_i$  سنجد من العلاقة (2. 11. 1) أن دالة الاحتمال للتوزيع المبترق للمتغير  $X$  تأخذ للصورة:

$$(2. 11. 2): \Pr(X = x_i | X \in A) = P_i / \sum_{j: x_j \in A} P_j$$

عندما  $x_i \in A$  وتساوى الصفر خلاف ذلك.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

والتوزيع الاحتمالي المعطى بالعلاقة السابقة لجميع قيم  $x_i \in A$  يسمى بالتوزيع المبتور للمتغير المتقطع  $X$  في المدى  $X \in A$ .

أما إذا كان المتغير  $X$  من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  (حيث  $f(x) = F'(x) > 0$ ) فإن:

$$(2. 11. 3): \Pr(X \in B | X \in A) = P(X \in B) / P(X \in A)$$

$$= \int_B f(x) dx / \int_A f(x) dx$$

حيث  $A, B$  مجموعتان خطيتان على الخط الحقيقي  $R_1$ ،  $B \subset A$ .

فإذا كانت المجموعة  $A$  هي الفترة  $a < X \leq b$  حيث  $a, b$  عدنان حقيقيان و  $a < b$  و  $B$  هي الفترة  $a < X \leq x$  حيث  $x$  عدد حقيقي ينحصر بين  $a, b$  فإن:

$$\Pr(X \in A) = \Pr(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

كما أن:

$$\Pr(X \in B) = \Pr(a < X \leq x) = F(x) - F(a)$$

ويكون توزيع المتغير العشوائي المستمر  $X$  في المدى  $a < X \leq b$  — مع إهمال كل قيم المتغير  $X$  خارج هذا المدى — يطلق عليه اسم "التوزيع المبتور" للمتغير المستمر  $X$  في المدى  $a < X \leq b$  ويكون له دالة التوزيع الاحتمالي التالية:

$$(2. 11. 4): \Pr(X \in B | X \in A) = \Pr(a < X \leq x | a < X \leq b)$$

$$= F(x | a < X \leq b)$$

$$= \begin{cases} \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & ; a < X \leq b \\ 1 & ; x > b \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

كما أن دالة كثافة احتمال المتغير  $X$  في المدى  $a < X \leq b$  يمكن الحصول عليها بمفاضلة الدالة (2. 11. 4) مع الأخذ في الاعتبار أن  $F(a)$  و  $F(b)$  كميتان ثابتتان وذلك في الصورة التالية:

$$(2. 11. 5): f(x | a < X \leq b) = f(x) \Big/ \int_a^b f(t) dt.$$

لجميع قيم  $X$  في المدى  $a < X \leq b$  وتساوى الصفر خلاف ذلك، علماً بأن كل من العددين  $a, b$  قد يكون محدود أو لانهائي.

مثال ذلك إذا افترضنا أن  $X$  متغير عشوائي يمثل أطوال مجموعة من الأشخاص له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  فالمتغير  $X$  متغير موجب فراغه كل الجزء الموجب من الخط الحقيقي  $R_1$  – أي أن:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

فإذا كان اهتمامنا منصب على الأشخاص المجندين فقط وليس كل مجموعة الأشخاص الذي يمثل أطوالها المتغير  $X$ ، وإذا علمنا أن أي شخص يتم تجنيده لا يقل طوله عن 165 سم، فإن أطوال الأشخاص المجندين – في هذه الحالة – يمكن اعتباره متغير  $X$  له توزيع مبدور في الفترة  $X > 165$  ودالة توزيعه الاحتمالي هي:

$$F(x | X > 165) = \frac{F(x) - F(165)}{1 - F(165)} ; x \geq 165$$

خلاف ذلك = 0

كما أن دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير ذو التوزيع المبدور هي:

$$f(x | X > 165) = f(x) \Big/ \int_{165}^{\infty} f(t) dt$$

مما سبق يتضح الفرق بين كل من  $F(x)$  و  $F(x | X > 165)$  وكذلك بين  $f(x)$  و  $f(x | X > 165)$ .

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 – 12) بعض الملاحظات الهامة:

نقدم فيما يلي بعض الملاحظات المتعلقة بدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر ودالة كثافة احتمال التوزيع المختلط.

(2 – 12 – 1): نذكرنا أن دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  للمتغير العشوائي المستمر  $X$  هي المشتقة التفاضلية الأولى لدالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  عند جميع نقاط  $X$  التي تكون عندها الدالة  $F(x)$  قابلة للتفاضل (Differentiable) – أي عندما تكون  $F'(x) > 0$  – وفي هذه الحالة تكون  $F'(x) = f(x)$ . ولكن في حالات نادرة جداً تكون  $F'(x) = 0$  عند غالبية قيم  $X$  تقريباً وتكون أكبر من الصفر عند باقي القيم، فيمثل هذه الحالة تسمى دالة التوزيع الاحتمالي المستمرة  $F(x)$  دالة مستمرة شاذة Singular Continuous Function ومثل هذه الدوال لا وجود لها تقريباً في مجال دراستنا، لذلك فإننا نهملها ولن نتعامل معها، وسنعتبر دائماً أن دالة التوزيع الاحتمالي المستمرة هي التي فيها  $f(x) = F'(x) > 0$  عند جميع قيم  $X$  ماعداً (من الممكن) عند مجموعة قابلة للعد من هذه القيم.

(2 – 12 – 2): لو اعتبرنا أن دالة كثافة الاحتمال المختلطة المقابلة لدالة التوزيع الاحتمالي المختلطة المعطاة بالعلاقة (2. 10. 1) هي:

$$f(x) = b f^d(x) + (1-b) f^c(x)$$

حيث  $0 < b < 1$  و  $f^d(x)$  هي دالة كثافة الاحتمال المتقطعة المقابلة لدالة التوزيع الاحتمالي المتقطعة  $F^d(x)$  و  $f^c(x)$  هي دالة كثافة الاحتمال المستمرة المقابلة لدالة التوزيع الاحتمالي المستمرة  $F^c(x)$  – فإننا سنحتاج في التعامل مع دالة كثافة الاحتمال المختلطة  $f(x)$  إلى درجة كبيرة من الحذر – لذلك فنحن نفضل التعامل مع دالة التوزيع الاحتمالي المختلطة في حالة وجودها.

(2 – 12 – 3): في كثير من الحالات تكون دالة كثافة الاحتمال (وكذلك دالة التوزيع الاحتمالي) معرفة بصيغ جبرية مختلفة في فترات مختلفة من مدى المتغير العشوائي، وفي مثل هذه الحالات عند إيجاد تكامل الدالة يجب أن نضع هذا التكامل على شكل مجموع تكاملات كل منها يختص بفترة معينة من فترات المتغير العشوائي  $X$  ونستخدم فيه الصيغة الجبرية الخاصة بهذه الفترة كما في مثال (2 – 8 – 2).

(2 – 12 – 4): التوزيع الاحتمالي يسمى توزيعاً متمثلاً حول النقطة  $a$  "Symmetric about a" إذا حققت دالة توزيعه الاحتمالي العلاقة التالية:

$$F(a+x) = 1 - F(a-x) + Pr(X = x).$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

والنقطة "a" تسمى مركز التماثل. فإذا كان التوزيع من النوع المستمر فإن:  
 $f(a+x) = f(a-x)$  حيث  $f(x)$  هي دالة كثافة الاحتمال. وإذا كان التوزيع من  
 النوع المنقطع فإن نقط الاحتمال Jump points والاحتمالات المقابلة تكون موزعة  
 بطريقة متماثلة حول مركز التماثل. The Center of Symmetry.

### (2-13) المتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة Two - Dimensional Random Variables

في تعريفنا للمتغير العشوائي المفرد  $X$  في البندين (2-3) و(2-4) ذكرنا أن  $X$   
 دالة حقيقية وحيدة القيمة معرفة على فراغ العينة  $S$  مجالها هذا الفراغ ومجالها المقابل  
 للخط الحقيقي  $R_1$ ، أي أن  $X$  دالة حقيقية وحيدة القيمة تنقل من  $S$  إلى  $R_1$  وبتعبير رمزي:

$$S \xrightarrow{X} R_1$$

وفراغ العينة  $S$  - كما سبق أن ذكرنا في الباب الأول - هو مجموعة عناصرها  
 أحداث أولية بسيطة - لذا فإن المتغير العشوائي المفرد  $X$  يمثل دالة حقيقية وحيدة القيمة  
 تحدد لكل حدث بسيط (في المجموعة  $S$ ) عدد حقيقي (أو نقطة على الخط الحقيقي) -  
 وحيث أنه يمكن تعريف أكثر من دالة على فراغ العينة - لذلك يمكن تعريف أكثر من  
 متغير عشوائي على فراغ العينة لأي تجربة عشوائية - أي يمكن تعريف  $n$  من الدوال  
 (أو من المتغيرات العشوائية)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  على فراغ العينة - هذه الدوال (أو  
 المتغيرات) تحدد لكل حدث بسيط (في الفراغ  $S$ )  $n$  من الأعداد المرتبة  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   
 وفي هذه الحالة نعتبر المتغيرات التي عددها  $n$  كأنها متغير عشوائي مشترك واحد في  
 الفراغ ذو النون بعدا مكون من مركبات (أو متغيرات) عددها  $n$  ويكون له توزيع احتمالي  
 يسمى بالتوزيع الاحتمالي المشترك.

فمثلاً - عندما  $n = 2$  - إذا عرفنا المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  كدوال حقيقية  
 وحيدة القيمة على فراغ العينة  $S$  لتجربة عشوائية فإن المتغيران  $X$  و  $Y$  يقال أن لهما  
 توزيع احتمالي مشترك أي لهما دالة احتمال مشتركة  $P_{12}(\cdot)$  تستخدم لحساب احتمالات  
 وقوع الأحداث المشتركة للذين المتغيرين. والأحداث المشتركة للمتغيرين العشوائيين ذات  
 التوزيع الاحتمالي المشترك دائما تكون في صورة مجموعات جزئية في الفراغ المشترك  
 (المزدوج) للمتغيرين. فلو كان خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  هو فراغ كل من المتغيرين  $X$  و  $Y$   
 فإن الفراغ المزدوج لهما يمكن تمثيله بالمستوى  $R_2$  الذي تكون فيه كل نقطة عبارة عن  
 زوج مرتب من القيم  $(x, y)$  حيث  $x$  هي إحدى قيم المتغير العشوائي  $X$  و  $y$  هي إحدى قيم  
 المتغير العشوائي  $Y$  والمتغيران هنا مستمران لأن فراغ كل منهما هو الخط الحقيقي  $R_1$ ،  
 وقد يكون المتغيران منقطعان وفراغ كل منهما مجموعة محدودة أو على الأكثر قابلة للعد  
 من النقط فيكون الفراغ المشترك للمتغيرين مكون من مجموعة محدودة أو قابلة للعد من



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

النقط فى المستوى  $R_2$ . فمثلاً إذا كان المتغيران العشوائيان منقطعان وفراغ كل منهما المجموعة  $S = \{0, 1, 2\}$  فإن فراغهما المشترك يكون المجموعة

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (x, y): x = 0, 1, 2 \\ y = 0, 1, 2 \end{array} \right\}$$

أى يتكون من 9 نقاط هى:

x \ y	0	1	2
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)

وفى الفراغ المشترك  $R_2$  (أو  $R_n$  فى حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية) لآى متغيرين  $X$  و  $Y$  يمكن حساب الاحتمال لآى مجموعة جزئية بوراليه  $E$  من هذا الفراغ ونرمز لدالة الاحتمال فى هذه الحالة بالرمز  $P_{12}(\cdot)$  والمتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  ذات التوزيع الاحتمالى المشترك قد نطلق عليهما أحيانا لفظ المتغير العشوائى المشترك أو المتغير الثنائى  $(X, Y)$  - ويقال لتوزيعهما الاحتمالى أنه توزيع احتمالى لمتغير عشوائى ثنائى مشترك  $(X, Y)$ .

وكما سبق أن ذكرنا يمكن أن يكون معرفاً على فراغ العينة لآى تجربة عشوائية ثلاث متغيرات أو أربعة أو حتى  $n$  من المتغيرات بحيث تحدد لكل عنصر أو حدث أولى بسيط فى فراغ العينة تعبير مرتب من الأعداد الحقيقية مكون من ثلاثة أو أربعة أو حتى  $n$  من القيم الحقيقية على الترتيب.

وقد يكون معرف على فراغ العينة للتجربة العشوائية عدة متغيرات عشوائية بعضها منقطع والآخر مستمر وقد تكون كل المتغيرات مستمرة أو كلها منقطعة. ولإيضاح مفهوم المتغيرات العشوائية المتعددة المشتركة نبدأ أولاً بحالة متغيرين ثم نعمم النتائج إلى حالة  $n$  من المتغيرات.

### (2 - 13) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الثنائى المشترك:

**The Probability Distribution Function of the Two - dimensional Random Variable:**

نفرض أن  $(X, Y)$  متغير عشوائى ثنائى مشترك له فراغ الاحتمال  $(R_2, \beta_2, P_{12}(\cdot))$  حيث  $R_2$  هو المستوى الذى يتكون من تقاطع فراغى المتغيرين  $X$  و  $Y$  و

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$\beta_2$  أصغر عائلة بورالية مكونة من كل المجموعات الجزئية البورالية للفراغ  $R_2$  و  $P_{12}(\cdot)$  هي دالة الاحتمال المشتركة للمتغير الثنائي المشترك  $(X, Y)$  والتي يمكن تعريفها كما يلي:

لأي مجموعة بورالية  $E$  في المستوى  $R_2$  عناصرها الأزواج المرتبة  $(x, y)$  حيث  $x$  إحدى قيم المتغير العشوائي  $X$  و  $y$  إحدى قيم المتغير العشوائي  $Y$  تكون دالة الاحتمال المشتركة  $P_{12}(\cdot)$  للمتغير العشوائي المشترك  $(X, Y)$  هي:

$$(2.13.1): P_{12}(E) = \Pr\{(x, y) \in E\}$$

أو

$$= \Pr\{(x, y) \in E\}$$

سبق أن ذكرنا أنه إذا كان فراغ كل من المتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  هو الخط الحقيقي  $R_1$  فإن فراغ المتغير العشوائي المشترك  $(X, Y)$  هو المستوى  $R_2$ . وعادة في المستوى  $R_2$  نهتم بحساب احتمالات المجموعات التي من النوع التالي:

$$(2.13.2): E = \{(x, y) : x \in E_1, y \in E_2\}$$

حيث أن كل من  $E_1$  و  $E_2$  مجموعة جزئية بورالية من الخط الحقيقي  $R_1$ . وبذلك يمكن كتابة دالة الاحتمال المشتركة  $P_{12}(\cdot)$  المعطاة بالعلاقة (2.13.1) في الصورة التالية:

$$(2.13.3): P_{12}(E) = \Pr[(X, Y) \in E] = \Pr\{(x, y) : x \in E_1, y \in E_2\}$$

أو في صورة مختصرة

$$= \Pr[X \in E_1, Y \in E_2]$$

حيث  $E$  و  $E_1$  و  $E_2$  كما في العلاقة (2.13.2). والأن يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الثنائي المشترك  $(X, Y)$  كما يلي:

$$(2-13-2) \text{ تعريف دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير } (X, Y):$$

الدالة  $F(x, y)$  المعرفة بالعلاقة:

$$(2.13.4): F(x, y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$

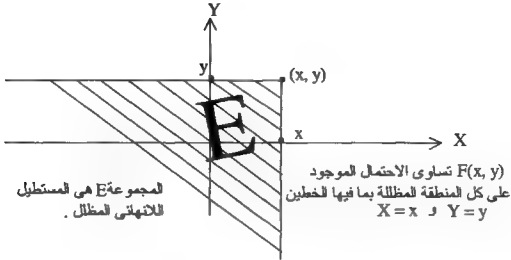
تسمى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المشترك  $(X, Y)$ .

والعلاقة السابقة مشتقة من العلاقة (2.13.3) عندما تكون  $E_1$  هي الفترة  $(-\infty, x]$  و  $E_2$  هي الفترة  $(-\infty, y]$ . وفي هذه الحالة تكون المجموعة  $E$  المعطاة بالعلاقة (2.13.2) هي المجموعة التالية:

$$(2.13.5): E = \{(X, Y) : X \leq x, Y \leq y\}$$

وهذه المجموعة يمكن تمثيلها بيانياً بالشكل التالي:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي



شكل (2-13-1)

وباستخدام العلاقة (2. 13. 5) يمكن كتابة العلاقة (2. 13. 4) لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  للمتغير  $(X, Y)$  في الصورة التالية:

$$(2. 13. 6): F(x, y) = \Pr[(X, Y) \in E] = P_{12}(E)$$

حيث  $E$  هي المجموعة المعرفة بالعلاقة (2. 13. 5) و  $P_{12}(E)$  هي دالة الاحتمال المشتركة المعطاة بالعلاقة (2. 13. 1) وعلى ذلك فإن دالة الاحتمال  $P_{12}(\cdot)$  [أو فراغ الاحتمال  $(R_2, \beta_2, P_{12}(\cdot))$ ] ودالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$  كل منهما يكفي لتحديد احتمالات المختلفة - أو لتوزيع الاحتمال الكلي الذي يعادل الوحدة - على المجموعات الجزئية البورالية المختلفة في المستوى  $R_2$ ، أي أننا لدينا طريقتين أو أسلوبين لتحديد احتمالات الأحداث المختلفة للمتغير العشوائي المشترك  $(X, Y)$  هما: فراغ الاحتمال  $P_{12}(\cdot)$  و دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$ ، ولكننا سوف نستخدم دالة التوزيع الاحتمالي في غالب الأحيان. ويمكن باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  تحديد احتمال أي مجموعة جزئية بورالية تكون على شكل مستطيل كما في شكل (2-13-1) السابق سواء كان المستطيل مساحته محدودة أو لانهائية، إذ عادة ما تكون المجموعات البورالية التي نهتم بحساب احتمالاتها من نوع المجموعات المعطاة في (2. 13. 2) عندما تكون  $E_1$  فترة معينة على محور المتغير العشوائي  $X$  و  $E_2$  فترة معينة أخرى على محور المتغير العشوائي  $Y$  ومثال ذلك أن تكون  $E_1$  هي الفترة  $[a_1, b_1]$  و  $E_2$  هي الفترة  $[a_2, b_2]$  فتكون الاحتمالات التي عادة ما نهتم بحسابها من النوع التالي:

$$\Pr[a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2]$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ومما هو جدير بالذكر أن أى فترة فى الفراغ  $R_1$  أو أى مستطيل فى الفراغ  $R_2$  كل منهما يعتبر مجموعة بورالية يمكن حساب احتمالها.

ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  للمتغير الثنائي المشترك  $(X, Y)$  أحيانا نطلق عليها ألفاظ مختلفة فأحيانا نطلق عليها: دالة التوزيع الاحتمالي أو دالة التوزيع الاحتمالي الثنائية المشتركة أو مجرد دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة أو دالة التوزيع الاحتمالي التراكمية أو الدالة التراكمية الثنائية - كما أنها قد تسمى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائى المشترك  $(X, Y)$  أو دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغيران العشوائيان  $X, Y$  - لذلك قد نستخدم أى من هذه الألفاظ عند تناولنا لهذه الدالة.

(2-13-3) خواص دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$ :

من تعريف دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  بالعلاقة (2.13.4) يتضح أن  $F(x, y)$  عبارة عن دالة احتمال لذلك فلها كل خصائص الاحتمال - أى أن:

(1)  $F(x, y)$  دالة حقيقية وحيدة القيمة وغير سالبة لجميع قيم  $(x, y)$  فى المستوى  $R_2$ .

وبأسلوب مشابه لما اتبعناه فى حالة المتغير المفرد يمكن إثبات أن:

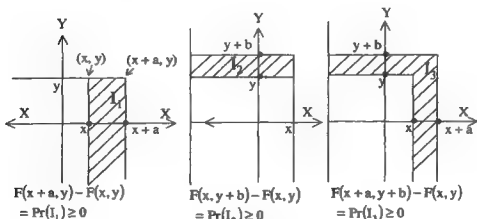
(2)  $F(x, y)$  دالة غير تناقصية - أى أنه بالنسبة لأى عددين  $a > 0, b > 0$  يمكن إثبات أن:

$$F(x+a, y) - F(x, y) \geq 0$$

$$F(x, y+b) - F(x, y) \geq 0$$

$$F(x+a, y+b) - F(x, y) \geq 0$$

والرسم التالى يساعد على إثبات العلاقات السابقة كما يلى:



شكل (2-13-2)

حيث  $I_1, I_2, I_3$  هى للمساحات المظللة فى الرسم

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(3) دالة  $F(x, y)$  دالة مستمرة من ناحية اليمين على الأقل وذلك بالنسبة لكل متغير من المتغيرين  $X, Y$ . أى أنه عند كل نقطة  $(x, y)$  فى المستوى  $R_2$  – وبأسلوب مشابه لما اتبعناه فى حالة المتغير المفرد عند إثبات العلاقات (2. 5. 5) – يمكن إثبات أن:

$$F(x + 0, y) = F(x, y)$$

$$F(x - 0, y) \leq F(x, y)$$

وهذا يعنى أن الدالة  $F(x, y)$  مستمرة من ناحية اليمين بالنسبة للمتغير  $X$  – وكذلك بالنسبة للمتغير  $Y$  يمكن إثبات أن:

$$F(x, y + 0) = F(x, y)$$

$$F(x, y - 0) \leq F(x, y)$$

وهذا يعنى أن الدالة  $F(x, y)$  مستمرة من ناحية اليمين بالنسبة للمتغير  $Y$  – ومن هذا يتضح أن الدالة  $F(x, y)$  مستمرة من ناحية اليمين بالنسبة لكل متغير من متغيريها. ومما سبق يتضح أن:

$$(2. 13. 7): F(x + 0, y) = F(x, y + 0) = F(x, y)$$

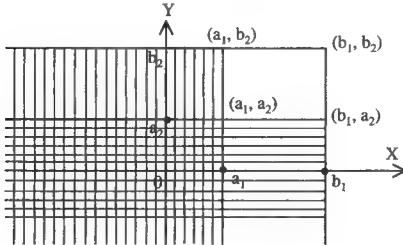
وكذلك

$$F(x + 0, y + 0) = F(x, y)$$

(4) وبالإضافة إلى ما سبق يمكن إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  تحقق العلاقات التالية:

$$(2. 13. 8): F(-\infty, y) = 0 ; F(x, -\infty) = 0 ; F(+\infty, +\infty) = 1$$

وبالاستعانة بشكل (2 – 13 – 3) التالى نلاحظ الآتى:



شكل (2 – 13 – 3)

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

إذا كانت  $I$  هي الفترة التالية:

$$(2. 13. 9a): I = \{(x, y) : a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2\}$$

حيث  $a_1 < b_1, a_2 < b_2$  وكلها أعداد حقيقية إذن:

$$\begin{aligned} (2. 13. 9b): \Pr[(x, y) \in I] &= \Pr[a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2] \\ &= \Pr[X \leq b_1, Y \leq b_2] - \Pr(X \leq b_1, Y \leq a_2) \\ &\quad - \Pr(X \leq a_1, Y \leq b_2) + \Pr(X \leq a_1, Y \leq a_2) \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) \end{aligned}$$

والعلاقة (2. 13. 9b) السابقة يترتب عليها أن:

$$(2. 13. 10): F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) \geq 0$$

وذلك لجميع القيم  $a_1, b_1$  و  $a_2, b_2$  ( $a_1 < b_1$ ) و  $(a_2 < b_2)$ .

ملاحظة (2 - 13 - 13):

مما سبق يتضح أن الدالة  $F(x, y)$  لكي تكون دالة توزيع احتمالي لمتغير عشوائي ثنائي  $(X, Y)$  فلا يكفي أن تكون مستمرة من ناحية اليمين وغير تناقصية بالنسبة لكل متغير وتحقق الشروط (2. 13. 8) - فهذا وحده لا يكفي لكي تكون  $F(x, y)$  دالة توزيع احتمالي - ولكن لكي تكون كذلك لابد من تحقق المتباينة (2. 13. 10) السابقة بالإضافة إلى هذه الخواص كما يبدو من العلاقة (2. 13. 9b).

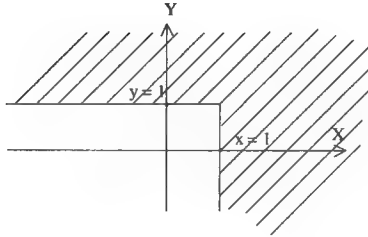
والمثال التالي يوضح أن الشروط السابقة وحدها لا تكفي لتحقيق العلاقة (2. 13. 10).

مثال (2 - 13 - 1): إذا كانت:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 1 \quad ; \quad x \geq 1, y \geq 1 \\ &= 0 \quad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

يتضح من الرسم التالي أن الدالة  $F(x, y)$  تساوي الواحد الصحيح في المنطقة المظلمة وتساوي الصفر في باقي المستوى  $R_2$ .

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي



هذه الدالة غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين بالنسبة لجميع قيم  $X$  وجميع قيم  $Y$  وتحقق العلاقات (2. 13. 8) – وبالرغم من ذلك فإنها لا تحقق المتباينة (2. 13. 10) – لأنه إذا وضعنا في العلاقة (2. 13. 10)

$$a_1 = 1 - \Delta, \quad b_1 = 1 + \Delta$$

$$a_2 = 1 - \Delta, \quad b_2 = 1 + \Delta$$

لأى قيمة صغيرة  $\Delta$  حيث  $\Delta > 0$  سنجد أن الطرف الأيسر في المتباينة (2. 13. 10) يأخذ القيمة التالية

$$\begin{aligned} & F(1 + \Delta, 1 + \Delta) - F(1 + \Delta, 1 - \Delta) - F(1 - \Delta, 1 + \Delta) + F(1 - \Delta, 1 - \Delta) \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

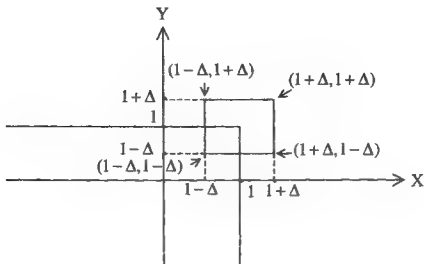
أي أن  $F(x, y)$  لا تحقق المتباينة (2. 13. 10) لجميع قيم  $(x, y)$  داخل المستقيم المحدد بالعلاقات التالية:

$$1 - \Delta < X \leq 1 + \Delta$$

$$1 - \Delta < Y \leq 1 + \Delta$$

ولزيادة الإيضاح يمكن رسم هذا المستطيل على الرسم السابق سنجده يأخذ الشكل التالي:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي



من الرسم السابق نجد أن 3 رؤوس للمستطيل تقع في المنطقة التي فيها  $F(x, y) = 1$  والرأس الرابع في المنطقة التي فيها  $F(x, y) = 0$ . وأي مستطيل لأحد رؤوسه في المنطقة التي فيها  $F(x, y) = 0$  وبقي الرؤوس في المنطقة التي فيها  $F(x, y) = 1$  سوف يوصلنا إلى نفس النتيجة.

ما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (2-13-1):

أي دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة  $F(x, y)$  تكون دالة توزيع احتمالي لمتغير عشوائي ثنائي معين، إذا وفقط إذا، كانت  $F(x, y)$  غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين على الأقل بالنسبة لكل متغيرها وتحقق العلاقات (2. 13. 8) كما تحقق كذلك المتباينة (2. 13. 10).

وبعد كل ما استعرضناه عن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  للمتغير الثنائي المشترك  $(X, Y)$  يمكن تلخيص كل ما سبق في التعريف التالي:

تعريف (2-13-1) دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$ :

باستخدام دالة الاحتمال  $P_{12}()$  المعرفة بالعلاقة (2. 13. 1) للمتغير العشوائي الثنائي المشترك  $(X, Y)$  يمكن تحديد دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة  $F(x, y)$  معرفة بالعلاقة:

$$(2. 13. 11): F(x, y) = Pr(X \leq x, Y \leq y)$$



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

عند جميع نقاط  $(x, y)$  في المستوى  $R_2$  تسمى دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  وهذه الدالة تكون دالة غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين على الأقل بالنسبة لكل من  $X$  و  $Y$  وتحقق الشروط التالية:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

كما تحقق كذلك المتباينة (2. 13. 10).

### (2 - 14) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير العشوائى الثنائى المشترك

#### Joint Probability Density Function of Joint Two - Dimensional

r. v.:

إذا كان كل من المتغيرين العشوائيين  $X, Y$  من النوع المتقطع فإن المتغير المشترك  $(X, Y)$  يسمى متغيراً متقطعاً - وإذا كان كل منهما من النوع المستمر فإن  $(X, Y)$  يسمى متغيراً مستمراً. وهذين النوعين من المتغيرات هما أكثر الأنواع شيوعاً وأهمية إذ هي التي تصادف أكثر من غيرها في دراستنا لنظريتي الاحتمالات والإحصاء - غير أن هناك نوع ثالث مهم - وإن كان أقل شيوعاً وأهمية من النوعين المشار إليهما - وهو عندما يكون أحد المتغيرين مستمراً والثاني متقطعاً وفي هذه الحالة يسمى المتغير الثنائى  $(X, Y)$  بالمتغير المختلط - لذلك سنتناول أولاً بالدراسة المتغير العشوائى الثنائى المتقطع ثم المستمر على أن نتناول المتغير المختلط فى البند (2 - 21) بعد تقديم الدوال الهامشية والشرطية والتي تلزم لتقديم هذا المتغير.

#### (2 - 14 - 1) المتغير العشوائى الثنائى المشترك المتقطع:

إذا كان المتغير العشوائى المتقطع  $X$  يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots$  والمتغير المتقطع  $Y$  يأخذ القيم  $y_1, y_2, \dots$  فإن المتغير المتقطع المشترك  $(X, Y)$  يأخذ أزواج القيم  $(x_i, y_j)$  حيث  $i, j = 1, 2, \dots$  - وأزواج القيم  $(x_i, y_j)$  تمثل (هندسياً) نقاط تقاطع الخطوط الممنوعة  $X = x_i, Y = y_j$  فى المستوى  $R_2$ . فإذا رمزنا لاحتمال أن يأخذ المتغير  $X$  القيمة  $x_i$  والمتغير  $Y$  القيمة  $y_j$  بالرمز

$$(2. 14. 1): P_{ij} = P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

حيث  $P_{ij} > 0$  - فإن  $P_{ij}$  تسمى دالة احتمال (أو دالة كثافة احتمال) المتغير المشترك المتقطع  $(X, Y)$  عند النقطة  $(x_i, y_j)$  ونحن نفضل أن نطلق على هذه الدالة اسم دالة الاحتمال بدلاً من دالة كثافة الاحتمال وذلك تمييزاً لها عن حالة المتغير المشترك

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

المستمر الذي سوف نستخدم لدالته هذه التسمية - لأن الدالة  $P_{ij}$  ما هي إلا احتمال كما يتضح من العلاقة (2. 14. 1). ولذلك نستخدم الحرف  $P$  للإشارة إليها وهو أول حرف في كلمة احتمال Probability ومجموعة القيم أو النقط  $(x_i, y_j)$  التي تكون عندها  $P_{ij} > 0$  تكون مجموعة محدودة أو على الأكثر قابلة للعد، كما أن المتغير المنقطع  $(X, Y)$  لا يأخذ أى قيمة خارج هذه المجموعة، لذلك فإن الاحتمال الكلى (الذى يعادل الوحدة) للمتغير المشترك  $(X, Y)$  يكون موزعا على مجموعة النقط  $(x_i, y_j)$ . أى أن المتغير المشترك المنقطع  $(X, Y)$  يأخذ - باحتمال يساوى الواحد الصحيح - أزواج القيم  $(x_i, y_j)$ . وجميع القيم أو النقط  $(x_i, y_j)$  التى عندها  $P_{ij} > 0$  تسمى نقط قفز Jump Points كما أن احتمالاتها  $P_{ij}$  تسمى قفزات. وبما أن المتغير  $(X, Y)$  يأخذ باحتمال يساوى الواحد الصحيح أزواج القيم  $(x_i, y_j)$  - فإنه لا يأخذ أى قيم أخرى غيرها - فى المستوى  $R_2$  إذن:

$$(2. 14. 2): \sum_{i,j} P_{ij} = 1$$

والمجموع مأخوذ بالنسبة لجميع نقط الاحتمال  $(x_i, y_j)$ . وأى مجموعة من النقط  $E$  خالية من نقط الاحتمال  $(x_i, y_j)$  يكون احتمالها مساويا للصفر - أى  $P(E) = 0$ . ودالة التوزيع الاحتمالى  $F(x, y)$  للمتغير المشترك  $(X, Y)$  يمكن كتابتها على الصورة:

$$(2. 14. 3): F(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} P_{ij}$$

والمجموع مأخوذ على جميع النقط  $(x_i, y_j)$  التى عندها  $P_{ij} > 0$  وتحقق المتباينات

$$x_i \leq x, \quad y_j \leq y$$

ومما سبق يمكن تقديم التعريف التالى لدالة الاحتمال  $P_{ij}$ .

(2 - 14 - 1) تعريف دالة الاحتمال  $P_{ij}$  ودالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $(X, Y)$ :

إذا كانت  $(x_i, y_j)$  تمثل نقط احتمال المتغير المشترك المنقطع  $(X, Y)$  - فإن احتمال أن يأخذ المتغير  $(X, Y)$  زوج القيم  $(x_i, y_j)$  يسمى دالة احتمال المتغير  $(X, Y)$  عند النقطة  $(x_i, y_j)$  ويرمز له بالرمز  $P_{ij}$  أو  $P(x_i, y_j)$  أو  $P(x, y)$  حيث:

$$P_{ij} = \Pr[X = x_i, Y = y_j]$$

وتحقق المعادلة (2. 14. 2) - كما أن دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x, y)$  للمتغير المشترك  $(X, Y)$  تكون مطابقة بالعلاقة (2. 14. 3).

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وإذا كانت  $E$  مجموعة عناصرها بعض نقط الاحتمال  $(x_i, y_i)$  فإن احتمال أن ينتمي المتغير المشترك  $(X, Y)$  إلى المجموعة  $E$  هو:

$$(2. 14. 4): P(E) = \sum_E P_{ij}$$

والمجموع مأخوذ على جميع النقط  $(x_i, y_i)$  التي تمثل عناصر المجموعة  $E$  والتي عندها  $P_{ij} > 0$ .

### (2 – 14 – 2) المتغير العشوائي الثنائي المستمر:

المتغير الثنائي المشترك  $(X, Y)$  يسمى متغيراً مستمراً إذا كان كل من  $Y, X$  من النوع المستمر ودالة توزيعه الاحتمالي  $F(x, y)$  مستمرة (من كل اتجاه) وإذا كانت هناك دالة  $f(x, y)$  غير سالبة وتكاملية على كل المستوى  $R_2$  تسمى دالة كثافة احتمال المتغير المشترك  $(X, Y)$  — P. d. f. of The Joint r. v.  $(X, Y)$ . بحيث أن لكل زوج من الأعداد الحقيقية  $(x, y)$  في المستوى  $R_2$  تكون دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  معطاة بالعلاقة:

$$(2. 14. 5): F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(X, Y) dY dX$$

وفي هذه الحالة تكون المشتقة التفاضلية  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$  موجودة ومستمرة (ماعدا

من الممكن عند مجموعة معينة من النقط التابعة لعدد محدود من المنحنيات) — وعند

جميع نقط استمرار المشتقة التفاضلية  $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$  تكون دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x, y)$  هي هذه المشتقة أي أن:

$$(2. 14. 6): f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

والعلاقة السابقة تكون صحيحة عند جميع نقط استمرار الدالة  $f(x, y)$ . ولأي مجموعة  $E$  في المستوى  $R_2$  يكون احتمال أن ينتمي المتغير المشترك  $(X, Y)$  للمجموعة  $E$  هو:

$$(2. 14. 7): P(E) = \iint_E f(x, y) dx dy$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فإذا كانت  $E$  هي الفترة  $I$  المعطاة بالعلاقة (2. 13. 9a) فإن

$$(2. 14. 8): P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dx dy$$

وإذا كانت  $E = R_2$  فإن:

$$P(R_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

ومن هذا يتضح أن دالة كثافة الاحتمال  $f(x, y)$  تحقق المتساوية التالية:

$$(2. 14. 9): F(+\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

## (2 - 15) الدوال الهامشية أو التوزيعات الهامشية:

### Marginal Functions or Marginal Distributions:

إذا كانت  $F(x, y)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الثنائي  $(X, Y)$  فإن:

$$(2. 15. 1): F(x, \infty) = P(X \leq x, Y < \infty)$$

فإذا كان  $(X, Y)$  متغير عشوائي منقطع فإن المعادلة السابقة (باستخدام العلاقة (14. 3) تأخذ الصورة التالية:

$$(2. 15. 2): F(x, \infty) = \sum_{i: x_i \leq x} \sum_j P_{ij}$$

حيث  $P_{ij}$  هي دالة الاحتمال المشتركة للمتغير المنقطع  $(X, Y)$

$$= \sum_{i: x_i \leq x} [P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \dots]$$

$$F(x, \infty) = \sum_{i: x_i \leq x} [P(X = x_i, Y = y_1)$$

$$+ P(X = x_i, Y = y_2)$$

$$+ P(X = x_i, Y = y_3)$$

$$+ \dots ]$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

والاحتمال داخل القوس المربع يمثل احتمال أن المتغير  $X = x_i$  في حين أن المتغير  $Y$  يأخذ أى قيمة من قيمه الممكنة - وهذا هو احتمال أن  $X = x_i$  أى هو  $P_{i.} = \Pr(X = x_i)$  - وهو دالة احتمال  $X$  بصرف النظر عن  $Y$  إذن:

$$(2. 15. 3): F(x, \infty) = \sum_{i: x_i \leq x} P_{i.} = F_1(x)$$

وهي نفسها دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المفرد  $X$  كما يتضح من العلاقة (2. 6. 3) والدالة  $F_1(x)$  في هذه الحالة - حالة المتغير الثنائي  $(X, Y)$  - تسمى دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  أو دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير  $X$ .  
Marginal Distribution Function of  $X$ .

ومما سبق يمكن القول أنه إذا كانت  $F(x, y)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير الثنائي  $(X, Y)$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير  $X$  تأخذ الصورة:

$$(2. 15. 4): F(x, \infty) = F_1(x)$$

من المعادلة السابقة ومعادلة (2. 15. 2) يتضح أنه إذا كان المتغير  $(X, Y)$  من النوع المنقطع فإن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير  $X$  تأخذ الصورة:

$$(2. 15. 5): F_1(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_j P_{ij}$$

حيث  $P_{ij}$  هي دالة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  والمجموع مأخوذ على جميع قيم  $z$  وعلى جميع قيم  $i$  التي عندها  $x_i \leq x$ . وبنفس الطريقة يمكن إثبات أنه إذا كان المتغير  $(X, Y)$  من النوع المستمر فإن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير  $X$  تأخذ الصورة:

$$(2. 15. 6): F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) dy \right] du$$

وبمقارنة العلاقة (2. 15. 4) بالعلاقة (2. 6. 3) للمتغير المفرد المنقطع  $X$  نجد أن دالة الاحتمال الهامشية للمتغير المفرد  $X$  يمكن الحصول عليها من دالة الاحتمال المشتركة  $P_{ij}$  للمتغير المشترك  $(X, Y)$  في الصورة التالية:

$$(2. 15. 7): P_{i.} = \Pr(X = x_i) = \sum_j P_{ij}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

كما أن:

$$(2. 15. 8): \sum_i P_{i.} = \sum_i \sum_j P_{ij} = 1$$

وبالمثل بمقارنة العلاقة (2. 15. 6) بالعلاقة (2. 7. 1) نجد أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير المفرد المستمر  $X$  يمكن الحصول عليها من دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x, y)$  للمتغير المشترك المستمر  $(X, Y)$  في الصورة التالية:

$$(2. 15. 9): f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

ويمكن إثبات أن الدالة  $f_1(x)$  دالة مستمرة بالنسبة للمتغير  $X$  عند جميع قيم  $x$  التي تكون عندها  $f(x, y)$  مستمرة بالنسبة لهذا المتغير— أي أن  $f_1(x)$  دالة كثافة احتمال متغير مستمر — حيث

$$(2. 15. 10): \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

ويمكن اشتقاق صيغ مشابهة للتوزيع الهامشي للمتغير العشوائي  $Y$  حيث نجد أن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغير  $Y$  هي:

$$(2. 15. 11): F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_i P_{ij}$$

ذلك إذا كان المتغير  $(X, Y)$  من النوع المتقطع أما إذا كان من النوع المستمر فإن:

$$(2. 15. 12): F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dx \right] dv$$

ودالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$  إذا كان  $(X, Y)$  متغير متقطع هي:

$$(2. 15. 13): P_{.j} = \Pr(Y = y_j) = \sum_i P_{ij}$$

حيث

$$\sum_j P_{.j} = \sum_j \sum_i P_{ij} = 1$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

كما أن دالة كثافة الاحتمال للمتغير  $Y$  إذا كان  $(X, Y)$  متغير مستمر تكون:

$$(2. 15. 14): f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

حيث  $f_2(y)$  دالة مستمرة بالنسبة لجميع قيم  $y$  التي تكون عندها  $f(x, y)$  مستمرة بالنسبة لنفس المتغير  $y$ ، كما أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

(2 - 16) ملاحظات:

(2 - 16 - 1):

كما ذكرنا في حالة المتغير المفرد - في البند (2 - 7 - 6) - يمكن تمثيل الاحتمال الكلي الذي يعادل الوحدة للمتغير المشترك  $(X, Y)$  بكتلة (من مادة ما) وزنها يساوي الوحدة (وحدة الوزن) وموزعة على المستوى  $R_2$  بطريقة ما بحيث أن أي مجموعة جزئية  $E$  في المستوى  $R_2$  تحتوي على كمية من هذه المادة كتلتها تعادل الاحتمال  $P(E)$  الذي يمثل احتمال أن ينتمي المتغير  $(X, Y)$  إلى المجموعة  $E$ .

(2 - 16 - 2):

وبإسقاط كتلة المادة الموزعة في المستوى  $R_2$  على محور واحد نحصل على توزيع هامشي لأحد المتغيرين - فإذا كان الإسقاط على محور  $X$  نحصل على التوزيع الهامشي للمتغير  $X$  وإذا كان الإسقاط على محور  $Y$  نحصل على التوزيع الهامشي للمتغير  $Y$ . فإذا كان المتغير  $(X, Y)$  من النوع المنقطع فإن كل من المتغيرين  $X, Y$  يكون من النوع المنقطع. وفي التوزيع الهامشي لكل منهما تكون الكتلة الكلية (الاحتمال الكلي) متركزة في نقط احتمال معينة عندها إما محدود أو غير منتهى ولكن قابل للعد. فلو كانت  $x_1, x_2, \dots$  هي نقاط الاحتمال في التوزيع الهامشي للمتغير  $X$  و  $y_1, y_2, \dots$  هي نقاط الاحتمال في التوزيع الهامشي للمتغير  $Y$  - فإن الكتلة الكلية (أو الاحتمال الكلي) في التوزيع الثنائي المشترك للمتغير  $(X, Y)$  تكون متركزة عند نقاط تقاطع الخطوط المستقيمة  $X = x_i$  و  $Y = y_j$  أي عند النقط  $(x_i, y_j)$  حيث كل من  $i, j$  تأخذ القيم  $1, 2, 3, \dots$  بحيث أن الكتلة (أو الاحتمال) المتركزة عند النقطة  $(x_i, y_j)$  يساوي  $P_{ij}$ . وحيث أن النقط  $x_1, x_2, \dots$  على محور  $X$  تمثل نقاط الاحتمال في التوزيع الهامشي للمتغير  $X$ ، فإن الاحتمال  $P_{i.}$  المعطى بالعلاقة (2. 15. 7) - يكون هو مقدار الكتلة المتركزة عند النقطة  $x_i$ .

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 – 16 – 3) المتغير الثنائي المتلاشى (أو المدمج): Degenerate r. v.

تبعياً لهند (2 – 6 – 4) من حالة المتغير المفرد المدمج إلى حالة المتغير الثنائي يمكن تقديم ما يلي:

المتغير العشوائي  $(X, Y)$  يسمى متغيراً متلاشياً (أو مدمجاً) إذا وُجِدت نقطة وحيدة  $(x_0, y_0)$  في المستوى  $R_2$  يتركز عندها الاحتمال الكلي الذي يعادل الوحدة وفي هذه الحالة تكون دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة لهذا المتغير معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2.16.1a): F(x, y) = \begin{cases} (x - c_1, y - c_2) & \\ 1 & ; x \geq c_1, y \geq c_2 \\ 0 & ; \end{cases}$$

خلاف ذلك

وتكون دالة كثافة احتماله:

$$(2.16.1b): P(x, y) = \begin{cases} 1 & ; (x, y) = (c_1, c_2) \\ 0 & ; \end{cases} \text{ خلاف ذلك}$$

وقد يكون أحد المتغيرين متلاشياً دون الآخر وتكون دالة توزيعه الاحتمالي كما سبق تعريفها في (2 – 6 – 4).

(2 – 16 – 4):

ذكرنا قبل ذلك في حالة المتغير المفرد المستمر أن احتمال أن يأخذ المتغير قيمة معينة يساوي الصفر كما هو موضح بالعلاقة (2. 7. 5). والآن ننوّه في حالة المتغير المستمر الثنائي  $(X, Y)$  أن احتمال أن يساوي المتغير  $(X, Y)$  نقطة ما  $(x, y)$  في المستوى  $R_2$  أو ينتمي إلى خط ما في  $R_2$  يساوي الصفر. فمن العلاقة (2. 14. 8) نجد أن:

$$(2.16.2): Pr(X = x, Y = y) = \int_x^x \int_y^y f(u, v) du dv = 0$$

أي أن الاحتمال عند نقطة في المستوى  $R_2$  يساوي الصفر. وبالمثل يكون الاحتمال على أي خط في المستوى  $R_2$  – ليكن الخط المستقيم  $X = x$  – هو:

$$(2.16.3): Pr(X = x, -\infty \leq Y \leq \infty) = \int_x^x \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du dy = \int_x^x f_1(u) du = 0$$



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ويمكن إثبات أن احتمال أن ينتمي المتغير المستمر  $(X, Y)$  إلى أى مجموعة قابلة للعد من النقط أو المنحنيات فى المستوى  $R_2$  يساوى الصفر.

مثال (2 - 16 - 1):

تجربة عشوائية تتكون من سحب كرتان (بدون إرجاع) من كيس به 3 كرات بيضاء وكرتان سوداء. فإذا كان المتغير العشوائى الثانى  $(X, Y)$  معرف على فراغ العينة لهذه التجربة بحيث أن المتغير  $X$  يمثل نتيجة السحبة الأولى و  $Y$  نتيجة السحبة الثانية - و  $X = 0$  إذا كانت نتيجة السحبة الأولى كرة بيضاء و  $X = 1$  إذا كانت النتيجة كرة سوداء - كما أن  $Y = 0$  إذا كانت نتيجة السحبة الثانية كرة بيضاء و  $Y = 1$  إذا كانت كرة سوداء.

(أ) أوجد دالة الاحتمال المشتركة  $P_{ij}$  للمتغير  $(X, Y)$  ودالتى الاحتمال الهامشيتين  $P_{i\cdot}$ ,  $P_{\cdot j}$  لكل من المتغيرين  $X$  و  $Y$  على الترتيب. وارسم هذه الدوال.

(ب) أوجد دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة  $F(x, y)$  وارسمها وكذلك دالتى التوزيع الهامشيتين  $F_X(x)$ ,  $F_Y(y)$  مع رسم كل منهما. - هل شكل دالتى التوزيع الهامشيتين يوضح أن كل منهما مستمرة من ناحية اليمين؟

(ج) أوجد الاحتمالات التالية:

$$P_1 = \Pr(0 \leq X < 1, 0 \leq Y < 1)$$

$$P_2 = \Pr(0 \leq X < 1, 0 \leq Y \leq 1)$$

$$P_3 = \Pr(X = 1, Y = 1)$$

(الحل)

(أ) لو رمزنا للكرة البيضاء بالحرف  $W$  والكرة السوداء بالحرف  $B$  فإن فراغ العينة لهذه التجربة يتكون من مجموعة من العناصر كل عنصر يمثل زوج مرتب من الحرفين  $(W, B)$  أو  $(B, W)$  أو  $(W, W)$  أو  $(B, B)$  الأيسر يمثل نتيجة السحبة الأولى والأيمن نتيجة السحبة الثانية. ويكون فراغ العينة هو:

$$S = \{(W, W), (W, B), (B, W), (B, B)\}$$

وبتعريف المتغير  $(X, Y)$  على فراغ العينة  $S$  نجد أن  $(X, Y)$  يأخذ القيم التالية:

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وهي نقط الاحتمال للمتغير المشترك  $(X, Y)$ .

Y \ X	0	1
0	(0, 0)	(0, 1)
1	(1, 0)	(1, 1)

وعند نقط الاحتمال هذه يمكن الحصول على دالة الاحتمال المشتركة  $P_{ij}$  باستخدام العلاقة (2. 14. 1):

$$P_{00} = \Pr(X = 0, Y = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

وبالمثل

$$P_{10} = \frac{3}{10}, P_{01} = \frac{3}{10}, P_{11} = \frac{1}{10}$$

كما يمكن الحصول على دالة الاحتمال الهامشية  $P_{i.}$  للمتغير  $X$  باستخدام العلاقة (2. 15. 7) وبالمثل دالة الاحتمال الهامشية  $P_{.j}$  للمتغير  $Y$  - كما يلي:

أولاً:  $P_{i.}$  عندما  $i = 0, 1$ .

$$P_{0.} = \sum_{j=0}^1 P_{0j} = P_{00} + P_{01} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

وبالمثل:

$$P_{1.} = P_{10} + P_{11} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$$

ثانياً:  $P_{.j}$  عندما  $j = 0, 1$ :

$$P_{.0} = \sum_{i=0}^1 P_{i.} = P_{00} + P_{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P_{.1} = P_{01} + P_{11} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$$

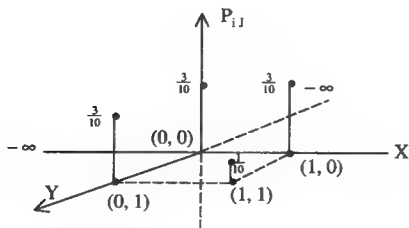
ويمكن كتابة الاحتمالات المشتركة  $P_{ij}$  والاحتمالات الهامشية  $P_{i.}$ ،  $P_{.j}$  في

الجدول التالي:

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

		$P_{ij}$		
$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$		0	1	$P_{i.}$
0		$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
1		$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
$P_{.j}$		$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

في الجدول السابق العمودان الأول والأخير يمثلان قيم  $X$  والاحتمالات المناظرة – أى يمثل توزيع المتغير  $X$  – وبالمثل الصف الأول والأخير يمثل توزيع  $Y$  – أما صلب الجدول فيمثل قيمة دالة الاحتمال المشتركة  $P_{ij}$  عند جميع نقط الاحتمال وفيما يلي رسم الدالة  $P_{ij}$ .



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

أما الدالتين الهامشيتين  $P_{i.}$  ،  $P_{.j}$  فيمكن رسمهما بالشكل التالي:

وشكل الدالة  $P_{.j}$  مثل الشكل السابق تماماً مع كتابة  $Y$  بدلاً من  $X$  و  $P_{i.}$  بدلاً من  $P_{.j}$ .  
(ب) أما بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  فنجد أنها تساوى الصفر لجميع قيم  $y < 0$  ،  $x < 0$  ولكن

(1) عندما  $0 \leq x < 1$  تكون

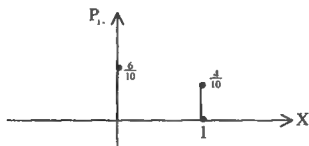
$$F(x, y) = \frac{3}{10} ; 0 \leq y < 1$$

$$= \frac{6}{10} ; y \geq 1$$

(2) وعندما  $x \geq 1$  تكون

$$F(x, y) = \frac{6}{10} ; 0 \leq y < 1$$

$$= 1 \quad y \geq 1$$

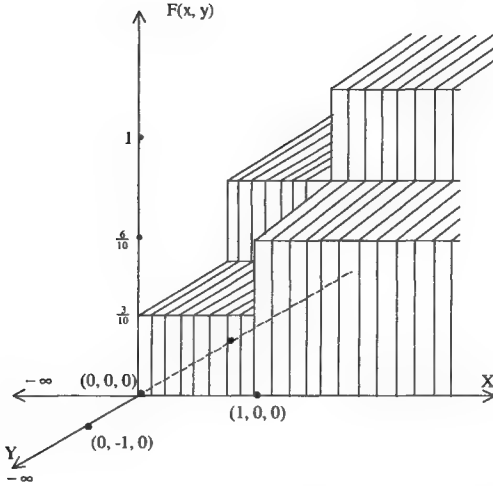


ويمكن كتابتها في شكل جدول كما يلي:

		$F(x, y)$		
		$y < 0$	$0 \leq y < 1$	$y \geq 1$
$x \backslash y$				
$x < 0$		0	0	0
$0 \leq x < 1$		0	$3/10$	$6/10$
$x \geq 1$		0	$6/10$	1
$F_2(y) = F(\infty, y)$		0	$6/10$	1

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

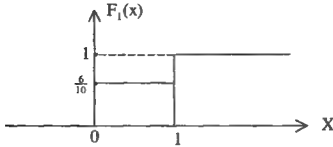
والشكل التالي يوضح شكل الدالة  $F(x, y)$



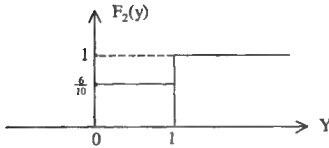
"جعلنا الجزء الخارجى من محور  $Y$  هو السالب لتوضيح الرسم"

وبعمل إسقاط لمحور  $Y$  على محور  $X$  نحصل على شكل دالة التوزيع الهامشية للمتغير  $X$  فى المستوى  $(X, 0)$  - أو من العمودين الأول والأخير من الجدول السابق - نحصل على:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي



وبالمثل نجد أن دالة التوزيع الهامشية للمتغير  $Y$  هي:



من الشكلين السابقين نرى أن دالة التوزيع الهامشية لكل من  $X$ ،  $Y$  دالة درجيه قفازة ومستمرة من ناحية اليمين كما أن شكل الدالة  $F(x, y)$  السابق يوضح أنها دالة قفازة ومستمرة من ناحية اليمين بالنسبة لكل من المتغيرين كل على حده.

(جـ) باستخدام العلاقة (2. 14. 3) وجدول  $P_{ij}$  السابق نجد أن:

$$P_1 = \Pr(0 \leq X < 1, 0 \leq Y < 1) = \Pr[(0, 0)] = P_{00} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \Pr(0 \leq X < 1, 0 \leq Y \leq 1) = \Pr[(0, 0), (0, 1)] \\ &= P_{00} + P_{01} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} \end{aligned}$$

$$P_3 = \Pr(X = 1, Y = 1) = P_{11} = \frac{1}{10}.$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

مثال (2-16):

إذا كان المتغيران العشوائيان  $X, Y$  من النوع المستمر ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير الثنائي  $(X, Y)$  هي:

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

= 0      خلاف ذلك

أوجد ما يلي

(أ) دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$  ودالتي التوزيع الهامشيتين  $F_1(x), F_2(y)$  — وكذلك دالتي كثافة الاحتمال الهامشيتين  $f_1(x), f_2(y)$ .

(ب)  $Pr(X > 2Y), P(X < 2Y)$

(ج)  $Pr(X > 1)$

(د)  $Pr(X = Y)$

(هـ)  $Pr(X + Y \leq 1)$

(الحل)

(أ) من العلاقة (2.14.5) نجد أن دالة التوزيع المشتركة  $F(x, y)$  هي:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-(u+v)} du dv = [-e^{-u}]_0^x [-e^{-v}]_0^y$$

$$= [1 - e^{-x}] [1 - e^{-y}] ; x \geq 0, y \geq 0$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) = e^{-x} e^{-y} = e^{-(x+y)}$$

وهي دالة كثافة الاحتمال  $f(x, y)$ .

ومن العلاقة (2.15.6) نجد أن:

$$F_1(x) = F(x, \infty) = 1 - e^{-x} ; x \geq 0$$

$$F_2(y) = F(\infty, y) = 1 - e^{-y} ; y \geq 0$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

كما أن:

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = e^{-x} ; x \geq 0$$

أو

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} f(x, y) dy = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x} , x \geq 0$$

وبالمثل

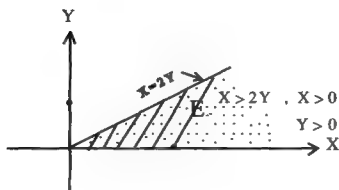
$$f_2(y) = e^{-y} , y \geq 0$$

(ب)

$$\Pr(X > 2Y) = P(E)$$

حيث E هي مجموعة النقط في المستوى  $R_2$  التي تحقق العلاقة  $X > 2Y$  و  $Y \geq 0, X \geq 0$  — أي أن:

$$E = \{(x, y) : x > 2y, x, y \geq 0\}$$



المنطقة المظلمة تمثل المجموعة E — إذن باستخدام العلاقة (2. 14. 7) نجد أن:



الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$\begin{aligned}\Pr(X > 2Y) &= \Pr(E) = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{x/2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \int_0^{x/2} e^{-y} dy \right] dx \\ &= \left[ -e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \left(-\frac{2}{3}\right) e^{-3x} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{1}{3} \\ \therefore \Pr(X < 2Y) &= 1 - \Pr(X > 2Y) \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(جـ)

$$\Pr(X > 1) = 1 - \Pr(X \leq 1) = 1 - F_1(1) = 1 - [1 - e^{-1}] = e^{-1}$$

(د)

$$\Pr(X = Y) = P(E)$$

حيث E هي مجموعة النقط الموجودة على الخط  $X = Y$  في المستوى  $R_2$  إذن

$$\Pr(X = Y) = 0$$

كما أوضحنا في البند (2 - 16 - 4) أن الاحتمال على أى خط في المستوى  $R_2$  يساوى الصفر.  
كما أن:

$$\Pr(X = Y) = \int_{x=0}^{\infty} \left( \int_{y=x}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_{x=0}^{\infty} (0) dx = 0.$$

(هـ)

$$\Pr(X + Y \leq 1) = P(E)$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

حيث

$$E = \{(x, y): x + y \leq 1, x > 0, y > 0\}$$



E هي المنطقة المظلمة في الرسم السابق.

$$\begin{aligned} \Pr(X + Y \leq 1) &= \Pr(E) = \iint_{\substack{x+y \leq 1 \\ x, y > 0}} e^{-x} e^{-y} dx dy \\ &= \int_0^1 e^{-x} [1 - e^{-(1-x)}] dx = 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

$$:(5 - 16 - 2)$$

نلاحظ أن معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة (أو دالة الاحتمال المشتركة) لمتغير ثنائي  $(X, Y)$  يترتب عليه معرفة دالتي كثافة الاحتمال الهامشيتين ولكن العكس غير صحيح بصفة عامة — أي أن معرفة الدوال الهامشية لا يترتب عليه معرفة الدالة المشتركة. وقد قدم "جمل" "E. J. Gumbel" عام 1958 عدد لانهايتي من دوال كثافات الاحتمال المشتركة لها جميعاً نفس الدالتين الهامشيتين.

وهذا يوضح أن معرفتنا للدالتين الهامشيتين لا يوصلنا إلى دالة كثافة احتمال مشتركة وحيدة وإنما قد يوصلنا إلى عدد لانهايتي من دوال كثافات الاحتمال المشتركة — كما في حالة الدوال التي قدمها "جمل". لذلك نقدم فيما يلي الدوال المشتركة التي قدمها "جمل" ونثبت أنها كثافات احتمال وأنها تحقق الخاصية المشار إليها. لقد قدم "جمل" دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$(2. 16. 4): f(x, y, \alpha) = f_1(x) f_2(y) \{1 + \alpha [2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1]\}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لجميع قيم  $-1 \leq \alpha \leq 1$ ، حيث أن  $f_i(\cdot)$  دالة كثافة احتمال،  $F_i(\cdot)$  دالة التوزيع الاحتمالي المناظرة ( $i = 1, 2$ ).

الدالة المشتركة السابقة تمثل عدد لانهائي من دوال كثافات الاحتمال لجميع قيم  $-1 \leq \alpha \leq 1$ ، إذ يمكن إثبات أنه لكل قيمة من قيم  $\alpha$  تكون الدالة  $f(x, y, \alpha)$  دالة كثافة احتمال. ولما كانت قيم  $\alpha$  عددها لانهائي ( $-1 \leq \alpha \leq 1$ ) فيكون لدينا عدد لانهائي من دوال كثافات الاحتمال المشتركة  $f(x, y, \alpha)$ . فإذا أثبتنا بعد ذلك أن كل هذه الدوال لها نفس الدالة كثافة الاحتمال الهامشيتين نكون قد حققنا الهدف الذي نسعى إليه، وهو أن معرفة الدوال الهامشية لا يترتب عليه تحديد دالة مشتركة وحيدة. ولإثبات أن  $f(x, y, \alpha)$  دالة كثافة احتمال مشتركة نثبت أولاً أنها غير سالبة وثانياً أن تكاملها بالنسبة لـ  $x$  و  $y$  يساوي الواحد الصحيح وذلك كما يلي:

أولاً: بما أن  $-1 \leq \alpha \leq 1$  وكل من  $F_1(x)$  و  $F_2(y)$  دالة توزيع احتمالي إذن كل من  $[2F_1(x) - 1]$  و  $[2F_2(y) - 1]$  تقع بين  $-1$  و  $+1$  وعلى ذلك فإن حاصل ضرب  $\alpha$  في العاملين السابقين يحقق العلاقة التالية:

$$-1 \leq \alpha [2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1] \leq 1$$

إذن:

$$1 + \alpha [2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1] \geq 0$$

وبالتعويض عن ذلك في معادلة (2. 16. 4) نجد أن  $f(x, y, \alpha) \geq 0$  أى دالة غير سالبة.

ثانياً: لإثبات أن تكامل الدالة  $f(x, y, \alpha)$  بالنسبة للمتغيرين  $x$  و  $y$  يساوي الواحد الصحيح يكفي إثبات أن دالتي كثافة الاحتمال الهامشيتين لهذه الدالة هما دالتي كثافة الاحتمال  $f_1(x)$  و  $f_2(y)$  إذ أنه في هذه الحالة يكون:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \alpha) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \alpha) dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x)] dx = 1 \end{aligned}$$

ويمكن إثبات أن  $f_1(x)$  هي دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $x$  كما يلي:

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

نفرض أن:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \alpha) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y) \{1 + \alpha [2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1]\} dy \\ &= f_1(x) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) dy + \alpha [2F_1(x) - 1] \int_{-\infty}^{\infty} [2F_2(y) - 1] f_2(y) dy \right\} \end{aligned}$$

في التكامل الأخير ضع:

$$F_2(y) = Z$$

$$\therefore I = f_1(x) \left\{ 1 + \alpha [2F_1(x) - 1] \int_0^1 (2Z - 1) dz \right\} = f_1(x)$$

أى أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X$  هي  $f_1(x)$  — وبالمثل يمكن إثبات أن الدالة الهامشية للمتغير  $Y$  هي  $f_2(y)$ . وهذا يؤكد أن الدالة  $f(x, y, \alpha)$  دالة كثافة احتمال وأن تكاملها يساوى الواحد الصحيح.

ويمكن إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  هي:

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y) \{1 + \alpha [1 - F_1(x)][1 - F_2(y)]\}.$$

## (2- 17) التوزيعات الشرطية للمتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة:

### Conditional Distributions of Two – Dimensional r. v. 's.:

مفهوم التوزيعات الشرطية مثل مفهوم الاحتمال الشرطي تماماً — وفي الاحتمال الشرطي — فى الباب الأول بند (1 – 19) قمنا صيغة هامة لاحتمال وقوع حدث ما  $A$  إذا علمنا أن حدث آخر  $B$  قد وقع فعلاً — فإذا كان الحدثان  $A, B$  معرفان على فراغ احتمالي واحد فإن الاحتمال الشرطي  $P(A | B)$  لوقوع الحدث  $A$  إذا علمنا أن الحدث  $B$  قد وقع فعلاً هو:

$$(2. 17. 1): P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

إذا كانت  $P(B) > 0$  ويترك بدون تعريف إذا كانت  $P(B) = 0$ . وحيث أننا نهتم أساساً بالأحداث المعرفة بدلالة المتغيرات العشوائية، لذلك يكون من المفيد إعادة صياغة حالات (أو معادلات) الاحتمال الشرطي المعطاة في الباب الأول بند (1 – 19) معبرين عن الأحداث بالمتغيرات العشوائية، وهذا ما نسميه بالتوزيعات الشرطية. وسوف نبدأ بمناقشة هذا الموضوع بالنسبة للنوعين الأكثر أهمية من المتغيرات العشوائية وهما النوع المنقطع والنوع المستمر – على أن نبدأ بحالة المتغير الثنائي في البندين (2 – 17 – 1) ثم نعمم فيما بعد إلى حالة المتغير المتعدد الذي يحتوى على  $n$  من المركبات في البندين (2 – 18، 19) ثم نقدم المتغيرات العشوائية المستقلة والاستقلال الإحصائي في البند (2 – 20) ثم التوزيعات المشتركة المختلفة في بند (2 – 21).

(2 – 17 – 1) للتوزيعات الشرطية للمتغير المنقطع  $(X, Y)$ :

Conditional Distributions of the Discrete  $r. v. (X, Y)$ :

إذا كان لدينا متغيران عشوائيان  $X$  و  $Y$  من النوع المنقطع ومعرفان على فراغ احتمالي واحد حيث أن  $X$  ممكن أن يأخذ أحد القيم التالية  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) و  $Y$  ممكن أن يأخذ أحد القيم  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) وكانت دالة الاحتمال المشتركة  $P_{ij}$  للمتغير الثنائي المنقطع  $(X, Y)$  هي:

$$P_{ij} = \Pr(X = x_i, Y = y_j)$$

فإن التوزيع الهامشي لكل من  $X$  و  $Y$  هو على الترتيب كما يلي:

$$P_{i.} = \Pr(X = x_i); i = 1, 2, \dots$$

$$P_{.j} = \Pr(Y = y_j); j = 1, 2, \dots$$

فإذا كان الحدث  $A$  هو أن القيمة الملاحظة للمتغير العشوائي  $X$  تساوى  $x_i$  — حيث  $P_{i.} > 0$  — وكان الحدث  $B$  هو أن القيمة الملاحظة للمتغير  $Y$  تساوى  $y_j$  — حيث  $P_{.j} > 0$  — فإن العلاقة (2. 17. 1) تصبح كما يلي:

$$(2. 17. 2): \Pr(X = x_i | Y = y_j) = \Pr(x_i | y_j) = \frac{\Pr(X = x_i, Y = y_j)}{\Pr(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}}$$

إذا كانت  $P_{.j} > 0$  وتترك بدون تعريف إذا كانت  $P_{.j} = 0$  — والعلاقة السابقة

صحيحة لجميع قيم  $j = 1, 2, \dots$  — وعندما تكون  $Y = y_j$  أى عندما يأخذ المتغير  $Y$  قيمة ثابتة  $y_j$  و  $X$  تتغير أخذة جميع نقط الاحتمال  $x_1, x_2, \dots$  للمتغير  $X$  فإن العلاقة (2. 17. 2) تسمى دالة احتمال المتغير المنقطع  $X$  عندما (أو بشرط أن)  $Y = y_j$  أو دالة الاحتمال

## الفصل الثالث - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

الشرطية للمتغير  $X$  عندما  $Y = y_j$  — وهذا المتغير  $Y$  يسمى بالمتغير المستقل (أو المتبوع) والمتغير  $X$  يسمى بالمتغير التابع وأحياناً نرمز له بالرمز  $X|y$  بدلاً من  $X$ . ويمكن أن نرمز لدالة الاحتمال الشرطية للمتغير التابع  $X$  عندما يكون المتغير المستقل  $Y$  مساوياً للقيمة  $y$  بالرمز التالي:

$$(2.17.3): P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P_2(y)}$$

حيث  $P(x, y)$  هي دالة احتمال المتغير  $(X, Y)$  و  $P_2(y)$  دالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$ . والعلاقة (2.17.2) [أو كذلك العلاقة (2.17.3)] تحقق شروط كثافة الاحتمال إذ نجد أن:  $P(x_i|y_j) \geq 0$  كما أن:

$$(2.17.4): \sum_i P(x_i|y_j) = \frac{1}{P_{.j}} \sum_i P(x_i, y_j) = \frac{1}{P_{.j}} P_{.j} = 1.$$

كما أن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير الشرطي  $X|y_j$

$$(2.17.5): F(x|y_j) = \frac{1}{P_{.j}} \sum_{i: x_i \leq x} P(x_i, y_j) = \sum_{i: x_i \leq x} \left[ P_{ij} / \sum_s P_{is} \right].$$

وبالمثل يمكن الحصول على صيغ مماثلة للمتغير الشرطي  $Y|x_i$  حيث نجد أن:

$$(2.17.6): P(y_j|x_i) = P_{ij}/P_{i.}$$

$$P(y|x) = P(x, y)/P_i(x) \text{ , , } F(y|x_i) = \sum_{j: y_j \leq y} \left[ P_{ij} / \sum_s P_{is} \right].$$

والعلاقة (2.17.3) يمكن أن توضع في الصورة التالية:

$$(2.17.7): P(x, y) = P(x|y)P_2(y) = P(y|x)P_1(x)$$

والصيغة السابقة تمكننا من تحديد دالة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  على خطوتين في الخطوة الأولى نحدد دالة احتمال المتغير الشرطي  $X|y$  — الدالة  $P(x|y)$  — وفي الخطوة التالية نحدد دالة احتمال المتغير  $Y$  — الدالة  $P_2(y)$  — وبضرب الدالتين في بعضهما نحصل على دالة الاحتمال المشتركة  $P(x, y)$ . وبهذا نتمكن من الحصول على دالة الاحتمال الهامشية  $P_1(x)$  للمتغير  $X$  التي كثيراً ما تكون هي هدفنا الأساسي ويكون من الصعب الحصول عليها مباشرة، لذلك نحصل أولاً على  $P(x, y)$  بالطريقة التي أشرنا

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

إليها ويجمع  $P(x, y)$  بالنسبة لجميع قيم  $y$  نحصل على الدالة الهامشية المستهدفة  $P_1(x)$ . ونقدم فيما يلي مثالين في الأول منهما يمكن الحصول مباشرة على الدالة  $P(x, y)$  ومنها نحصل على  $P_1(x)$  ثم باستخدام العلاقة (2. 17. 3) نحصل على  $P(y | x)$  – وفي المثال الثاني يكون من الأسهل الحصول على  $P(y | x)$  و  $P_1(x)$  ومنها نحصل على  $P(x, y)$  ومن الأخيرة نحصل على  $P_2(y)$  حيث أنه من الصعب الحصول على  $P(x, y)$  أو  $P_2(y)$  مباشرة.

مثال (2 – 17 – 1): إذا كان  $(X_1, X_2)$  متغير عشوائي ثنائي مشترك دالة كثافة احتماله معطاة بالجدول التالي:

$(X_1, X_2)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P(X_1, X_2)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$

و  $P(x_1, x_2)$  تساوي الصفر خلاف ذلك.

أوجد الدالتين الهامشيتين  $P_1(x_1)$  و  $P_2(x_2)$  والدالتين الشرطيتين  $P_{12}(x_1 | x_2)$  و  $P_{21}(x_2 | x_1)$ .

(الحل)

يمكن الحصول على الدالتين الهامشيتين  $P_1(x_1)$  و  $P_2(x_2)$  بتطبيق العلاقة (2. 15. 7) ويتم ذلك بتكوين الجدول

		$P_{i,j}$		
$X_1 \backslash X_2$	$X_2$	0	1	$P_2 = \sum_i P_{i,j}$
	$X_1$			
0		$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$
1		$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{7}{18}$
2		$\frac{6}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$
$P_1 = \sum_j P_{i,j}$		$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{18}$	1

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

[القيم الموجودة في الخلايا الداخلية للجدول هي الاحتمالات  $P_{1j}$ ]

الصف الأخير يمثل الدالة  $P_2(x_2)$  والعمود الأخير يمثل الدالة  $P_1(x_1)$ .

بالنسبة للدالة الشرطية  $P_{12}(x_1 | x_2)$  يمكن الحصول عليها كما يلي:

نوجد قيمة الدالة عند قيم  $x_2$  المختلفة (0, 1). عندما  $x_2 = 0$ : نوجد قيمة  $P_{12}(x_1 | 0)$  لقيم  $x_1 = 0, 1, 2$ .

$$P_{12}(0|0) = \frac{\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0)}{\Pr(X_2 = 0)} = \frac{1}{18} + \frac{11}{18} = \frac{1}{11}$$

وبالمثل:

$$P_{12}(1|0) = \frac{4}{11}, \quad P_{12}(2|0) = \frac{6}{11}$$

وكذلك:

$$P_{12}(0|1) = \frac{3}{7}, \quad P_{12}(1|1) = \frac{3}{7}, \quad P_{12}(2|1) = \frac{1}{7}$$

وبنفس الأسلوب يمكن الحصول على  $P_{21}(X_1 | X_2)$  والجدولين التاليين يعطيان

قيم الدالتين  $P_{21}(X_2 | X_1)$  و  $P_{12}(X_1 | X_2)$

$P_{12}(X_1 | X_2)$

$P_{12}(X_1   X_2)$	$P_{12}(X_1   X_2)$	
$X_1$	$P_{12}(X_1   X_2 = 0)$	$P_{12}(X_1   X_2 = 1)$
0	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{7}$
1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{7}$
$\Sigma$	1	1



الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وبالمثل

$$P_{21}(X_2 | X_1)$$

$P_{21}(X_2   X_1)$	$P_{21}(X_2   X_1 = 0)$	$P_{21}(X_2   X_1 = 1)$	$P_{21}(X_2   X_1 = 2)$
$X_2$			
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\Sigma$	1	1	1

مثال (2 - 17 - 2): عند سحب مجموعة مكونة من 13 ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) – ما هو احتمال أن يوجد بين المجموعة المسحوبة  $x$  ولد إذا علمنا أن بها  $y$  بنت – أي ما هو الاحتمال  $Pr(x | y)$  ؟

(الحل)

بتطبيق مبادئ الاحتمالات يمكن إثبات أن احتمال أن يوجد بالمجموعة المسحوبة  $x$  ولد و  $y$  بنت هو:

$$P(x, y) = \frac{\binom{4}{x} \binom{4}{y} \binom{44}{13-x-y}}{\binom{52}{13}}$$

إن  $P_2(y)$  – احتمال أن يوجد بالمجموعة المسحوبة  $y$  بنت – هي:

$$P_2(y) = \sum_{x=0}^4 P(x, y) = \binom{4}{y} \binom{48}{13-y} / \binom{52}{13}$$

وبتطبيق العلاقة (2. 17. 3) نجد أن:

$$P(x | y) = \binom{4}{x} \binom{44}{13-x-y} / \binom{48}{13-y}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

**مثال (2 – 17 – 3):**  $X$  متغير عشوائي يمثل عدد النقاط على السطح العلوي عند إلقاء زهرة نرد متزنة. ولدينا تجربة عشوائية تتكون من إلقاء زهرة نرد، فإذا كانت نتيجة الرمية هي  $X = x$  فإننا نقوم بإلقاء  $x$  من قطع العملة المتزنة. والمتغير العشوائي  $Y$  يمثل عدد الصور التي نحصل عليها عند إجراء مثل هذه للتجربة، فما هو احتمال الحصول على صور عددها  $y$ ؟

(الحل)

المطلوب هو الحصول على  $P(Y = y) = P_2(y)$ . هنا ليس من السهل الحصول على  $P(x, y)$  كما في المثال السابق، لكن يمكن بسهولة الحصول على  $P(y | x)$  باستخدام القانون ذو الحدين حيث نجد أن:

$$P(y | x) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

كما أن:

$$P_1(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}$$

إن يمكن الآن الحصول على  $P(x, y)$  باستخدام العلاقة (2. 17. 7) كما يلي:

$$P(x, y) = \frac{1}{6} \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, \dots, 6, y = 0, 1, 2, \dots, x; \quad (y \leq x).$$

لإيجاد  $P_2(y)$  نجمع  $P(x, y)$  بالنسبة لـ  $x$  ابتداءً من  $x \geq y$  حتى  $x = 6$

عندما  $y = 0$

$$P_2(0) = \sum_{x=1}^6 P(x, 0) = \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} \right] = \frac{63}{384}$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة  $P_2(y)$  لجميع قيم  $y = 0, 1, 2, \dots, 6$  ووضعها في الجدول

التالي:

y	0	1	2	3	4	5	6	Σ
$P_2(y)$	$\frac{63}{384}$	$\frac{120}{384}$	$\frac{99}{384}$	$\frac{64}{384}$	$\frac{29}{384}$	$\frac{8}{384}$	$\frac{1}{384}$	1

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 – 17 – 2) التوزيعات الشرطية للمتغير الثنائي المستمر (X, Y):

**Conditional Distributions of the Conditional r. v. (X, Y):**

بفرض أن  $f(x, y)$  دالة كثافة احتمال متغير ثنائي مستمر (X, Y). عند محاولة إيجاد الاحتمال  $\Pr(Y \leq y | X = x)$  تواجهنا بعض الصعوبات لاستخدام الاحتمال الشرطي المعطى بالعلاقة (2. 17. 1) وذلك لأن  $\Pr(X = x) = 0$  حيث  $X$  متغير مستمر. لذلك نستبدل الحدث  $X = x$  بالحدث  $x - h < X \leq x$  (حيث  $x$  إحدى قيم المتغير  $X$ ,  $h$  عدد حقيقي غير سالب) ونفرض أن  $\Pr(x - h < X \leq x) > 0$  ونعرف الاحتمال الشرطي التالي:

$$\begin{aligned} (2. 17. 7): \Pr(Y \leq y | x - h < X \leq x) &= F(y | x - h < X \leq x) \\ &= \frac{\Pr(Y \leq y, x - h < X \leq x)}{\Pr(x - h < X \leq x)} \\ &= \frac{\int_{x-h}^x \left[ \int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right] du}{\int_{x-h}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) dy \right] du} \end{aligned}$$

هذه دالة توزيع احتمالي شرطية للمتغير العشوائي  $Y$  بشرط أن المتغير  $X$  يحقق المتباينة  $x - h < X \leq x$  عندما تكون  $\Pr(x - h < X \leq x) > 0$ . وهي دالة توزيع احتمالي لأنها – عندما تكون  $x, h$  قيم ثابتة – تحقق شروط دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير الشرطي المفرد  $Y|_x$  – حيث نجد أن الطرف الأيمن من العلاقة (2. 17. 7) يمثل دالة غير سالبة وغير تناقصية في  $y$  ومستمرة من ناحية اليمين في  $y$  كذلك وتساوي الصفر عندما  $y = -\infty$  وتساوي الواحد الصحيح عندما  $y = +\infty$  وإثبات هذا متروك للطلاب. انظر تمرين (2 – 52).

في تعريفنا للعلاقة (2. 17. 7) سنقتصر على الحالة التي يكون فيها نهاية الطرف الأيمن لهذه العلاقة موجودة عندما  $h \rightarrow 0$ . ونفرض أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x, y)$  دالة مستمرة وأن دالة كثافة الاحتمال الشرطية  $f_1(x)$  دالة مستمرة في  $x$  (كما في العلاقة (2. 15. 9)) حيث:

$$(2. 17. 8): f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

كما نفترض كذلك أن الدالة  $f_1(x) > 0$  عند النقطة  $x$ . بعد كل هذه الفروض إذا قسمنا كل من البسط والمقام في الطرف الأيمن للعلاقة (2. 17. 7) على  $h$  وأخذنا النهاية عندما  $h \rightarrow 0$  يمكن الوصول إلى الصورة التالية:

$$(2. 17. 9): F(y | x) = \lim_{h \rightarrow 0} \Pr(Y \leq y | x - h < X \leq x) = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^y f(x, v) dv.$$

والدالة  $F(y | x)$  تسمى دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  (أو للمتغير الشرطي  $Y|_x$ ) وهي دالة مستمرة لمتغير عشوائي مفرد كما يتضح من الفروض السابقة. وإثبات العلاقة (2. 17. 9) متروك للطلاب. انظر تمرين (2 – 53).

وبمفاضلة طرفي العلاقة (2. 17. 9) بالنسبة لـ  $y$  نجد أن دالة كثافة الاحتمال الشرطية المقابلة للدالة  $F(y | x)$  هي الدالة:

$$(2. 17. 10a): f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

عندما تكون  $f_1(x)$  دالة مستمرة في  $X$  ولكبر من الصفر عند النقطة  $X = x$  كما أن

$$(2. 17. 10b): f(x, y) = f(y | x) f_1(x)$$

والعلاقة السابقة تمكننا من إيجاد  $f(x, y)$  على خطوتين – الخطوة الأولى بإيجاد  $f(y | x)$  والثانية بإيجاد  $f_1(x)$  وضرب الدالتين في بعضهما. وهي مفيدة في الحالات التي يكون فيها من الصعب الحصول على  $f(x, y)$  مباشرة من خلال التجربة العشوائية ومفيدة أيضاً لإيجاد  $f_2(y)$  في الحالات التي يكون فيها من السهل معرفة  $f(y | x)$  و  $f_1(x)$  وبالتالي  $f(x, y)$  في حين من الصعب معرفة  $f_2(y)$  مباشرة. وبفس المعالجة السابقة يمكن الحصول على صيغ مشابهة لدالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع الشرطي للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  في الصورة التالية:

دالة للتوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  هي:

$$(2. 17. 11): F(x | y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^x f(t, y) dt$$

ودالة كثافة الاحتمال الشرطية

$$(2. 17. 12a): f(x | y) = f(x, y) / f_2(y)$$

وكذلك

$$(2. 17. 12b): f(x, y) = f(x | y) f_2(y)$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

كما أن:

$$(2. 17. 13): \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) dx = 1$$

حيث نجد من العلاقة (2. 17. 10a) أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) dy = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \frac{1}{f_1(x)} f_1(x) = 1.$$

مثال (2 - 17 - 4): عند اختيار نقطة عشوائية من الفترة  $[0,1]$  إذا كان المتغير العشوائي  $X$  يمثل الرقم المقابل لهذه النقطة - والمتغير العشوائي  $Y$  يمثل الرقم المختار عشوائياً من الفترة  $[0, x]$  حيث  $x$  هي القيمة المشاهدة للمتغير  $X$  في الاختيار الأول. عند إجراء هذه التجربة المركبة أوجد دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي  $Y$  - الدالة  $f_2(y)$ .

(الحل)

من السهل إيجاد الدالة الهامشية  $f_1(x)$  وذلك بافتراض أن جميع النقاط في الفترة  $[0,1]$  لها نفس الفرصة من حيث الاختيار - وطبقاً لمفهوم الاحتمال الهندسي في الباب الأول - تكون دالة كثافة احتمال المتغير  $X$  هي:

$$f_1(x) = 1 \quad ; 0 \leq x \leq 1$$

خلاف ذلك

وبالمثل دالة كثافة الاحتمال الشرطية  $f(y|x)$  للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  هي:

$$f(y|x) = \frac{1}{x} \quad , 0 \leq y \leq x$$

خلاف ذلك

ولكن لا يمكن استنباط دالة كثافة الاحتمال الهامشية  $f_2(y)$  للمتغير  $Y$  مباشرة -  
لذلك نستخدم العلاقة (2. 17. 10a) حيث نجد أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  هي:

$$f(x,y) = f(y|x)f_1(x) = \frac{1}{x} \quad ; 0 \leq y \leq x \leq 1$$

والآن يمكن للحصول على الدالة الهامشية  $f_2(y)$  بمكاملة الدالة السابقة بالنسبة للمتغير  $x$  حيث نجد أن:

$$f_2(y) = \int_{0 \leq y \leq x \leq 1} \frac{1}{x} dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{1}{y}\right) \quad ; 0 \leq y \leq 1.$$

الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

مثال (2 - 17 - 5): في مثال (2 - 16 - 2) أوجد

$$(1) \Pr(Y > 1 | X \leq 1)$$

$$(2) \Pr(X > y | Y > 1)$$

(الحل)

(1)

$$(a) \Pr(Y > 1 | X \leq 1) = \frac{\Pr(Y > 1, X \leq 1)}{\Pr(X \leq 1)}$$

$$(b) \Pr(Y > 1, X \leq 1) = \int_{x=0}^1 \int_{y=1}^{\infty} e^{-(x+y)} dx dy = e^{-1} [1 - e^{-1}]$$

ومن مثال (2 - 16 - 2) نجد أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X$  هي

$$f_1(x) = e^{-x}, x \geq 0$$

إذن:

$$(c) \Pr(X \leq 1) = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

من (a) و (b) و (c) نجد أن:

$$\Pr(Y > 1 | X \leq 1) = e^{-1}$$

$$\Pr(X > Y | Y > 1) = \frac{\Pr(X > Y, Y > 1)}{\Pr(Y > 1)} \quad (2)$$

ومن مثال (2 - 16 - 2) نجد أن:

$$\Pr(Y > 1) = 1 - \Pr(Y \leq 1) = 1 - F_2(1) = e^{-1}$$

$$\Pr(X > Y, Y > 1) = \int_{x=1}^{\infty} \int_{y=1}^x e^{-x} e^{-y} dy dx = \int_{x=1}^{\infty} e^{-x} \left[ \int_{y=1}^x e^{-y} dy \right] dx = \frac{1}{2} e^{-2}$$

$$\therefore \Pr(X > Y | Y > 1) = \frac{1}{2} e^{-2} / e^{-1} = \frac{1}{2} e^{-1}.$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 – 18) المتغير العشوائي المشترك المتعدد $(X_1, \dots, X_n)$ :

يمكننا الآن تعميم كل المفاهيم التي قمنا بها في حالة متغيرين إلى حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية – حيث  $n \geq 1$ . لذا نقدم فيما يلي دوال التوزيع الاحتمالي وكثافة الاحتمال والدوال الهامشية والشرطية الخاصة بالتوزيع الاحتمالي المشترك للمتغير المشترك المتعدد  $(X_1, \dots, X_n)$  كتعميم لحالة المتغير الثنائي.

### (2 – 18 – 1) دالة لتوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير المشترك المتعدد $(X_1, \dots, X_n)$ :

إذا كان لدينا  $n$  من المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  – حيث  $n \geq 1$  – المعرفة على فراغ احتمالي واحد هو  $[R_1, \beta_1, P]$  حيث  $R_1$  هو الخط الحقيقي،  $\beta_1$  هي أصغر عائلة بورالية مكونة من كل المجموعات الجزئية البورالية على الخط الحقيقي و  $P$  هي دالة احتمال معرفة على كل المجموعات المكونة لعناصر العائلة  $\beta_1$  – فيمكن إثبات أن المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  يكون معرفاً على فراغ احتمالي جديد – يسمى بالفراغ الاحتمالي المتعدد (أو المشترك) ونرمز له بالرمز  $[R_n, \beta_n, P_n]$  حيث  $R_n$  هو الفراغ ذو اللون بعداً – الذي يتكون من تقاطع فراغات المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  – و  $\beta_n$  أصغر عائلة بورالية مكونة من كل المجموعات الجزئية للبورالية  $E$  في الفراغ  $R_n$  و  $P_n$  دالة الاحتمال المشتركة المعرفة على كل المجموعات المكونة لعناصر العائلة  $\beta_n$  والمسماة بالعلاقة التالية:

$$(2. 18. 1): P_n(E) = \Pr\{(X_1, \dots, X_n) \in E\}$$

والدالة  $P_n$  دالة احتمال وهي دالة مجموعة – كما سبق أيضاً ذلك في حالة المتغير المفرد – كما أنها تحقق كل خصائص دالة الاحتمال. فهي دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة. كما أن  $P_n(R_n) = 1$  و  $P_n(\phi) = 0$  حيث  $\phi$  هي المجموعة الخالية (الفارغة) في الفراغ  $R_n$  أو  $P_n(E) = 0$  عندما يكون  $E$  حدث مستحيل. فإذا كانت المجموعة  $E$  تمثل فترة في الفراغ  $R_n$  ذو اللون بعداً على الشكل التالي:

$$(2. 18. 2): E_n = \{(x_1, \dots, x_n) : -\infty \leq X_i \leq x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

حيث  $x_i$  أعداد حقيقية تمثل قيم معينة للمتغيرات  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – فإن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  تكون معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2. 18. 3): F(x_1, \dots, x_n) = P_n(E_n) = \Pr[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وهي كما يبدو من المعاملة السابقة - مثل دالة الاحتمال  $P_n$  - دالة حقيقية وحيدة القيمة غير سالبة ولكنها دالة نقطة وليست دالة مجموعة مثل  $P_n$  - حيث أنها تعتمد فقط على القيم  $x_1, \dots, x_n$  وهذه القيم تمثل نقطة في الفراغ  $R_n$  هي النقطة  $(x_1, \dots, x_n)$ . ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x_1, \dots, x_n)$  لها عدة خصائص يمكن الوصول إليها بأسلوب مماثل تماماً لحالة متغيرين عشوائيين - أي دالة التوزيع الاحتمال  $F(x, y)$  كما في بند (2 - 13 - 3) - وهذه الخواص يمكن تلخيصها في العلاقات من (2. 18. 4) إلى (2. 18. 8) التالية:

$$(2. 18. 4): F(-\infty, x_2, \dots, x_n) = \dots = F(x_1, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0$$

$$(2. 18. 5): F(+\infty, \dots, +\infty) = 1$$

$$(2. 18. 6): \lim_{h \rightarrow 0} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)$$

لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$

وهذا معناه أن الدالة  $F(x_1, \dots, x_n)$  مستمرة من ناحية اليمين في كل متغير من المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  وإذا كانت  $E_{ab}$  مجموعة جزئية في الفراغ  $R_n$  معطاة بالعلاقة:

$$(2. 18. 7): E_{ab} = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < X_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

فإن احتمال أن ينتمي المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  إلى المجموعة  $E_{ab}$  يكون معطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} (2. 18. 8): \Pr(E_{ab}) &= \Pr[(X_1, \dots, X_n) \in E_{ab}] \\ &= F(b_1, \dots, b_n) - F(a_1, b_2, \dots, b_n) \\ &\quad - \dots - F(b_1, \dots, b_{n-1}, a_n) \\ &\quad + F(a_1, a_2, b_3, \dots, b_n) + \dots \\ &\quad + F(b_1, \dots, b_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n F(a_1, \dots, a_n) \geq 0 \end{aligned}$$

والعلاقة السابقة منظرية للعلاقة (2. 13. 10) في حالة  $n = 2$  - لذلك فهي شرط أساسي لكي تكون دالة توزيع احتمالي.

سنفرض فيما يلي أن المتغير  $(x_1, \dots, x_n)$  من النوع المستمر ومنوضح فيما بعد كيفية الحصول على كل الصيغ المماثلة عندما يكون المتغير من النوع المتقطع. ويمكن تعميم العلاقة (2. 13. 9b) من حالة متغيرين إلى حالة المتغير المتعدد  $(X_1, \dots, X_n)$  كما يلي:



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال للتوزيع الاحتمالي

إذا كانت  $I_n$  فترة موسعة في الفراغ  $R_n$  معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2. 18. 9): I_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i - h_i < x_i \leq x_i + h_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

فإن:

$$\begin{aligned} (2. 18. 10): \Pr(I_n) &= \Pr[(X_1, \dots, X_n) \in I_n] = \Delta_n F(x_1, \dots, x_n) \\ &= F(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad - F(x_1 - h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad - \dots - F(x_1 + h_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n - h_n) \\ &\quad + \dots + (-1)^n F(x_1 - h_1, \dots, x_n - h_n) \end{aligned}$$

ولو رمزنا لحجم الفترة  $I_n$  بالرمز  $L(I_n)$  فإن:

$$(2. 18. 11): L(I_n) = \prod_{i=1}^n [x_i + h_i - (x_i - h_i)] = \prod_{i=1}^n [2h_i] = 2^n h_1 h_2 \dots h_n.$$

وإذا اعتبرنا أن  $\Delta_n F(x_1, \dots, x_n) = \Pr(I_n)$  هي كمية الاحتمال المنتشرة (أو كتلة من مادة ما منتشرة) في الفترة  $I_n$  و  $L(I_n)$  هو حجم هذه الفترة وكان المتغير  $(X_1, \dots, X_n)$  من النوع المستمر كما ذكرنا سابقاً فإن النسبة  $\Delta_n F / L(I_n)$  تمثل كثافة الاحتمال  $P(I_n)$  (أو كثافة المادة) المنتشرة في الفترة  $I_n$ . كما أن المشتقة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n)$$

إذا كانت هذه المشتقة الجزئية موجودة وتكون

هي نهاية متوسط الكثافة  $\Delta_n F / L(I_n)$  عندما  $0 \leftarrow h_i$  لجميع قيم  $i$  وتسمى دالة كثافة احتمال المتغير المستمر المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$ . وعلى هذا تكون دالة كثافة احتمال المتغير المشترك المستمر  $(X_1, \dots, X_n)$  هي:

$$\begin{aligned} (2. 18. 12): f(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_n F(x_1, \dots, x_n)}{2^n h_1 h_2 \dots h_n} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \end{aligned}$$

لجميع النقط  $(x_1, \dots, x_n)$  في الفراغ  $R_n$  التي تكون عندها المشتقة التفاضلية السابقة موجودة.

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لما إذا كان المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  من النوع المتقطع فإن دالة احتماله المشتركة تكون معطاة بالعلاقة التالية:

$$(2.18.13): P(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

ولأى مجموعة  $E_n$  في الفراغ  $R_n$  يكون احتمال أن المتغير  $(X_1, \dots, X_n)$  ينتمي للمجموعة هو  $E_n$ :

$$(2.18.14): \begin{cases} P_n[E_n] = \int \dots \int_{E_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ \text{إذا كان المتغير } (X_1, \dots, X_n) \text{ من النوع المستمر} \\ \\ = \sum_{E_n} P(x_1, \dots, x_n) \\ \text{إذا كان المتغير } (X_1, \dots, X_n) \text{ من النوع المتقطع.} \end{cases}$$

حيث أن التكامل مأخوذ على كل قيم  $(x_1, \dots, x_n)$  التي تنتمي إلى المجموعة  $E_n$  والمجموع مأخوذ على جميع قيم  $(x_1, \dots, x_n)$  التي تتبع المجموعة  $E_n$  والتي عندها  $P(x_1, \dots, x_n) > 0$ .

ملاحظة (2-18-1):

إذا كان المتغير العشوائي المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  له نقطة احتمال واحدة في الفراغ  $R_n$  لتكن النقطة  $(x_1, \dots, x_n)$  فإن الاحتمال الكلي لهذا المتغير يكون متركزاً عند هذه النقطة وتكون دالة احتمال هذا المتغير عند هذه النقطة هي:

$$(2.18.15): P(x_1, \dots, x_n) = \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = 1$$

وتكون  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  في باقي الفراغ  $R_n$  - والمتغير العشوائي في هذه الحالة يسمى متغيراً منمجا أو متلاشياً Degenerate r. v. - وقد سبق بيان حالة المتغير المنموج في حالة المتغير المفرد بالعلاقة (2.6.6a, b) وفي حالة المتغير الثنائي بالعلاقة (2.16.1a, b) - والنقطة  $(x_1, \dots, x_n)$  تسمى مركز الثقل للمتغير المنموج  $(X_1, \dots, X_n)$  كما تكون هذه النقطة هي نقطة احتماله الوحيدة، كما يمكن أن يكون متغيراً واحداً أو أكثر من المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  منمجا دون الباقي وهذا تعميم مباشر لما سبق إيضاحه في حالة متغيرين.

ودالة كثافة الاحتمال  $f(x_1, \dots, x_n)$  للمتغير المستمر  $(X_1, \dots, X_n)$  تحقق الخاصيتين التاليتين:

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(2.18.16): f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

$$(2.18.17): \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

وإذا كان المتغير  $(X_1, \dots, X_n)$  من النوع المنقطع فإن دالة احتماله تحقق الخاصيتين التاليتين:

$$(2.18.18): P(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

$$(2.18.19): \sum P(x_1, \dots, x_n) = 1$$

حيث  $\sum$  هو المجموع مأخوذاً على كل قيم  $(x_1, \dots, x_n)$  الممكنة في الفراغ  $R_n$  والتي عندها  $P(x_1, \dots, x_n) > 0$ .

(2-18-2) الدوال الهامشية للمتغير  $(X_1, \dots, X_n)$ :

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  الذي عدد مركباته  $n$  حيث  $n > 2$  هي  $F(x_1, \dots, x_n)$  فيمكن الحصول على دوال توزيع احتمالي هامشية عددها  $\binom{n}{k}$  وكل منها تعتبر دالة في متغير مشترك عدد مركباته  $k$  لجميع قيم  $k = 1, 2, \dots, n-1$  وذلك بأسلوب مشابه تماماً لحالة المتغير الثلاثي  $n = 2$  والتي سبق تقديمها.

فمثلاً دوال التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرات المفردة  $X_i$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$  هي:

$$(2.18.20): F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty) \\ = \Pr(X_1 \leq \infty, \dots, X_{i-1} \leq \infty, X_i \leq x, X_{i+1} \leq \infty, \dots, X_n \leq \infty)$$

كما أن دوال التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرات الثنائية المشتركة  $(X_i, X_j)$  لجميع قيم  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ( $i < j$ ) هي:

$$(2.18.21): F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty, x_j, \infty, \dots, \infty) \\ = \Pr(X_1 \leq \infty, \dots, X_{i-1} \leq \infty, X_i \leq x, X_{i+1} \leq \infty, \dots, X_{j-1} \leq \infty, X_j \leq x, X_{j+1} \leq \infty, \dots, X_n \leq \infty)$$

وبنفس الأسلوب يمكن الحصول على دوال التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرات المشتركة الثلاثية والرابعة وهكذا. كما يمكن الحصول على دوال كثافة

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

الاحتمال الهامشية المفردة والثنائية المتغيرات والثلاثية المتغيرات وغيرها من دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  للمتغيرات المستمرة  $X_1, \dots, X_n$  كما يلي:

$$(2.18.22): f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n.$$

لجميع المتغيرات المفردة  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ . وكذلك دوال كثافة الاحتمال الهامشية الثنائية المشتركة للمتغيرات  $(X_i, X_j)$  لجميع قيم  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ( $i < j$ ) يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$(2.18.23): f(x_i, x_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n.$$

وهكذا يمكن استخدام نفس الأسلوب للحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأي مجموعة جزئية من المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  ولكن المجموعة  $(X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_m})$  حيث  $m < n$  كما يلي:

$$(2.18.24): f(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{j_1-1} dx_{j_1+1} \dots dx_{j_m-1} dx_{j_m+1} \dots dx_n.$$

ويمكن الحصول على الدوال الهامشية السابقة إذا كانت المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات متقطعة باستبدال علامات التكامل في الصيغ السابقة بعلامات المجموع في كل العلاقات من (2.18.22) حتى (2.18.24) واستخدام دالة الاحتمال المشتركة  $P(x_1, \dots, x_n)$  بدلا من دالة كثافة الاحتمال  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

**مثال (2-18-1):** إذا كانت المتغيرات  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  من النوع المستمر ولها دالة كثافة الاحتمال المشتركة

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = x_1 x_2 \dots x_5 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_5^2)}, \quad x_i > 0$$

لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, 5$

أوجد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X_1$  ودالة كثافة الاحتمال الهامشية المشتركة للمتغير للتأني  $(X_1, X_2)$ .

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (الحل)

دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X_1$  هي:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2] dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 \\ &= x_1 e^{-\frac{1}{2}x_1^2}, \quad x_1 > 0 \end{aligned}$$

وبالمثل نجد أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية المشتركة للمتغير  $(X_1, X_2)$  هي:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \exp\left[-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2\right]; \quad x_1, x_2 > 0$$

### (2 - 19) الدوال الشرطية للمتغير $(X_1, \dots, X_n)$

يمكن تعميم المفاهيم السابقة للتوزيعات الشرطية لمتغيرين عشوائيين إلى حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية. وسنبدأ أولاً بافتراض أن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  من النوع المستمر ثم نوضح كيفية الحصول على كل للتوزيعات الشرطية عندما تكون المتغيرات من النوع المنقطع.

إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  من النوع المستمر ولها دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغيرات العشوائية  $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_m}$  عندما نأخذ المتغيرات  $X_{i_1}, \dots, X_{i_r}$  قيم ثابتة معينة - حيث  $m + r = n$  - هي:

$$(2. 19. 1): f(x_{j_1}, \dots, x_{j_m} | x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})}$$

فمثلاً في حالة  $m = 2$ ,  $r = 1$ ,  $j_1 = 1, j_2 = 2$ ,  $i_1 = 1$ , نأخذ العلاقة السابقة الصورة التالية

$$f(x_1, x_2 | x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f(x_3)}$$

كما أن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية المقابلة لدالة كثافة الاحتمال الشرطية المعطاة بالعلاقة (2. 19. 1) هي:

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(2. 19. 2): F(x_{j_1}, \dots, x_{j_m} | x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$$

$$= \frac{1}{f(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})} \int_{-\infty}^{x_{j_1}} \dots \int_{-\infty}^{x_{j_m}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \dots dx_{j_m}$$

فإذا كانت  $m = 2$ ،  $r = 1$ ،  $J_1 = 1$ ،  $J_2 = 2$ ، نجد أن:

$$F(x_1, x_2 | x_3) = \frac{1}{f(x_3)} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

أما إذا كانت المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  من النوع المتقطع فيمكننا الحصول على صيغة مقابلة للصيغة (2. 19. 1) و(2. 19. 2) باستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع المناسبة واستبدال دوال كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات المستمرة بدوال الاحتمال المشتركة للمتغيرات المتقطعة.

### (2 – 20) المتغيرات العشوائية المستقلة والاستقلال الإحصائي:

#### Independent r. v. 's & Stochastic Independence:

##### (2 – 20 – 1) حالة متغيرين عشوائيين:

فكما في الباب الأول بند (1 – 23) مفهوم استقلال الأحداث العشوائية والأن نقدم استقلال المتغيرات العشوائية، حيث أن استقلال المتغيرات العشوائية في نظرية التوزيعات يقابل الأحداث المستقلة في نظرية الاحتمالات. لقد ذكرنا في البند (1 – 23) أن الحدثان  $E_1$  و  $E_2$  يكونا مستقلان، إذا فقط إذا، كان احتمال حدوثهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل منهما على حده – أي أن:

$$(2. 20. 1): \Pr(E_1, E_2) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2)$$

وعلى ذلك إذا كان لدينا متغيران عشوائيان  $X, Y$  لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$  ودلتى التوزيع الاحتمالي الهامشيين  $F_1(x)$  و  $F_2(y)$  وكان الحدث  $E_1$  هو أن ينتمي المتغير  $X$  إلى المجموعة  $A$  والحدث  $E_2$  هو أن ينتمي المتغير  $Y$  إلى المجموعة  $B$  و  $A$  و  $B$  مجموعتان بورليتان من الأعداد الحقيقية – إذن طبقاً للعلاقة (2. 20. 1):

يكون المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلان، إذا فقط إذا، كان لأى مجموعتان بورليتان  $A$  و  $B$  من الأعداد الحقيقية:

$$(2. 20. 2): \Pr(X \in A, Y \in B) = \Pr(X \in A) \cdot \Pr(Y \in B)$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فإذا كانت المجموعتان A و B هما الفترتان:

$$A = ]-\infty, x] \equiv -\infty < X \leq x$$

$$B = ]-\infty, y] \equiv -\infty < Y \leq y$$

إن بالتعويض عن A و B في العلاقة (2. 20. 2) يمكن الوصول إلى الشرط اللازم والكافي التالي لاستقلال المتغيرين X و Y كما يلي:

المتغيران العشوائيان X, Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$\Pr(X \leq x, Y \leq y) = \Pr(X \leq x) \Pr(Y \leq y)$$

أي:

$$(2. 20. 3): F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

أي أن المتغيران العشوائيان X و Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة لهما تتكون من حاصل ضرب دالتي التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرين. فإذا كان المتغيران العشوائيان X و Y متصلان فيمكن مفاضلة طرفي المعادلة (2. 20. 3) مرتين مرة بالنسبة للمتغير X ومرة بالنسبة للمتغير Y — فنحصل على المشتقات التفاضلية الجزئية التالية عندما تكون هذه المشتقات موجودة — حيث نجد أن:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_2(y)}{\partial y}$$

أي أن:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

وهذا يوصلنا إلى صيغة أخرى لاستقلال المتغيران العشوائيان X و Y بدلالة دوال كثافات الاحتمال بدلاً من دوال التوزيع الاحتمالي كما يلي:

المتغيران العشوائيان X و Y يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2. 20. 4): f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$$

حيث  $f(x, y)$  هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير (X, Y) و  $f_1(x)$  و  $f_2(y)$  هما دالتي كثافة الاحتمال الهامشيتين للمتغيرين X و Y على الترتيب.

أما إذا كان المتغيران X و Y من النوع المتقطع فيمكن في معادلة (2. 20. 2) اعتبار أن المجموعة A مكونة من عدد حقيقي واحد أو من نقطة واحدة هي  $X = x_i$  والمجموعة B مكونة من نقطة واحدة هي  $Y = y_j$  — وبهذا يمكن كتابة معادلة (2. 20. 2) في الصورة التالية:

$$\Pr(X = x_i, Y = y_j) = \Pr(X = x_i) \Pr(Y = y_j)$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لجميع قيم  $(i, j = 1, 2, \dots)$  وبذلك نصل إلى الصيغة التالية لاستقلال المتغيرين العشوائيين المتقطعين  $X, Y$  كما يلي:

المتغيران العشوائيان المتقطعان  $X, Y$  يكونان مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2.20.5): Pr(X = x_i, Y = y_j) = Pr(X = x_i) \cdot Pr(Y = y_j)$$

أي:

$$P_{ij} = P_{i.} \cdot P_{.j}$$

حيث  $P_{i.}$  هي دالة الاحتمال المشتركة للمتغير الثنائي المتقطع  $(X, Y)$  و  $P_{i.}$  هي

دالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X$  و  $P_{.j}$  هي دالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$ .

واستقلال المتغيرات العشوائية شديد الصلة بمفهوم التوزيعات الشرطية المقدمة في البندين (2-17) و (2-19) – حيث نجد من العلاقة (2.17.2) في حالة المتغير الثنائي المتقطع  $(X, Y)$  أن دالة الاحتمال الشرطية للمتغير المتقطع  $X$  (عندما  $X = x_i$ ) إذا علمنا أن  $Y = y_j$  هي:

$$(2.20.6): Pr(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P_{ij}}{P_{.j}}$$

حيث  $P_{i.}$  هي دالة الاحتمال المشتركة للمتغير المتقطع  $(X, Y)$  و  $P_{.j}$  هي دالة

الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$  – فإذا كان المتغيران العشوائيان  $Y$  و  $X$  مستقلان فإن:  $P_{ij} = P_{i.} \cdot P_{.j}$  وعلى ذلك إذا كان المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلان فإن العلاقة

(2.20.6) – عندما  $P_{.j} > 0$  تأخذ الصورة التالية:

$$Pr(x_i | y_j) = P_{i.} = Pr(X = x_i)$$

وبذلك يمكن إثبات أن:

المتغيران العشوائيان المتقطعان  $X$  و  $Y$  يكونان مستقلان، إذا وفقط إذا، كانت

$$(2.20.7): P(x_i | y_j) = P(x_i)$$

وكذلك

$$P(y_j | x_i) = P(y_j)$$

لجميع نقط الاحتمال  $(y_1, y_2, \dots)$  و  $(x_1, x_2, \dots)$ .



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وبالمثل يمكن في حالة المتغيران المستمران  $X$  و  $Y$  إثبات أن:

المتغيران العشوائيان المستمران  $Y$  و  $X$  يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2. 20. 8): f_{12}(x | y) = f_1(x)$$

$$f_{21}(y | x) = f_2(y)$$

كما يمكن إثبات أن المتغيران العشوائيان  $Y$  و  $X$  (سواء من النوع المنقطع أو المتصل) يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كان:

$$(2. 20. 9): F_{12}(x | y) = F_1(x)$$

$$F_{21}(y | x) = F_2(y)$$

حيث  $F_1(\cdot)$ ،  $F_2(\cdot)$  هي دوال التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرين  $X$  و  $Y$  على الترتيب و  $F_{12}(x | y)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  وبالمثل نعرف  $F_{21}(y | x)$ .

مما سبق يمكن تجميع كل الشروط اللازمة والكافية السابقة لاستقلال المتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  في التعريف التالي:

**تعريف (2 - 20 - 1):** إذا كان المتغيران العشوائيان  $Y$  و  $X$  معرفان على فراغ احتمالي واحد – فإنهما يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، تحقق أحد الشروط المعطاة بالمعادلات من (2. 20. 2) حتى (2. 20. 9).

**ملاحظة (2 - 20 - 1):** في التوزيعات الشرطية بند (2 - 17) سمينا أحد المتغيرين مستقل والآخر تابع – واعتقد الآن بعد تعريف الاستقلال ينضج رداة هذه التسمية حيث أن المتغير المسمى مستقلاً لا يكون مستقلاً فعلاً عن الآخر لذلك نفضل تسميته بالمتغير 'المتبوع' ولكننا سوف نستخدم للتعبيرين ذلك لأن أولهما شائع الاستخدام رغم عدم دقة وثانيهما أقل شيوعاً ولكنه أكثر دقة في التعبير.

(2 - 20 - 2) حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية ( $n > 2$ ):

يمكن الآن تعميم النتائج السابقة لاستقلال متغيرين إلى حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية ( $n > 2$ ) سواء كانت المتغيرات من النوع المستمر أو المنقطع وذلك بتدعيم التعريف التالي:

**تعريف (2 - 20 - 1):**

المتغيرات العشوائية ( $X_1, \dots, X_n$ ) تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، تحقق أحد الشروط التالية:

## الفصل الثاني — المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(2. 20. 10): F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$$

$$(2. 20. 11): f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

إذا كانت المتغيرات مستمرة ودالة كثافة احتمالها المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  ودوال كثافة الاحتمال الهامشية  $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ .

$$(2. 20. 12): P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P_i(x_i)$$

إذا كانت المتغيرات منقطعة ودالة الاحتمال المشتركة لها  $P(x_1, \dots, x_n)$  ودوال الاحتمال الهامشية  $P_i(x_i)$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$

$$(2. 20. 13): F(x_1, \dots, x_{j_n} | x_1, \dots, x_i) = F(x_1, \dots, x_{j_n})$$

$$(2. 20. 14): f(x_1, \dots, x_{j_n} | x_1, \dots, x_i) = f(x_1, \dots, x_{j_n})$$

$$(2. 20. 15): P(x_1, \dots, x_{j_n} | x_1, \dots, x_i) = P(x_1, \dots, x_{j_n})$$

كما أن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، كانت:

$$(2. 20. 16): Pr(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n Pr(X_i \in A_i)$$

حيث  $A_1, \dots, A_n$  مجموعات بورالية من الأعداد الحقيقية. والعلاقة (2. 20. 10) تعتبر حالة خاصة من العلاقة السابقة عندما:  $A_i = ]-\infty, x_i]$ .

نقدم فيما يلي نظرية هامة توضح أن استقلال أى متغيرات عشوائية يترتب عليه استقلال أى دوال فى هذه المتغيرات.

نظرية (2 - 20 - 2):

إذا كان  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية، وكانت المتغيرات العشوائية  $Y_1, \dots, Y_n$  يمكن الحصول عليها من  $X_1, \dots, X_n$  بالعلاقة الدالية التالية:

$$Y_i = g_i(X_i) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

حيث  $g_i(\cdot)$  دالة بورالية فى الأعداد الحقيقية. فإذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة فإن المتغيرات  $Y_1, \dots, Y_n$  تكون مستقلة كذلك.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (الإثبات)

لأى مجموعة بورالية  $A_i$  من الأعداد الحقيقية يمكن تعريف المجموعة التالية من الأعداد الحقيقية  $x$  (حيث  $x$  إحدى قيم المتغير  $X_i$ ):

$$\begin{aligned} B_i &= \{x : g_i(x) \in A_i\} \\ &= \{x : Y_i \in A_i\} \end{aligned}$$

نلاحظ أن  $Y_i \in A_i$ ، إذا وفقط إذا، كانت  $X_i \in B_i$  — أى أن:

$$\Pr(Y_i \in A_i) = \Pr(X_i \in B_i)$$

وعلى ذلك يكون

$$\Pr(Y_1 \in A_1, \dots, Y_n \in A_n) = \Pr(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)$$

ومن استقلال  $X_1, \dots, X_n$ . إذن طبقاً لـ (2.20.16)

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \in B_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr(Y_i \in A_i) \end{aligned}$$

وهذا معناه أن  $Y_1, \dots, Y_n$  متغيرات مستقلة.

### هـ. ط. ث

والنظريات السابقة عندما  $n = 2$  توضح أنه إذا كان المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  مستقلان فإن أى دالة بورالية في  $X$  تكون مستقلة عن أى دالة بورالية في  $Y$  — ولكن يمكن إثبات أن العكس غير صحيح — أى أنه إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  غير مستقلان فليس من الضروري أن تكون أى دالة بورالية في أحد المتغيرين غير مستقلة عن أى دالة بورالية في المتغير الآخر. والمثال التالي يوضح حالة متغيران عشوائيان  $X$  و  $Y$  غير مستقلان في حين أن المتغيران  $Y^2$  و  $X^2$  مستقلان.

مثال (2 - 20 - 1):

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  يمثل عدد الصور في تجربة عشوائية تتكون من إلقاء قطعتي عملة متزنة مرة واحدة، فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$S = \{(TT), (HT), (TH), (HH)\}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$X$  يأخذ القيم 0, 1, 2 ويكون له دالة الاحتمال التالية:

$X$	0	1	2	$\Sigma$
$P_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

وإذا كان المتغير العشوائي  $Y$  يأخذ قيمتين فقط هما (+1) إذا كان وجهي قطعتي العملة متشابهان ويساوي (-1) إذا كان الوجهان مختلفان، فإن دالة احتمال  $Y$  يمكن كتابتها في الجدول التالي:

$Y$	-1	+1	$\Sigma$
$P_2(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

واضح أن المتغيران  $X$  و  $Y$  غير مستقلان لأنه عندما  $X=1$  فإن  $Y$  لابد أن تساوي (-1) وعندما  $X=0, 2$  فإن  $Y$  لابد أن تساوي (+1). ولكن  $(Y^2)$  يأخذ قيمة واحدة هي  $Y^2=1$  (باحتمال يساوي الواحد الصحيح) مهما كانت قيمة  $X^2$  (أي لجميع قيم  $X^2=0,1,4$ ). وهذا يوضح أن  $Y^2$  مستقل عن  $X^2$  بالرغم من أن  $X$  و  $Y$  غير مستقلان.

ملاحظة (2- 20 - أ):

ففي حالة وجود أكثر من متغيرين عشوائيين قد تكون المتغيرات مستقلة متني متني (أي مأخوذة كل اثنين معاً) ولكنها لا تكون مستقلة عند أخذها كل ثلاثة أو أكثر معاً - والمثال التالي الذي قدمه "برنستين" S. Bernstein يوضح هذه الحالة:

مثال (2- 20 - ب): إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, X_2, X_3$  لها دالة الاحتمال المشتركة:

$$P(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; (x_1, x_2, x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فيمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأي متغيرين  $X_i, X_j$  ( $i \neq j$ ) هي:

$$P_{ij}(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , (x_i, x_j) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بينما دالة كثافة الاحتمال الهامشية  $X_i$  هي:

$$P_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x_i = 0, 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ومن الواضح أن:

$$P_{ij}(x_i, x_j) = P_i(x_i)P_j(x_j)$$

حيث كل من الطرفين يساوي  $\frac{1}{4}$

بينما:

$$P(x_1, x_2, x_3) \neq P_1(x_1)P_2(x_2)P_3(x_3).$$

حيث أن الطرف الأيمن يساوي  $\frac{1}{8}$  بينما الطرف الأيسر يساوي  $\frac{1}{4}$ . أي أن

المتغيرات  $X_1, X_2, X_3$  تعتبر مستقلة متشابهة ولكنهما غير مستقلة إذا أخذت الثلاثة معاً.

العلاقة (2. 20. 11) وكذلك (2. 20. 12) توضح أن المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  تكون مستقلة إذا لمكن تحليل دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  إلى حاصل ضرب  $n$  من العوامل كل عامل منها عبارة عن دالة كثافة احتمال أحد المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  - وهذا يتطلب منا معرفة دالة كثافة كل من المتغيرات العشوائية  $X_i$ . وحيث أن ذلك قد يكون متعباً لذلك نقدم فيما يلي نظرية أعم من العلاقتين (2. 20. 11)، (2. 20. 12)، لاستقلال المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  - هذه النظرية مفادها أن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  تكون مستقلة إذا لمكن تحليل دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  إلى حاصل ضرب  $n$  من العوامل كل عامل منها عبارة عن دالة في أحد المتغيرات العشوائية وليس من الضروري أن تكون دالة كثافة احتمال وبالتالي يمكن معرفة استقلال المتغيرات العشوائية من عنده بمجرد معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة حتى إذا لم تكن نعرف دوال كثافات احتمال المتغيرات العشوائية كل على حده. وسنقدم النظرية التالية بالنسبة للمتغيرات المستمرة ويمكن إثباتها في حالة المتغيرات المتقطعة باستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

نظرية (2-20-2 ب):

المتغيرات العشوائية المستمرة  $X_1, \dots, X_n$  تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، كانت دالة كثافة احتمالها المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$(2.20.17): f(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1) \dots h_n(x_n)$$

لكل الأعداد الحقيقية  $x_1, \dots, x_n$  حيث  $h_1(\cdot), \dots, h_n(\cdot)$  دوال بولانية ليس من الضروري أن تكون دوال كثافات احتمال.

(الإثبات)

العلاقة (2.20.17) تعتبر شرط كافي ولازم لاستقلال المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$ .

أولاً: شرط الزوم:

إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة فإن:

$$(a): f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

حيث  $f_i(x_i)$  هي دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X_i$  وهذا يؤكد صحة العلاقة (2.20.17).

ثانياً: شرط الكفاية:

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  يمكن كتابتها في الصورة (2.20.17) فإن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X_i$  يمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة (2.18.22) كما يلي:

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= h_i(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1) dx_1 \dots \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} h_{i-1}(x_{i-1}) dx_{i-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_{i+1}(x_{i+1}) dx_{i+1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x_n) dx_n \\ &= c_1 \dots c_{i-1} c_{i+1} \dots c_n h_i(x_i) \end{aligned}$$

أي أن:

(b):

$$\begin{cases} f_1(x_1) = c_2 c_3 \dots c_n h_1(x_1) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_n) = c_1 \dots c_{n-1} h_n(x_n) \end{cases}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ولكن:

$$\begin{aligned} \text{(c): } 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1) dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x_n) dx_n = c_1 c_2 \dots c_n \end{aligned}$$

باستخدام العلاقة (c) يمكن كتابة العلاقة (2. 20. 17) في الصورة التالية:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (c_1 \dots c_n) h_1(x_1) \dots (c_1 \dots c_n) h_n(x_n)$$

وباستخدام العلاقة (b) يمكن وضع العلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= c_1 f_1(x_1) \dots c_n f_n(x_n) \\ &= (c_1 \dots c_n) f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \end{aligned}$$

ومن (c) نجد أن:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n).$$

وهذا يثبت أن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (2 - 20 - 2 ب):

إذا كان المتغيران العشويان  $X$  و  $Y$  لهما (مثلاً) دالة كثافة الاحتمال المشتركة

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2I \quad x^2 y^3, \quad 0 < x < y < 1 \\ &= 0 \quad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

قد يتبادر للذهن أن المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان طبقاً للعلاقة (2. 20. 17) حيث يمكن كتابة  $f(x, y)$  في الصورة التالية:

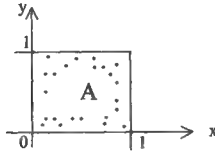
$$f(x, y) = c_1 x^2 c_2 y^3 = h_1(x) h_2(y)$$

حيث  $c_1 c_2 = 2I$

ولكن إذا نظرنا إلى المتغير  $X$  سنجد أن مداه المجموعة  $A_1 = \{x : 0 < x < 1\}$  وكذلك المتغير العشوائي  $Y$  مداه المجموعة  $A_2 = \{y : 0 < y < 1\}$  كما أن  $h_1(x) > 0$  لجميع قيم  $x \in A_1$  وكذلك  $h_2(y) > 0$

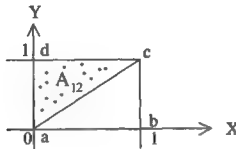
## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لجميع قيم  $y \in A_2$  ولكن حاصل الضرب  $h_1(x)h_2(y)$  لا يكون موجبا لجميع قيم  $(x, y) \in A$  حيث:



$$A = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

وذلك لأن المدى الذي تكون فيه الدالة المشتركة  $f(x, y) > 0$  هو المجموعة:



$$A_{12} = \{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$$

الدالة  $f(x, y) > 0$  في المنطقة المظلمة في الشكل السابق وهي فراغ محدد بالخط الأفقي  $dc$  والخط الرأسى  $ad$  والخط المائل  $ac$ ، حيث  $ac$  يعتمد على المتغيران  $X$  و  $Y$  معا فمعادلته هي  $X = Y$  - وهذا يوضح أن المتغيران  $X$  و  $Y$  غير مستقلان. وحيث أن الفراغ  $A_{12}$  (في الشكل الثاني) هو جزء من الفراغ  $A$  (في الشكل الأول)، إذن  $f(x, y)$  وكذلك  $h_1(x)h_2(y)$  لا تكون موجبة على كل الفراغ  $A$  وإنما تكون موجبة على جزء منه هو  $A_{12}$  وتساوى الصفر خلاف ذلك.



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فى تعريف الاستقلال سواء التعريف (2 - 20 - 1) لحالة متغيرين أو (2 - 20 - 2) لحالة  $n$  من المتغيرات روعى أن يكون فراغ المتغير العشوائى  $(X_1, \dots, X_n)$  عبارة عن تقاطع متعامد لفراغات المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$ . فمثلاً العلاقة (2. 20. 3) مستنبطة من العلاقة (2. 20. 2) بوضع المجموعتان البورينيان  $A$  و  $B$  فى الصورة التالية:

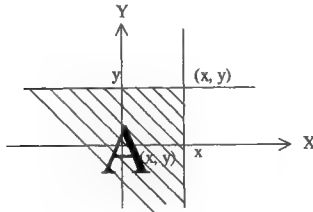
$$A = \{X : X \leq x\} = ]-\infty, x]$$

$$B = ]-\infty, y]$$

وبذلك يكون مدى المتغير المشترك  $(X, Y)$  هو المجموعة

$$A(x, y) = \{(x, y) : X \leq x, Y \leq y\}$$

وهذه الفراغات يمثلها الشكل التالى:



شكل (2 - 20 - 2)

ومن الشكل نرى أن الفراغ  $A(x, y)$  هو تقاطع متعامد للفراغين  $A$  و  $B$ .

ملاحظة (2 - 20 - 3):

للإشارة إلى وجود  $n$  من المتغيرات العشوائية المستقلة التى لها نفس التوزيع الاحتمالى - أى لها نفس دالة كثافة الاحتمال - كثيراً ما نستخدم تعبير إحصائى شائع هو "سحب عينة عشوائية من مجتمع واحد". فقد يكون لدينا متغير عشوائى  $X$  له دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  ثم نحصل على  $n$  من القياسات أو القيم لهذا المتغير ونرمز لهذه القياسات (أو القيم) بالرموز  $X_1, \dots, X_n$  - ومثال ذلك أن تكون  $X_1, \dots, X_n$  هى أوزان

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

عينة عشوائية حجمها  $n$  من الأشخاص مسحوبة من مجتمع واحد إذا كان المتغير  $X$  هو الوزن. في هذه الحالة تكون القياسات  $X_1, \dots, X_n$  عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$ . والمتغيرات تكون مستقلة طالما كانت العينة عشوائية – لذلك فبيان القول أن المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة مرادف لقول أن العينة عشوائية. كذلك تعبير "محب عينة عشوائية حجمها  $n$  من مجتمع له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(\cdot)$ " هو نفسه التعبير القائل "وجود  $n$  من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها نفس التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع الاحتمالي لكل منها  $F(\cdot)$ ".

لقد قمنا دوال كثافة الاحتمال والتوزيع الاحتمالي وكذلك الدوال الهامشية والشرطية للمتغيرات المشتركة الثنائية والمتعددة وحاول الآن تقديم مثل هذه الدوال في حالة الدوال المشتركة المختلطة وسنكتفى بحالة المتغير الثنائي الذي يكون أحد متغيريه منقطع والآخر مستمر دون التعميم لحالة  $n$  من المتغيرات وذلك لقلة وندرة هذا النوع من المتغيرات من الناحية العملية.

### (2 – 21) التوزيعات الثنائية المشتركة المختلطة:

سبق أن قمنا مفهوم التوزيع المختلط في حالة المتغير المفرد بالتعريف (2 – 10 – 1). والآن نقدم هذا المفهوم في حالة التوزيعات المشتركة – أي حالة وجود أكثر من متغير – وسنكتفى بحالة المتغير الثنائي المختلط  $(X, Y)$  حيث  $(X, Y)$  متغير مشترك مكون من مركبتين هما  $X$  و  $Y$  وهما متغيران عشوائيان أحدهما من النوع المستمر والآخر من النوع المنقطع. والمتغير الثنائي المشترك  $(X, Y)$  الذي من هذا النوع نسميه متغير مشترك مختلط Joint Mixed r. v. نفرض أن لدينا متغير مشترك مختلط  $(X, Y)$  حيث  $Y$  متغير عشوائي من النوع المستمر و  $X$  متغير آخر من النوع المنقطع بأخذ القيم  $X = x_i$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$ . فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X$  عند النقطة  $X = x_i$  هي  $P_1(x_i)$  – فإنه يوجد دوال احتمال شرطية هي:  $f_{21}(y | x_i)$  وهي دوال احتمال شرطية في المتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  لجميع  $i = 1, 2, \dots$  ودالة الاحتمال الشرطية  $f_{21}(y | x_i)$  تعتبر دالة في متغير واحد المتغير  $Y$  يسمى بالمتغير التابع وأحياناً نرمز له بالرمز  $Y|_x$  لإظهار أن  $Y$  يعتمد على القيمة التي يأخذها المتغير  $X$ . وعلى هذا يوجد نوعان من المتغيرات الثنائية المختلطة، النوع الأول عندما يكون المتغير المستقل منقطع والتابع مستمر وهو النوع السابق والنوع الثاني عندما يكون المتغير المستقل مستمر والمتغير التابع منقطع. لذلك سنقدم كل نوع منهما على حدة.

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 - 21 - 1) المتغير الثنائي المختلط من النوع الأول (المستقل متقطع والتابع مستمر):

إذا كان المتغير المشترك المختلط  $(X, Y)$  فيه  $X$  متغير متقطع (منفصل) يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  باحتمالات  $\Pr(X = x_i) = P_i(x_i)$  فإنه يوجد دوال كثافة احتمال شرطية في متغير واحد  $Y$  هي:  $f_{21}(y | x_i)$  ،  $i = 1, 2, \dots$  وغالباً تكون الدوال  $P_i(x_i)$  و  $f_{21}(y | x_i)$  معلومة أو من السهل معرفتها في حين أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة المختلطة  $f(x, y)$  للمتغير  $(X, Y)$  غير معلومة أو من الصعب معرفتها ولكن يمكن الحصول عليها من الدالتين المعلومتين  $P_i(x_i)$  و  $f_{21}(y | x_i)$  كما في العلاقة (2. 10b) في الصورة التالية:

$$(2. 21. 1): f(x_i, y) = f_{21}(y | x_i) P_i(x_i)$$

ودالة التوزيع الاحتمالي المشتركة المختلطة  $F(x, y)$  تأخذ الصورة التالية:

$$(2. 21. 2): F(x, y) = \sum_{i: x_i \leq x} P_i(x_i) \int_{-\infty}^y f_{21}(y | x_i) dy$$

ويمكن الحصول على دوال التوزيع الاحتمالي الهامشية لكل من  $X$  و  $Y$  من العلاقة (2. 21. 2) في الصورة التالية:

$$(2. 21. 3): F_1(x) = F(x, \infty) = \sum_{i: x_i \leq x} P_i(x_i)$$

حيث  $P_i(x_i)$  هي دالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X$  عندما  $X = x_i$  . كذلك:

$$(2. 21. 4a): F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x_i) \int_{-\infty}^y f_{21}(y | x_i) dy$$

وتكون دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$  هي:

$$(2. 21. 4b): f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x_i) f_{21}(y | x_i)$$

أما إذا كانت دالة التوزيع المشتركة المختلطة  $F(x, y)$  معلومة فيمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  من الدالة  $F(x, y)$  كما يلي:

دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  هي:

$$F_{21}(y | x_i) = \Pr(Y \leq y | X = x_i)$$

ومن قانون الاحتمال الشرطي:

$$(2. 21. 5): F_{21}(y | x_i) = \Pr(Y \leq y ; X = x_i) / \Pr(X = x_i)$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية وبوال التوزيع الاحتمالي

حيث  $\Pr(X = x_i) = P_i(x_i)$  والاحتمال  $\Pr(Y \leq y; X = x_i)$  يمكن الحصول عليه من دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$  إذا نظرنا إليها على أنها دالة فسي المتغير المفرد  $X$  مع اعتبار  $Y$  كمية ثابتة (بارامتر) باستخدام العلاقة (2. 6. 4) التي توضح كيفية إيجاد دالة احتمال المتغير المفرد المتقطع من دالة توزيعه الاحتمالي، حيث نجد أن:  $\Pr(Y \leq y; X = x_i) = F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)$  وبذلك يمكن وضع الصيغة (2. 21. 5) في الصورة التالية:

$$(2. 21. 6): F_{21}(y | x_i) = \frac{1}{P_i(x_i)} [F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)]$$

وبمفاضلة طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للمتغير المستمر  $Y$  نحصل على دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير المستمر  $Y$  عندما  $X = x_i$  في الصورة التالية:

$$(2. 21. 7): f_{21}(y | x_i) = \frac{1}{P_i(x_i)} \frac{d}{dy} [F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)]$$

والعلاقة السابقة تستخدم لمعرفة  $f_{21}(y | x_i)$  عندما تكون  $F(x_i, y)$  معلومة. ولكن غالباً تكون  $f_{21}(y | x_i)$  هي الدالة المعلوم، وبالتالي، وكما يتضح من العلاقة (2. 21. 2) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$  للمتغير العشوائي المشترك المختلط  $(X, Y)$  حيث  $X$  متغير متقطع (هو المتغير المستقل) و  $Y$  متغير مستمر (هو المتغير التابع) تتحدد تحديداً تاماً بالدوال  $P_i(x_i)$  و  $f_{21}(y | x_i)$ ،  $i = 1, 2, \dots$ ، حيث أن الاحتمال الكلي (الذي يعادل الوحدة) للمتغير المشترك  $(X, Y)$  يتم تجزئته إلى كميات

صغيرة هي:  $P_i(x_i), P_i(x_2), \dots$  -  $\left(\sum_i P_i(x_i) = 1\right)$  - وكمية الاحتمال

هي الكمية المخصصة للنقطة  $X = x_i$  على محور  $X$ ، وهذه الكمية من الاحتمال تنتشر انتشاراً مستمراً على طول الخط العمودي  $X = x_i$  الموازي لمحور  $Y$  ويقطع محور  $X$  عند النقطة  $X = x_i$ ، وكثافة الانتشار  $f(x_i, y)$  عند أي نقطة  $(x_i, y)$  على الخط  $X = x_i$  تساوي  $P_i(x_i) f_{21}(y | x_i)$ . فإذا كانت الدوال الشرطية  $f_{21}(y | x_i)$  متطابقة (متساوية) لجميع قيم  $i$  يكون معنى ذلك أن:

$$(2. 21. 8): f_{21}(y | x_i) = f_2(y)$$

حيث  $f_2(y)$  هي دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير المستمر  $Y$ . كما نجد في هذه الحالة من العلاقة (2. 21. 2) أن:  $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$  أي أن المتغيران  $X$  و  $Y$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

مستقلان. من ذلك يمكن وضع التعريف التالي لاستقلال المتغيران  $X$  و  $Y$  في التوزيع الثنائي المشترك المختلط.

تعريف (2-21-1): إذا كان المتغير العشوائي المشترك المختلط  $(X, Y)$  فيه  $X$  متغير منقطع و  $Y$  متغير مستمر فإن  $X$  و  $Y$  يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا كان:  $f_{2i}(y | x_i) = f_2(y)$  لجميع قيم  $i$ ، حيث  $f_2(y)$  هي دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$  و  $f_{2i}(y | x_i)$  هي دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$ .

مثال (2-21-1): متغير عشوائي ثنائي مختلط  $(X, Y)$  فيه  $X$  متغير عشوائي منقطع له دالة الاحتمال:  $P_i(i) = q P^{i-1}$  ;  $i = 1, 2, \dots$  و  $Pr(X = i) = P_i(i) = q P^{i-1}$  و  $Y$  متغير عشوائي مستمر ودالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i = i$  هي:  $f_{2i}(y | x = i) = i y^{i-1}$  و  $0 < y < 1$  ؛ أوجد الدوال التالية:

(1) دالة كثافة الاحتمال الهامشية  $f_2(y)$  للمتغير  $Y$ .

(2) دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية  $F_1(x)$  للمتغير  $X$ .

(3) دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  للمتغير  $(X, Y)$ .

### (الحل)

(1) من علاقة (2.21.4b) نجد أن دالة كثافة الاحتمال المطلوبة هي:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i(X=i) f_{2i}(y | X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} q P^{i-1} i y^{i-1} = \frac{q}{(1-py)^2} \\ &, 0 < y < 1, 0 < P < 1, 0 < py < 1 \end{aligned}$$

(2) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= Pr(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} P_i(x_i) \\ &= \sum_{i \leq x} P_i(i) = \sum_{i \leq x} q P^{i-1} ; i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

بفرض أن  $[x]$  هو أول عدد صحيح integer أصغر من أو يساوي  $x$  إذن:

$$F_1(x) = \sum_{i=1}^{[x]} q p^{i-1} = 1 - p^{[x]} \quad (3)$$

$$F(x, y) = \sum_{i: x_i \leq x} \int_{-\infty}^y f(x_i, y) dy = \sum_{i: x_i \leq x} P_i(x_i) \int_{-\infty}^y f_{21}(y | x_i) dy$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{i=1}^{[x]} q p^{i-1} \int_0^y i y^{i-1} dy = \sum_{i=1}^{[x]} q p^{i-1} y^i \\ &= q y \left[ \frac{1 - (py)^{[x]}}{1 - py} \right], \quad 0 < y < 1, \quad p + q = 1, \quad x = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ومنها نجد أن:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F(x, 1) = [1 - p^{[x]}] \\ F_2(y) &= F(\infty, y) = q y \left[ \frac{1}{1 - py} \right] \end{aligned}$$

حيث أن  $(py)^{[x]} \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow \infty$  لأن  $0 < py < 1$ .

ومن العلاقة السابقة نجد أن دالة كثافة الاحتمال المطلقة - غير الشرطية - للمتغير المستمر  $Y$  هي:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \frac{d}{dy} F_2(y) = \frac{(1 - py)q - qy(-p)}{(1 - py)^2} \\ &= \frac{q}{(1 - py)^2}; \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

وهي كما سبق إيجادها في (1).

(2 - 21 - 2) المتغير الثنائي المختلط من النوع الثاني (المستقل مستمر والتابع متقطع):

استعرضنا في البند السابق المتغير المشترك المختلط  $(X, Y)$  عندما يكون المتغير المستقل من النوع المنقطع والمتغير التابع من النوع المستمر - ونتناول الآن الحالة المقابلة التي يكون فيها المتغير المستقل  $Y$  من النوع المستمر والمتغير التابع  $X$  من النوع المنقطع.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

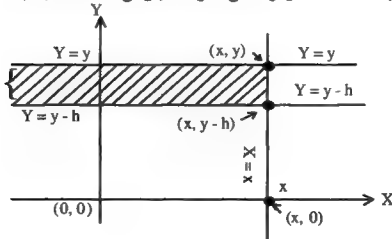
نعلم من البند السابق معادلة (2. 21. 2) أن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة – عندما نرمز للمتغير المستمر بالرمز  $Y$  والمتغير المتقطع بالرمز  $X$  – تأخذ الصورة التالية:

$$(2. 21. 9): F(x, y) = \sum_{i: x_i \leq x} P_i(x_i) \int_{-\infty}^y f_{21}(Y | x_i) dY$$

ونحاول الآن الحصول على دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية  $F(x | y)$  للمتغير المتقطع  $X$  عندما  $Y = y$ ، ثم نحصل منها على دالة الاحتمال الشرطية  $P_{12}(x | y)$  للمتغير المتقطع  $X$  عندما  $Y = y$ . دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير التابع (المتقطع)  $X$  عندما يأخذ المتغير المستقل (المستمر) القيمة  $Y = y$  هي:  $F_{12}(x | y) = \Pr[X \leq x | Y = y]$  وهنا لا يمكن استخدام قانون الاحتمال الشرطي كما فعلنا في العلاقة (2. 21. 5) وذلك لأن  $\Pr(Y = y) = 0$  حيث أن  $Y$  متغير مستمر، وإنما يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير المتقطع  $X$  عندما يكون المتغير المستمر  $Y$  واقعاً داخل فترة – تكون الفترة  $y - h < Y \leq y$  حيث  $h > 0$  و  $y$  إحدى قيم المتغير المستمر  $Y$ ، وتكتب في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} F(x | y - h < Y \leq y) &= \Pr(X \leq x | y - h < Y \leq y) \\ &= \frac{\Pr(X \leq x ; y - h < Y \leq y)}{\Pr(y - h < Y \leq y)} \end{aligned}$$

ويمكن تمثيل الاحتمالات الموجودة على الطرف الأيمن في المعادلة السابقة بالشكل التالي:



شكل (2 - 21 - 2)

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

من الشكل السابق يتضح أن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية  $F(x | y - h < Y \leq y)$  تساوي كمية الاحتمال (أو الكتلة) المنتشرة في الشريط  $y - h < Y \leq y$  على يسار الخط  $X = x$  (وهي المنطقة المظللة) مقسوما على كمية الاحتمال (أو الكتلة) المنتشرة في الشريط كله - أي أن:

$$(2. 21. 10): F(x | y - h < Y \leq y) = \frac{F(x, y) - F(x, y - h)}{F_2(y) - F_2(y - h)}$$

فإذا كانت الدالة  $f_2(y) = \left( \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} \right)$  مستمرة وموجبة عند النقطة  $Y = y$

وكانت المشتقة التفاضلية  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$  موجودة عند نفس النقطة فإن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية  $F(x | y)$  يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$(2. 21. 11): F(x | y) = \lim_{h \rightarrow 0} F(x | y - h < Y \leq y)$$

حيث  $F(x | y - h < Y \leq y)$  كما في العلاقة (2. 21. 10). وبقسمة كل من البسط والمقام في العلاقة (2. 21. 10) على  $h$  ولأخذ النهاية عندما  $h \rightarrow 0$  يمكن وضع العلاقة (2. 21. 11) في الصورة التالية:

$$F(x | y) = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x, y) - F(x, y - h)]}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F_2(y) - F_2(y - h)]}$$

إن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية:

$$(2. 21. 12): F(x | y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$$

حيث  $f_2(y)$  هي دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير المستمر  $Y$  و

$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$  هي المشتقة التفاضلية الجزئية لدالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$

بالنسبة للمتغير  $Y$ . وحيث أن  $X$  متغير متقطع يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots$  والمتغير  $Y$  مستمر - إذن يمكن كتابة  $F(x, y)$  عندما  $Y = y$  في الصورة التالية:

$$(2. 21. 13): F(x, y) = \sum_{i: x_i \leq x} F^*(x_i, y)$$



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لو نظرنا في العلاقة السابقة إلى المتغير  $Y$  كما لو كان ثابت (بارامتر) فيمكن اعتبار  $F(x, y)$  كما لو كانت دالة توزيع احتمالي في المتغير المفرد المنقطع  $X$  وتكون  $F^*(x_i, y)$  هي دالة احتمال هذا المتغير المفرد عند نقطة الاحتمال  $(x_i, y)$  وبالتالي يمكن الحصول على الدالة  $F^*(x_i, y)$  من دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  بنفس طريقة الحصول على دالة احتمال المتغير المفرد المنقطع من دالة توزيعه الاحتمالي طبقاً للعلاقة (2. 6. 4) حيث نجد أن:

$$(2. 21. 14): F^*(x_i, y) = F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)$$

من (2. 21. 12) و (2. 21. 13) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير المنقطع  $X$  عندما  $Y = y$  هي:

$$(2. 21. 15): F(x | y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{i: x_i \leq x} F^*(x_i, y) \right]$$

وباستخدام العلاقة (2. 21. 14) يمكن وضع العلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$(2. 21. 16): F(x | y) = \frac{1}{f_2(y)} \sum_{i: x_i \leq x} \frac{\partial}{\partial y} [F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)]$$

ومن (2. 21. 16) نجد أن دالة الاحتمال الشرطية  $P_{12}(x_i | y)$  للمتغير التابع (المنقطع)  $X$  عندما يأخذ المتغير المستقل (المستمر)  $Y$  القيمة  $Y = y$  هي:

$$(2. 21. 17): P_{12}(x_i | y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} [F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)]$$

والعلاقة السابقة تكون مفيدة في الحالات التي تكون فيها كل من  $f_2(y)$  و  $F(x_i, y)$  معلومة في حين أن  $P_{12}(x_i | y)$  مجهولة.

ويمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_i, y)$  ودالة الاحتمال الشرطية  $P_{12}(x_i | y)$  طبقاً للعلاقات (2. 17. 3) و (2. 17. 10) بطريقة أبسط في الصورة التالية:

$$(2. 21. 18a): f(x_i, y) = f_2(y) P_{12}(x_i | y) = P_1(x_i) f_{21}(y | x_i)$$

كما أن:

$$(2. 21. 18b): \int_y f(x_i, y) dy = P_1(x_i) \int_y f_{21}(y | x_i) dy = P_1(x_i)$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فإذا كانت  $f_2(y) > 0$  فإن:

$$(2. 21. 19a): P_{12}(x_i | y) = \frac{1}{f_2(y)} P_1(x_i) f_{21}(y | x_i)$$

ومن العلاقة السابقة نجد أن:

$$(2. 21. 19b): \int_y P_{12}(x_i | y) f_2(y) dy = P_1(x_i) \int_y f_{21}(y | x_i) dy = P_1(x_i)$$

وباستخدام العلاقة السابقة للتعويض عن  $f_{21}(y | x_i)$  في العلاقة (2. 21. 9) نجد أن:

$$(2. 21. 20): F(x, y) = \sum_{i: x_i \leq x} \int_{-\infty}^y f_2(Y) P_{12}(x_i | Y) dY.$$

وإذا كانت الدالة  $P_{12}(x_i | y)$  ثابتة لجميع قيم  $y$  — عندما  $i = 1, 2, \dots$  كان معنى ذلك أن:  $P_{12}(x_i | y) = P_1(x_i)$  حيث  $P_1(x)$  هي دالة الاحتمال الهامشية للمتغير المستقطع  $X$  وبالتعويض عن العلاقة السابقة في العلاقة (2. 21. 20) نجد أن:  $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$  أي أن المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان. وهذا يعتبر شرط كافي ولازم لاستقلال المتغيرين  $X$  و  $Y$  — لذلك يمكن وضع التعريف التالي:

تعريف (2-21-2):

إذا كان المتغير العشوائي المختلط  $(X, Y)$  فيه  $X$  متغير متقطع و  $Y$  متغير مستمر فإن  $X$  و  $Y$  يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا كان:

$$(2. 21. 21): P_{12}(x_i | y) = P_1(x_i)$$

وذلك لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$  حيث  $P_i(x)$  هي دالة احتمال المتغير  $X$  و  $P_{12}(x | y)$  هي دالة الاحتمال الشرطية للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$ .

مثال (2-21-2): في مثال (2-21-1) أوجد دالة الاحتمال الشرطية  $P_{12}(x_i | y)$ .

(الحل)

في مثال (2-21-2) نجد أن دالة احتمال  $X$  هي:

$$Pr(x = i) = P_1(i) = q^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad p + q = 1$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ودالة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = i$  هي:

$$f_{21}(y|i) = i y^{i-1} ; 0 < y < 1$$

ونثبتنا أن: دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$  هي:

$$f_2(y) = q(1 - py)^{-2} ; 0 < y < 1.$$

إذن من علاقة (2. 21. 19a) نجد أن:

$$\begin{aligned} \Pr(X = i | Y = y) &= P_{12}(i | y) = \frac{1}{f_2(y)} P_1(i) f_{21}(y | i) \\ &= \frac{q P^{i-1}}{q(1 - py)^{-2}} (i y^{i-1}) \end{aligned}$$

$$P_{12}(x_i | y) = (1 - py)^2 i (py)^{i-1}, i = 1, 2, \dots ; 0 < P < 1; 0 < y < 1.$$

(حل آخر)

ويمكن الحصول على  $P_{12}(x_i | y)$  باستخدام العلاقة (2. 21. 17)، حيث نجد من علاقة (2. 21. 9) أن:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_{i: x_i \leq x} P_1(x_i) \int_{-\infty}^y f_{21}(y | x_i) dy = \sum_{i: x_i \leq x} q P^{i-1} \int_{-\infty}^y i Y^{i-1} dy \\ &= qy \sum_{i: x_i \leq x} (py)^{i-1}, i = 1, 2, \dots ; 0 < py < 1 ; P + q = 1 \end{aligned}$$

وبفرض أن  $[x]$  أول عدد صحيح موجب أصغر من أو يساوي  $x$  حيث  $x = i = 1, 2, \dots$  تأخذ الصورة التالية:

$$F(x, y) = qy \sum_{i=1}^{[x]} (py)^{i-1} = qy \left[ \frac{1 - (py)^{[x]}}{1 - py} \right]$$

من علاقة (2. 21. 17) نجد أن:

$$P_{12}(x_i | y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} [F(x_i, y) - F(x_i - 0, y)]$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

حيث  $x_i$  أعداد صحيحة لأن  $(x_i = i)$   $i = 1, 2, \dots$   $[x_i] = i$  إذن

$$\begin{aligned} P_{12}(x, y) &= \frac{(1-py)^2}{q} \frac{\partial}{\partial y} \left[ qy \left( \frac{1-(py)^i}{1-py} \right) - qy \left( \frac{1-(py)^{i-1}}{1-py} \right) \right] \\ &= \frac{(1-py)^2}{q} q p^{i-1} \frac{\partial}{\partial y} [y^i] \\ &= (1-py)^2 \cdot i (py)^{i-1}, i = 1, 2, \dots, 0 < p < 1, 0 < y < 1 \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة السابقة في الحل الأول الذي استخدمنا فيه العلاقة (2. 21. 19).

(2 – 21 – 3) بعض الاحتمالات الهامة باستخدام دوال التوزيع الشرطية:

### Some Important Probabilities by Conditional Distribution Functions:

لقد عرفنا دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  للمتغير الثنائي المشترك  $(X, Y)$  سواء كان من النوع المنقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه وذلك كما في العلاقات (2. 14. 3) و (2. 14. 5) و (2. 21. 2) و (2. 21. 20) على الترتيب. ومن هذه الدالة يمكن إيجاد بعض صيغ الاحتمال الهامة. ولتقديم ذلك نفرض أن مجموعة جزئية من فراغ متغير عشوائي  $Y$  ونرغب في إيجاد احتمال أن ينتمي المتغير  $Y$  إلى المجموعة  $A$  إذا علمنا أن متغير آخر  $X$  يساوي قيمة معينة  $x$  — ولنرمز لهذا بالرمز:

$$(2. 21. 22): \Pr[Y \in A | X = x] = \Pr[Y \in A | x]$$

وذلك لأي قيمة معينة  $x$  من قيم المتغير  $X$  سواء كان المتغير المشترك  $(X, Y)$  من النوع المنقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه.

في الاحتمال السابق نعتبر أن  $X$  متغير مستقل و  $Y$  متغير تابع. ويمكن الحصول على هذا الاحتمال بوضع الحدث  $Y \in A$  بدلاً من الحدث  $Y \leq y$  في دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  وذلك لأي قيمة معينة  $x$  من قيم المتغير  $X$ . ولحيانا يكون من السهل إيجاد الاحتمال الشرطي  $P(A | x)$  في حين من الصعب الحصول على الاحتمال غير الشرطي  $\Pr(Y \in A) = P(A)$ . لذلك نقدم فيما يلي صيغة للحصول على  $P(A)$  بدلالة  $P(A | x)$  وذلك في حالتين رئيسيتين. الحالة الأولى: عندما يكون المتغير المستقل من النوع المنقطع. والحالة الثانية: عندما يكون المتغير المستقل من النوع المستمر. ونتناول كل حالة على حده.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

الحالة الأولى: إذا كان المتغير المستقل  $X$  من النوع المنقطع:  
نتناول هذه الحالة في وضعين.

أولاً: عندما يكون المتغير التابع  $Y$  من النوع المنقطع كذلك.

هنا يكون المتغير المشترك  $(X, Y)$  من النوع المنقطع حيث أن كل من  $X$  و  $Y$  متغير منقطع. ومن العلاقة (2. 15. 11) نجد أن:

$$\Pr(Y \leq y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{j: y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i, y_j)$$

فإذا وضعنا الحدث  $Y \in A$  بدلاً من  $Y \leq y$  في العلاقة السابقة فإن:

$$\Pr(Y \in A) = \sum_{j: y_j \in A} \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i, y_j).$$

ومن (2. 17. 6) حيث  $P(x_i, y_j) = P_{21}(y_j | x_i) P_1(x_i)$  نجد أن:

$$\begin{aligned} (2. 21. 23): \Pr[Y \in A] &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \sum_{j: y_j \in A} P_{21}(y_j | x_i) \right] P_1(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[Y \in A | X = x_i] P_1(x_i) \end{aligned}$$

ثانياً: إذا كان المتغير التابع  $Y$  من النوع المستمر (وكما نعلم أن  $X$  متغير منقطع).

هنا يكون المتغير المشترك  $(X, Y)$  من النوع المختلط الموضع في بند (1 - 21 - 2)، إن نجد من العلاقة (2. 21. 4a) أن:

$$\Pr(Y \leq y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{i=1}^{\infty} P_1(x_i) \int_{-\infty}^y f_{21}(Y | x_i) dy$$

وبوضع الحدث  $Y \in A$  بدلاً من الحدث  $Y \leq y$  نجد أن:

$$\begin{aligned} (2. 21. 24): \Pr[Y \in A] &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{y \in A} f_{21}(Y | x_i) dY \right] P_1(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[Y \in A | X = x_i] P_1(x_i) \end{aligned}$$

## الفصل الثاني — المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

الحالة الثانية: إذا كان المتغير المستقل  $X$  من النوع المستمر:

أولاً: إذا كان المتغير التابع  $Y$  من النوع المنقطع:

وكما نعلم أن المتغير المستقل من النوع المستمر إذن المتغير المشترك  $(X, Y)$  متغير مختلط من النوع الموضح في البند (2-21-2). ومن العلاقة (2. 21. 20) — مع استخدام الرمز  $x$  للمتغير المستمر والرمز  $y$  للمتغير المنقطع — نجد أن:

$$F(x, y) = \sum_{i: y_i \leq y} \int_{-\infty}^x P_{21}(y_i | x) f_1(x) dx$$

إذن:

$$\Pr(Y \leq y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \sum_{i: y_i \leq y} \int_{-\infty}^{\infty} P_{21}(y_i | x) f_1(x) dx$$

وبوضع الحدث  $Y \in A$  بدلاً من  $Y \leq y$  نجد أن:

$$\Pr(Y \in A) = \sum_{i: y_i \in A} \int_{-\infty}^{\infty} P_{21}(y_i | x) f_1(x) dx$$

فإذا كان تبادل علاقتي التكامل والمجموع ممكناً فإن:

$$(2. 21. 25): \Pr(Y \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i: y_i \in A} P_{21}(y_i | x) \right] f_1(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \in A | X = x] f_1(x) dx$$

ثانياً: إذا كان المتغير التابع  $Y$  من النوع المستمر:

وحيث أن المتغير المستقل  $X$  من النوع المستمر أيضاً، إذن المتغير المشترك  $(X, Y)$  من النوع المستمر — ومن العلاقة (2. 15. 12) نجد أن:

$$\Pr(Y \leq y) = F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

وبوضع الحدث  $Y \in A$  بدلاً من  $Y \leq y$  نجد أن:

$$\Pr(Y \in A) = \int_{y \in A} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فإذا كانت عملية إيدال التكاملي ممكنة فإن:

$$\Pr(Y \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y \in A} f(x, y) dy dx$$

ومن العلاقة (2. 17. 10b) حيث  $f(x, y) = f_{21}(y | x)F_1(x)$  نجد أن:

$$\begin{aligned} (2. 21. 26): \Pr(Y \in A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{y \in A} f(y | x) dy \right] f_1(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \in A | X = x] f_1(x) dx \end{aligned}$$

وبنفس الأسلوب السابق يمكن إثبات أن:

$$(2. 21. 27): \Pr[Y \in A, X \in B] = \sum_{i: x_i \in B} \left[ \sum_{j: y_j \in A} P(y_j | x_i) \right] P_1(x_i)$$

إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران من النوع المنقطع.

$$= \sum_{i: x_i \in B} \left[ \int_{y \in A} f_{21}(y | x_i) dy \right] P_1(x_i)$$

إذا كان  $X$  متغير منقطع و  $Y$  متغير مستمر – أو

$$= \sum_{i: x_i \in B} \Pr[Y \in A | X = x_i] P_1(x_i)$$

إذا كان  $X$  متغير منقطع و  $Y$  أي متغير عشوائي (منقطع أو مستمر).

كما أن:

$$(2. 21. 28): \Pr[Y \in A, X \in B] = \int_{x \in B} \left[ \sum_{i: y_i \in A} P_{21}(y_i | X = x) \right] f_1(x) dx$$

إذا كان  $X$  متغير مستمر و  $Y$  متغير منقطع

$$= \int_{x \in B} \left[ \int_{y \in A} f_{21}(y | x) dy \right] f_1(x) dx$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

إذا كان  $X$  مستمر و  $Y$  مستمر - أو

$$= \int_{x \in B} [\Pr[Y \in A | X = x] f_1(x) dx]$$

إذا كان  $X$  متغير مستمر و  $Y$  أى متغير (متقطع أو مستمر).

ملاحظة (2 - 21 - 3):

بالنظر إلى العلاقات (2. 21. 23) و (2. 21. 24) نرى أنه يمكن التعبير عن

$$\Pr(Y \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[Y \in A | X = x_i] P_1(x_i) \quad \text{بصيغة واحدة هي:}$$

عندما يكون  $X$  متغير متقطع و  $Y$  أى متغير (متقطع أو مستمر) كذلك من العلاقات (2. 21. 25) و (2. 21. 26) نرى أن الاحتمال  $\Pr(Y \in A)$  يمكن التعبير عنه بصيغة

$$\text{واحدة أيضاً هي: } \Pr[Y \in A] = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \in A | X = x] f_1(x) dx \quad \text{عندما يكون } X$$

متغير مستمر و  $Y$  أى متغير (متقطع أو مستمر).

ذكرنا فى تعريف (2 - 21 - 1) أن المتغيران  $X, Y$  - فى المتغير العشوائى المشترك المختلط  $(X, Y)$  - يكونا مستقلان، إذا فقط إذا كانت، دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير المستمر - عندما يكون المتغير المتقطع مساوياً قيمة معينة - مساوية لدالة كثافة الاحتمال غير الشرطية لهذا المتغير المستمر، ويتطابق ذلك على العلاقة (2. 21. 19a) - عندما نفترض أن  $X$  هو المتغير المستمر و  $Y$  هو المتغير المتقطع - نجد أن المتغير المستمر  $X$  يكون مستقلاً عن المتغير المتقطع  $Y$ ، إذا فقط إذا كانت،  $f_{12}(x | y_i) = f_1(x)$  وفى هذه الحالة تأخذ العلاقة (2. 21. 19a) الصورة التالية:  $P_{2i}(y_i | x) = P_2(y_i)$  وعلى ذلك يمكن وضع التعريف التالى لاستقلال مركبتى المتغير المختلط  $(X, Y)$  عندما يكون المتغير المستقل من النوع المستمر والمتغير التابع من النوع المتقطع.

تعريف (2 - 21 - 3):

إذا كان المتغير العشوائى المشترك المختلط  $(X, Y)$  فيه  $X$  متغير مستمر و  $Y$  متغير متقطع فإن  $X$  و  $Y$  يكونا مستقلان، إذا فقط إذا كان:  $P_{2i}(y_i | x) = P_2(y_i)$  وذلك لجميع قيم  $i$  - حيث  $P_2(y_i)$  هى دالة الاحتمال الهامشية (غير الشرطية) للمتغير  $Y$  عند النقطة  $Y = y_i$  و  $P_{2i}(y_i | x)$  هى دالة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$ .



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

من التعريف السابق نرى أن  $X$  و  $Y$  يكونا مستقلان كذلك إذا كانت:  
 $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$  حيث  $F(x, y)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير  
 $(X, Y)$  و  $F_1(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر  $X$  و  $F_2(y)$  هي دالة  
 التوزيع الاحتمالي للمتغير المنقطع  $Y$ .

ملاحظة (2 – 21 – 3ب):

دالة كثافة الاحتمال أو دالة التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي – سواء كان  
 مفرد أو متعدد – تسمى بالتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي، أي أن المقصود  
 بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو معرفة دالة كثافة احتماله أو دالة توزيعه  
 الاحتمالي والقيم التي يأخذها هذا المتغير. والمتغير العشوائي – كما نعلم – ما هو إلا  
 تعبيراً كمياً (رقمياً) عن ظاهرة معينة – وكثيراً ما تكون المعلومات التي نعرفها عن  
 الظاهرة في شكل جدول تكراري – لذلك كان لزاماً علينا ما لمنا قدمنا التوزيعات  
 الاحتمالية أن نقدم فكرة سريعة عن الجداول التكرارية (أو للتوزيعات التكرارية)  
 وعلاقتها بالتوزيعات الاحتمالية – وهو ما سنقدمه في البند التالي.

### (2 – 22) التوزيعات التكرارية وعلاقتها بالتوزيعات الاحتمالية:

نفرض أن  $X$  متغير عشوائي يمثل ظاهرة معينة أو مجتمع معين له دالة توزيع  
 احتمالي  $F(x)$ . وسحبنا عينة عشوائية حجمها  $n$  من المجتمع الذي يمثل هذا المتغير. فإذا  
 كانت القيم المشاهددة للعينة هي  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، فإننا نعتبر أن هذه المجموعة من القيم  
 كما لو كانت صورة مصغرة للمجتمع الذي سحبت منه (الذي يمثلته المتغير  $X$ ) طالما أن  
 العينة عشوائية. وكلما كبر حجم العينة  $n$  كلما اقتربت هذه الصورة المصغرة من المجتمع  
 الأصلي. وكما نعرف من دراستنا لمبادئ الإحصاء أن بيانات العينة قد تكون غير مبوبة  
 أي في الصورة  $x_1, \dots, x_n$  وقد تكون موضوعة أو مبوبة في شكل جدول تكراري  
 مكون من فئات وتكرارات وهو ما نسميه بالتوزيع التكراري للعينة. لذلك سنقدم فيما يلي  
 مفهوم جديد شديد الصلة بالتوزيع التكراري للعينة يسمى بالتوزيع التجريبي للعينة. وهذا  
 المفهوم الجديد قريب الصلة إلى حد ما بالتوزيع الاحتمالي للمجتمع الذي سحبت منه  
 العينة. أي أن هناك علاقة معينة بين التوزيع التجريبي للعينة والتوزيع الاحتمالي للمتغير  
 $X$  الذي يمثل المجتمع المسحوب منه هذه العينة.

### (2 – 22 – 1) التوزيع التجريبي للعينة المسحوبة من مجتمع مفرد:

Empirical Distribution of the Sample (One – dimensional r. v.):

عند سحب عينة عشوائية حجمها  $n$  من مجتمع يمثلته المتغير العشوائي  $X$  الذي له  
 دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  إذا كانت القيم المشاهددة لهذه العينة هي  $x_1, x_2, \dots, x_n$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فيمكن تعريف "التوزيع التجريبي للعينة" بأنه التوزيع الاحتمالي الذي نحصل عليه بتخصيص احتمال يعادل  $\frac{1}{n}$  لكل قيمة من القيم المشاهدة للعينة (أي لكل نقطة من النقط  $x_1, \dots, x_n$  على محور المتغير  $X$ ). وهو توزيع منقطع له  $n$  نقطة احتمال. أي أن التوزيع التجريبي للعينة يمكن تمثيله بدالة الاحتمال:

$$(2.22.1): P_n(x_i) = \frac{1}{n} ; i = 1, 2, \dots, n.$$

وقد يحدث أن تكون بعض قيم العينة متساوية. فلو كانت مثلاً ثلاث قيم من قيم العينة متساوية يكون الاحتمال المخصص لهذه القيم المكررة (المتساوية) هو  $\frac{3}{n}$ . لذلك في حالة تبويب مشاهدات العينة في جدول تكرارى، إذا كانت مراكز الفئات هي  $x_1, x_2, \dots, x_k$  والتكرارات المناظرة لها هي  $r_1, r_2, \dots, r_k$  على الترتيب، حيث  $\sum_{i=1}^k r_i = n$  يكون التوزيع التجريبي للعينة هو الذي نحصل عليه بتخصيص احتمال يساوى  $\frac{r_i}{n}$  لمركز الفئة رقم  $i$ ، أى لمركز الفئة  $x_i$ ، وذلك لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, k$ . وبذلك يمكن تمثيل التوزيع التجريبي للعينة بدالة الاحتمال التالية:

$$(2.22.2): P_n^*(x_i) = \frac{r_i}{n} , i = 1, 2, \dots, k.$$

ودالة الاحتمال المعطاة بالعلاقة السابقة (وكذلك المعطاة بالعلاقة (2.22.1)) تعتبر دالة من النوع المنقطع. لذلك فإن دالة التوزيع الاحتمالي المقابلة لهذه الدالة تكون دالة قفازه step - function — بقفزات (steps) تساوى  $\frac{1}{n}$  عندما تكون مشاهدات العينة غير

مبسوبة وتساوى  $\frac{r_i}{n}$  عندما تكون المشاهدات مبسوبة في جدول تكرارى فيه  $r_i$  هو عدد التكرارات المقابلة لمركز الفئة رقم  $i$ . فإذا كان  $r_n(x)$  هو عدد مشاهدات العينة التي تكون أقل من أو تساوى  $x$  فإن دالة التوزيع التجريبية للعينة تكون:

$$(2.22.3): F_n^*(x) = \frac{r_n(x)}{n}$$

أى أن  $F_n^*(x)$  تمثل التكرار النسبى للحدث  $X \leq x$  فى مشاهدات العينة التى حجمها  $n$ . فهى إذن دالة فى مشاهدات العينة تحتوى على القيمة المتغيرة  $x$ ، حيث  $r_n(x)$  هى عدد مشاهدات العينة التى تقل عن القيمة  $x$ . ومن الواضح أن أى عينتين لهما نفس القيم المشاهدة يكون لهما نفس التوزيع التجريبي. كما أن تغيير ترتيب المشاهدات فى العينة لا يودى إلى تغيير التوزيع التجريبي طالما أن قيم المشاهدات لم تتغير. ودالة

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

التوزيع السابقة  $F_n^*(x)$  تمثل التوزيع التجريبي لعينة مسحوبة من مجتمع مفرد. ويمكن بصفة عامة تكوين دالة توزيع تجريبية لعينة مسحوبة من مجتمع مزدوج من الجدول التكراري المزدوج لملاحظات العينة ونرمز لها بالرمز  $F_n^*(x, y)$  وهكذا يمكن التعميم إلى حالة العينة المسحوبة من مجتمع متعدد المتغيرات.

(2 – 22 – 2) دالة التوزيع التجريبية للعينة كنقريب لدالة التوزيع الاحتمالي للمجتمع:

دالة التوزيع التجريبية  $F_n^*(x)$  (للعينة المسحوبة من مجتمع دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$ ) تعتبر دالة في ملاحظات العينة تحتوي على القيمة المتغيرة  $x$  حيث أن  $F_n^*(x)$  تساوي التكرار النسبي لتحقيق الحدث  $X \leq x$  في ملاحظات العينة و  $X$  يمثل المجتمع المسحوب منه العينة. وحيث أن العينة المختارة عينة عشوائية فهي إذن تعتبر صورة مصغرة للمجتمع وتمثله تمثيلاً صادقاً، ويزداد صدق هذا التمثيل كلما كبر حجم العينة  $n$ . إذ أنه كلما كبرت العينة كلما اقتربت من المجتمع وفي النهاية عندما يؤول حجم العينة  $n$  إلى ما لا نهاية ( $n \rightarrow \infty$ ) تصبح العينة تقريباً هي المجتمع كله من الناحية النظرية. وبالتالي تصبح دالة التوزيع التجريبية  $F_n^*(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمجتمع  $F(x)$ . وبمنظرة سريعة إلى التعريف التجريبي للاحتتمال – تعريف (1 – 13 – 1) – نجد أن دالة التوزيع التجريبي المعطاة بالعلاقة (2. 22. 3) هي نسبة عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث  $X \leq x$  إلى عدد ملاحظات العينة. وكما نعلم أن نهاية هذا التكرار النسبي، طبقاً للتعريف التجريبي للاحتتمال، هو احتمال أن يتحقق الحدث  $X \leq x$  في المجتمع وبالتالي فإن:

$$(2. 22. 4): \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n(x)}{n} = \Pr(X \leq x) = F(x)$$

مثال (2 – 22 – 1): إذا كان الجدول التكراري التالي يمثل التوزيع التكراري لأطوال عينة مكونة من 10000 مجند فأوجد دالة الاحتمال التجريبية ودالة التوزيع التجريبية لهذه العينة، إذا كانت  $X$  تمثل أطوال المجندين وكان الجدول التكراري كما يلي:

جدول (2 – 22 – 1)

Class interval of X فئات X	Frequencies $r_i$ التكرارات
150 -	24
158 -	341
166 -	2391
174 -	4405
182 -	2447
190 -	364
198 -	28
$\Sigma$	10000

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(الحل)

يمكن تمثيل دالة الاحتمال التجريبية للعينة المعطاة بالعلاقة (2. 22. 2) كما في الجدول التالي:

جدول (2 - 22 - 2)

$\text{med } X = x_i$ مركز الفئات	$P_n^*(x_i)$ التكرار النسبي
154	,0024
162	,0341
170	,2391
178	,4405
186	,2447
194	,0364
202	,0028
$\Sigma$	1.0000

كما أن دالة التوزيع التجريبية للعينة المعطاة بالعلاقة (2. 22. 3) يمكن تمثيلها بالجدول التالي:

جدول (3 - 22 - 2)

$X$	$F_n^*(x) = \frac{r(x)}{n}$ التكرار النسبي التراكمي
$x < 154$	0.0000
154 -	0.0024
162 -	0.0365
170 -	0.2756
178 -	0.7161
186 -	0.9608
194 -	0.9972
$x \geq 202$	1.0000

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 - 22 - 3) التوزيع التجريبي للعينة المسحوبة من مجتمع ثنائي:

The Empirical Dist. Of the Sample (Two - dimensional r. v. 's):

عند سحب عينة حجمها  $n$  من مجتمع له توزيع احتمالي ثنائي مشترك، نفرض أن هذا المجتمع يمثل المتغير الثنائي  $(X, Y)$  الذي له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$ ، وأن القيم المشاهدة للعينة هي:  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  يمكن - قياساً على حالة المتغير المفرد - تعريف "التوزيع التجريبي للعينة" في حالة البيانات غير المبوبة بأن له دالة الاحتمال

$$(2. 22. 5a): P_n(x_i, y_j) = \frac{1}{n}, \quad i = J$$

$$= 0; \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

أو في صورة أخرى

$$(2. 22. 5b): P_n(x_i, y_i) = \frac{1}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وذلك لأن المتغير  $(X, Y)$  في العينة إذا كانت بيانات العينة غير مبوبة لا يأخذ إلا القيم  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$  ولا يأخذ قيم من النوع  $(x_i, y_j)$  عندما  $i \neq j$  أمثل من  $(x_2, y_3)$  (2. 22. 5a) و (2. 22. 1) نجد أن:

$$(2. 22. 5c): P_n(x_i) = P_n(y_i) = \frac{1}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

وفي حالة تساوى بعض قيم المشاهدات الثنائية  $(x, y)$ ، إذا كانت مثلاً ثلاث قيم من العينة متساوية، يكون الاحتمال المخصص لهذه القيم المكررة يساوى  $\frac{3}{n}$ . والمشاهدتان الثنائيتان تكونان متساويتان إذا كانت قيمة  $x$  في المشاهدة الثنائية الأولى تساوى قيمة  $x$  في المشاهدة الثنائية الثانية وقيمة  $y$  في المشاهدة الثنائية الأولى تساوى قيمة  $y$  في المشاهدة الثنائية الثانية. أما في حالة تبويب المشاهدات الثنائية للعينة في جدول تكرارى مزدوج إذا كانت مراكز فئات المتغير  $X$  هي:  $x_1, x_2, \dots, x_k$  والتكرارات المناظرة لها هي:

$$r_1, r_2, \dots, r_k, \quad \sum_{j=1}^k r_j = n \quad \text{وكانت مراكز فئات المتغير } Y \text{ هي:}$$

$$y_1, y_2, \dots, y_s \quad \text{والتكرارات المناظرة لها هي: } r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1s} \text{ على الترتيب بحيث}$$

$$\sum_{j=1}^s r_{1j} = n \quad \text{وبذلك تكون قيم } (x, y) \text{ داخل الجدول المزدوج هي}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

فإذا كانت القيمة  $(x_i, y_j)$  ;  $i = 1, 2, \dots, k$  ,  $J = 1, 2, \dots, s$  مكررة  $r_{ij}$  مرات عددها  $r_{ij}$  فإن:

$$r_{i.} = \sum_{j=1}^s r_{ij} , \quad r_{.j} = \sum_{i=1}^k r_{ij} , \quad \sum_{ij} r_{ij} = \sum_i r_{i.} = \sum_j r_{.j} = n$$

وبذلك يمكن تمثيل "التوزيع التجريبي للعينة" بتخصيص احتمال يساوي  $\frac{r_{ij}}{n}$  للقيمة  $(x_i, y_j)$  ويمكن تمثيل ذلك بدالة الاحتمال المشتركة التالية:

$$(2.22.6): P_n(x_i, y_j) = \frac{r_{ij}}{n} ; \quad i = 1, 2, \dots, k ; \quad J = 1, 2, \dots, s$$

وبالمثل يمكن تمثيل "التوزيع التجريبي الهامشي" للمتغير  $X$  بتخصيص احتمال يساوي  $r_{i.}$  عندما  $X = x_i$  أي أن:

$$(2.22.7): P_n(x_i) = \frac{r_{i.}}{n} , \quad i = 1, 2, \dots, k$$

كما يمكن تمثيل "التوزيع التجريبي الهامشي" للمتغير  $Y$  بدالة الاحتمال:

$$(2.22.8): P_n(y_j) = \frac{r_{.j}}{n} , \quad J = 1, 2, \dots, s$$

فإذا كان  $r_n(x, y)$  هو عدد المشاهدات  $(x_i, y_j)$  في العينة التي حجمها  $(n)$  التي تحقق العلاقة:  $x_i \leq x$  ,  $y_j \leq y$  لجميع قيم  $i = 1, \dots, k$  ,  $j = 1, \dots, s$  فإن دالة التوزيع التجريبية للعينة يمكن تمثيلها بدالة الاحتمال:

$$(2.22.9): F_n^*(x, y) = \frac{r_n(x, y)}{n}$$

أي أن  $F_n^*(x, y)$  تمثل التكرار النسبي للحدث:  $X \leq x$  و  $Y \leq y$  في مشاهدات العينة التي حجمها  $n$ . ومن الواضح أن أي عينتين لهما نفس القيم المشاهدة يكون لهما نفس التوزيع التجريبي - كما أن تغيير ترتيب المشاهدات في العينة لا يؤدي إلى تغيير التوزيع التجريبي (طالما أن قيم المشاهدات لم تتغير) مثل حالة المتغير المفرد تماماً.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

ويمكن إثبات أن دالة التوزيع التجريبية  $F_n^*(x, y)$  للعينة المعطاة بالعلاقة (2. 22. 9) تؤول إلى دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x, y)$  للمجتمع المسحوب منه العينة عندما  $n \rightarrow \infty$  أي أن:

$$(2. 22. 10): \lim_{n \rightarrow \infty} F_n^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n(x, y)}{n} = \Pr(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y).$$

حيث  $r_n(x, y)$  هي عدد المشاهدات  $(x_i, y_i)$  في العينة التي تحقق العلاقة:  $(X \leq x, Y \leq y)$

### (2 – 23) بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة:

فى هذا الباب الذى يتناول المتغيرات العشوائية ودوال توزيعاتها الاحتمالية نرى أنه من الأفضل فى نهايته تقديم بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة التى لها أهمية كبيرة فى دراستنا للأبواب التالية. لذلك سوف نعرض فى هذا البند الصيغ الرياضية فقط للتوزيعات التى سنتقدمها حتى يمكن استخدام هذه الصيغ والاستفادة منها فى دراسة خصائص التوزيعات الاحتمالية مثل المتوسطات ومقاييس التشتت والعزوم ومقاييس الاستواء والتفرطح وكذلك الدوال المميزة والمولدة للعزوم وغير ذلك من الخواص التى نقدمها فى الأبواب التالية على أن نعود فيما بعد بإذن الله إلى دراسة بعض هذه التوزيعات (وتوزيعات أخرى) – كل على حده – دراسة تفصيلية نتناول شكل وخصائص كل توزيع والدور الذى يلعبه فى النظرية الإحصائية وذلك فى الأبواب السابع والثامن والتاسع.

#### (2 – 23 – 1) بعض التوزيعات المنقطعة الخاصة فى متغير واحد:

Some Special Uni – variate Distribution:

#### (2 – 23 – 1 أ) التوزيع المممج (المتلاشى) أو التوزيع ذو النقطة الواحدة:

هو أبسط توزيع منقطع وفيه يتركز الاحتمال الكلى عند نقطة واحدة هي القيمة الوحيدة التى يأخذها هذا المتغير وهي فى نفس الوقت توقعه وقد سبق تقديم هذا التوزيع فى البند (2 – 6 – 4).

#### (2 – 23 – 1 ب) التوزيع ذو النقطتين (0, 1) أو توزيع "برنوللى":

قمنا فى البند (1 – 26 – 1 أ) للتجارب المتكررة المستقلة التى لكل منها نتيجتين ممكنتين فقط نجاح  $s$  وفشل  $f$  والتى تسمى تجارب "برنوللى" أو محاولات "برنوللى"، حيث نرمز لاحتمال النجاح بالرمز  $p$  واحتمال الفشل بالرمز  $q$  و  $p + q = 1$  و  $p \geq 0$  إذا رمزنا لنتيجة أى تجربة فى تجارب برنوللى المستقلة بالرمز  $X$  فإن  $X$  يمكن اعتباره متغير عشوائى دالة احتماله:

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(2. 23. 1): P(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & ; x=0,1, 0 \leq p \leq 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث  $p$  تسمى معلمة التوزيع.

ملاحظة (2 – 23 – 1):

التوزيع السابق يسمى عائلة من التوزيعات وليس مجرد توزيع واحد، إذ يوجد توزيع لكل قيمة من قيم  $p$ . فمثلاً عندما  $p = \frac{1}{2}$  يكون التوزيع هو:  $P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ . لذلك نسمى التوزيع المعطى في (2. 23. 1) بعائلة توزيعات برنولي بمعلمة  $p$  كما يسمى الفراغ  $0 \leq p \leq 1$  بفراغ المعلمة  $p$ . وسنقدم فيما يلي كل توزيع في شكل عائلة من التوزيعات موضحين فراغ المعلمة أو المعلم في كل عائلة من التوزيعات.

(2 – 23 – 1 جـ) التوزيع المنتظم المنقطع The Discrete Uniform Distribution:

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له دالة الاحتمال:

$$(2. 23. 2): P(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & ; x = 1, 2, \dots, N \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث  $N$  عدد صحيح موجب تسمى معلمة التوزيع. يكون  $X$  متغير عشوائي له توزيع منتظم منقطع.

(2 – 23 – 1 د) التوزيع ذو الحدين:

سبق تقديم التوزيع ذو الحدين في الباب الأول في تعريف (1 – 26 – 1) بالعلاقة (1. 26 3).

(2 – 23 – 1 هـ) التوزيع البواسوني:

سبق تقديمه في الباب الأول في تعريف (1 – 29 – 1) بالعلاقة (1. 29. 1).

(2 – 23 – 1 و) التوزيع ذو الحدين السالب:

سبق تقديمه في البند (1 – 31 – 1 أ) من الباب الأول بالعلاقة (1. 31. 2).



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 – 23 – 1 ز) التوزيع الهندسي:

سبق تقديمه في البند (1 – 31 – 1 ب) من الباب الأول بالعلاقة (1. 31. 7).

### (2 – 23 – 1 ح) التوزيع الهندسي الزائد (الهيبرجيومترى):

سبق تقديمه في الباب الأول بالتعريف (1 – 27 – 1) والعلاقة (1. 27. 2).

### (2 – 23 – 1 ط) التوزيع اللوغاريتمي المنقطع:

المتغير العشوائى  $X$  يكون له توزيع لوغاريتمى منقطع بمعلمة  $q$  إذا كانت دالة احتماله على الصورة:

$$(2. 23. 3): P(x) = \begin{cases} \frac{-q^x}{x \ln(1-q)} & ; x = 1, 2, 3, \dots ; 0 < q < 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وهذا التوزيع يعتبر حالة خاصة من توزيع ذو الحدين المالبس المتبوتر عند الصفر. إذ يمكن فى العلاقة (1. 31. 2) للتوزيع ذو الحدين المالبس عند إهمال القيمة  $x = 0$ ، إثبات أن:  $\lim_{r \rightarrow 0} P(x; r, p) = P(x)$  حيث  $P(x)$  هى الدالة (2. 23. 3). أنظر بند (7 – 9 ب).

### (2 – 23 – 1 ي) توزيع "بيتا – ذات الحدين" "Beta – binomial" Distribution:

المتغير العشوائى  $X$  يكون له توزيع "بيتا – ذات الحدين" إذا كانت دالة احتماله:

$$(2. 23. 4): P(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(a, b)} \frac{\Gamma(a+x)\Gamma(n+b-x)}{\Gamma(n+a+b)} & \text{for } x = 0, 1, 2, \dots, n, a > 0, b > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(2 – 23 – 2) بعض التوزيعات المنقطعة الخاصة فى عدة متغيرات عشوائية:

### (2 – 23 – 2 أ) التوزيع ثلاثى الحدود Trinomial Distribution:

يكون المتغير العشوائى  $(X, Y)$  له توزيع ثلاثى الحدود إذا كانت دالة احتماله المشتركة:

$$(2. 23. 5): P(x, y) = \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} P_1^x P_2^y P_3^{(n-x-y)}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

حيث:  $x, y, n$  أعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة  $x + y \leq n$  و  $P_1, P_2, P_3$  كمسور حقيقية موجبة تحقق العلاقة  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$  وخلاف ذلك  $P(x, y) = 0$ .

(2- 23 - 2) التوزيع المتعدد الحدود The Multinomial Distribution:

إذا كان المتغير العشوائي المشترك  $(X_1, \dots, X_r)$  له دالة الاحتمال المشتركة (1. 30. 3) فإنه يسمى بالمتغير المشترك المتعدد الحدود ويسمى توزيعه الاحتمالي بالتوزيع المتعدد الحدود. انظر أيضاً بند (7 - 4).

(2- 23 - 2 ج) التوزيع الهندسي الزائد المتعدد المتغيرات:

The Multi - variate Hypergeometric Distribution:

نقول أن المتغير العشوائي المشترك  $(X_1, \dots, X_r)$  له توزيع هندسي زائد متعدد المتغيرات عدد متغيراته  $r$  إذا كانت دالة احتماله:

$$(2. 23. 6): P(X_1 = x_1, \dots, X_r = x_r) = \frac{\binom{N}{x_1} \dots \binom{N}{x_{r+1}}}{\binom{N}{n}}$$

حيث  $n$  و  $N$  و  $x_1, \dots, x_{r+1}$  أعداد صحيحة غير سالبة تحقق العلاقة  $x_1 + \dots + x_{r+1} = n - x_1 - \dots - x_r$  و  $P_1, \dots, P_{r+1}$  كمسور حقيقية موجبة تحقق العلاقة  $P_{r+1} = 1 - P_1 - \dots - P_r$  والمتغير  $(x_1, \dots, x_r)$  يسمى بالمتغير الهندسي الزائد ذو  $r$  متغيراً. انظر بند (7 - 6).

(2- 23 - 3) بعض التوزيعات المستمرة الخاصة للمتغير المفرد:

Some Special Univariate Continuous Distributions:

(2- 23 - 3 أ) التوزيع المنتظم The Uniform Distribution:

لقد سبق تقديم هذا التوزيع في بند (1 - 23 - 1) من الباب الأول تحت مسمى القانون الاحتمالي المنتظم. ويمكن تعريفه بصورة أخرى كما يلي:

المتغير العشوائي  $X$  يكون له توزيع منتظم في الفترة  $a \leq X \leq b$  حيث  $a, b$  أعداد حقيقية و  $a < b$  - إذا كان له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2. 23. 7): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; \text{for } a < x < b \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

وبمقارنة العلاقة السابقة بالعلاقة (1. 32. 1) نجد أن  $f(x)$  هي الكمية  $1/L(S)$  حيث  $S$  هي الفترة  $[a, b]$  وبالتالي فإن احتمال أن ينتمي المتغير  $X$  إلى الفترة  $\beta$  هو:

$$L(\beta)/L(S) = \frac{1}{(b-a)} \int_{\beta} dx$$

انظر التوزيع المنتظم بالباب الثامن.

### (2 – 23 – 3 ب) التوزيع المعتاد The Normal Distribution:

المتغير العشوائي  $X$  الذي له توزيع معتاد هو ذلك المتغير الذي له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2. 23. 8): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} & ; \text{for } -\infty \leq x \leq \infty, \sigma > 0, -\infty \leq \mu \leq \infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمعلمتان  $\mu$  و  $\sigma^2$  يسميان توقع وتباين  $X$  على الترتيب. انظر التوزيع المعتاد بالباب الثامن.

### (2 – 23 – 3 ج) التوزيع الأسّي The Exponential Distribution:

المتغير العشوائي  $X$  ذو التوزيع الأسّي بمعلمة  $\lambda > 0$  هو ذلك المتغير الذي له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2. 23. 9): f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \text{for } x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انظر التوزيع الأسّي بالباب الثامن.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### (2 – 23 – 3) توزيع "جاما" "Gamma" Distribution:

المتغير العشوائي  $X$  يكون له توزيع "جاما" بمعلمتين  $\alpha > 0$  و  $n > 0$  إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 23. 10): f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x} ; & \text{for } x > 0, n > 0, \alpha > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انظر توزيع جاما بالباب الثامن.

### (2 – 23 – 3 هـ) توزيع "بيتا" "Beta" Distribution:

يكون المتغير العشوائي  $X$  له توزيع بيتا بمعلمتين  $m$  و  $n$  إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 23. 11): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(m, n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1} ; & \text{for } 0 < x < 1, m > 0, n > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انظر توزيع بيتا بالباب الثامن.

### (2 – 23 – 3 و) توزيع "كوشي" "Cauchy" Distribution:

يكون المتغير العشوائي  $X$  له توزيع "كوشي" بالمعلمتين  $\lambda$  و  $\alpha$  حيث  $\lambda > 0$  و  $-\infty < \alpha < \infty$  إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 23. 12): f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x-\alpha)^2]} ; & \text{for } -\infty < x < \infty \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}, \lambda > 0, -\infty < \alpha < \infty$$

انظر توزيع كوشي بالباب الثامن.

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 – 23 ~ 3 ز) توزيع "ت" أو توزيع "ستودنت" "T" or "Student" Distribution:

يكون المتغير العشوائي X له توزيع "ت" لو توزيع "ستودنت" بمعلمة n إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 23. 13): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}; & \text{for } -\infty < x < \infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمعلمة n تسمى بـ "درجات الحرية". وعندما n = 1 يكون توزيع "ت" هو توزيع "كوشي" بمعلمتي  $\alpha = 0$  و  $\lambda = 1$ . انظر توزيع "ت" بالباب الثامن.

(2 – 23 ~ 3 ح) توزيع "مربع كا" أو "كا<sup>2</sup>" Chi – Square Distribution:

نقول أن المتغير العشوائي X له توزيع كا<sup>2</sup> بدرجات حرية n (أو بمعلمة n) إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 23. 14): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; & x > 0; n > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انظر توزيع كا<sup>2</sup> بالباب الثامن.

(2 – 23 ~ 3 ط) توزيع "ف" F Distribution:

نقول أن المتغير العشوائي X له توزيع "ف" (أو توزيع "F") بمعلمتين m و n (حيث  $m > 0$  و  $n > 0$ ) إذا كان له دالة كثافة الاحتمال:

$$(2. 23. 15): f(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left[1 + \frac{m}{n}x\right]^{\frac{m+n}{2}}}; & \text{for } x > 0, m > 0, n > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

انظر توزيع "F" بالباب الثامن.

(2 – 23 ~ 3 ي) توزيع "راي ليغ" "Ray Leigh" Distribution:

نقول أن المتغير العشوائي X له توزيع "راي ليغ" إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 23. 16): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} x e^{-\frac{x}{\lambda}}; & \text{for } x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 - 23 - 3 ك) توزيع "ماكسويل" "Maxwell" Distribution:

نقول أن المتغير العشوائي  $X$  له توزيع "ماكسويل" إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$(2. 24. 17): f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^3} x^2 e^{-x^2/\lambda^2} & ; \text{for } x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(2 - 23 - 4) بعض التوزيعات المستمرة الخاصة في عدة متغيرات عشوائية:

(2 - 23 - 4 أ) التوزيع المعتمد الثنائي The Bivariat Normal Distribution:

المتغير العشوائي المشترك  $(X, Y)$  يكون له توزيع معتمد ثنائي إذا كان له دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$(2. 23. 18): f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)} & ; \text{for } -\infty < x, y < \infty \\ & , \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث:

$$Q(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2} \left[ \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left( \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]$$

$-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty$

الكميتان  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  هما تباين  $X$  و  $Y$  على الترتيب كما أن  $\mu_1$  و  $\mu_2$  هما متوسط  $X$  و  $Y$  و  $\rho$  هو معامل الارتباط بين المتغيرين  $X$  و  $Y$ . وسنتناول هذا التوزيع بشيء من التفصيل في الباب التابع.

(2 - 23 - 4 ب) توزيع "دريشليت" "Dirichlet" Distribution:

نقول أن المتغير العشوائي المشترك  $(X_1, \dots, X_k)$  له توزيع "دريشليت" ذو المعامل  $n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}$  إذا كانت دالة كثافة احتماله المشتركة:

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2. 23. 19):

$$f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n_1 + \dots + n_{k+1})}{\Gamma(n_1) \dots \Gamma(n_{k+1})} \cdot x_1^{n_1-1} \dots x_k^{n_k-1} (1 - x_1 - \dots - x_k)^{n_{k+1}-1} \\ \quad ; \text{ for } 0 < x_i ; i = 1, 2, \dots, k, x_1 + \dots + x_k < 1 \\ 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (2 - 23 - 1): فى التوزيعات الاحتمالية ذات الحدين والىواسونى والهابيرجيويمترى المقامة فى البنود (2 - 23 - 1 د، هـ، ح) على الترتيب، أثبت أن كل منها يحقق شروط كثافة الاحتمال - أى أن دالة الاحتمال موجبة ومجموعها على مدى المتغير يساوى الواحد الصحيح.

(الحل)

أولاً: التوزيع ذو الحدين:

$$(i) P(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} > 0$$

$$(ii) \sum_{x=0}^n P(x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} = [P + (1-P)]^n = 1$$

ثانياً: التوزيع اليبواسونى:

$$(i) f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} > 0, \lambda > 0$$

$$(ii) \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

ثالثاً: التوزيع الهابيرجيويمترى:

$$(i) f(x) = \left[ \binom{m}{x} \binom{M-m}{n-x} / \binom{M}{n} \right] > 0$$

$$(ii) \sum_{x=0}^n \binom{m}{x} \binom{M-m}{n-x} / \binom{M}{n} = \frac{\binom{M}{n}}{\binom{M}{n}} = 1, [x \leq \min(n, m)]$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

**مثال (2 - 23 - 2):** أثبت أن الدالة (2. 23. 5) تحقق شروط كثافة الاحتمال وأوجد دالة الاحتمال الهامشية  $P_2(y)$  للمتغير  $Y$  ودالة الاحتمال الشرطية  $P_{21}(y | x)$  وبين أن  $\sum_y P_{21}(y | x) = 1$

(الحل)

أولاً:

$$(i) P(x, y) = \frac{n! P_1^x P_2^y P_3^{(n-x-y)}}{x! y! (n-x-y)!} > 0$$

$$(ii) \sum_x \sum_y P(x, y) = [P_1 + P_2 + P_3]^n = 1$$

ثانياً: دالة الاحتمال الهامشية  $P_2(y)$  هي:

$$\begin{aligned} P_2(y) &= \sum_{x=0}^{n-y} \frac{n!}{x! y! (n-x-y)!} P_1^x P_2^y P_3^{(n-x-y)} \\ &= \frac{n! P_2^y}{y! (n-y)!} \sum_{x=0}^{n-y} \frac{(n-y)!}{x! (n-x-y)!} P_1^x P_3^{(n-x-y)} \\ &= \binom{n}{y} P_2^y [P_1 + P_3]^{n-y} \end{aligned}$$

وبما أن  $P_3 = 1 - P_1 - P_2$  إذن:

$$P_2(y) = \binom{n}{y} P_2^y (1 - P_2)^{n-y} \quad ; \quad y = 0, 1, 2, \dots, n$$

ثالثاً: دالة الاحتمال الشرطية  $P_{21}(y | x)$ :

$$P_{21}(y | x) = P(x, y) / P_1(x)$$

حيث  $P_1(x)$  يمكن الحصول عليها مثل  $P_2(y)$  تماماً في الصورة:

$$P_1(x) = \binom{n}{x} P_1^x (1 - P_1)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

إذن:

$$\begin{aligned} P_{21}(y | x) &= P(x, y) / P_1(x) \\ &= \frac{(n-x)!}{y! (n-x-y)!} \left[ \frac{P_2}{1 - P_1 - P_2} \right]^y \left[ 1 - \frac{P_2}{1 - P_1 - P_2} \right]^{n-x} \\ &\quad ; \quad y = 0, 1, 2, \dots, n-x. \end{aligned}$$



## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

رابعاً:

$$\sum_{y=0}^{n-1} P_{21}(y | x) = \left[ \frac{P_2}{1 - P_1 - P_2} + \left( 1 - \frac{P_2}{1 - P_1 - P_2} \right) \right]^{n-x} = 1$$

مثال (2 - 23 - 3): في كل من التوزيعات الآتية: (1) الأسى (2) جاما (3) كوشى المعطاة بالعلاقات (2. 23. 9, 10, 12) أثبت أن كل منها يحقق شروط كثافة الاحتمال.

(الحل)

(1) التوزيع الأسى:

$$(i) f(x) = \lambda e^{-\lambda x} > 0 \quad (\lambda > 0)$$

$$(ii) \int_0^{\infty} f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

(2) توزيع جاما:

$$(i) f(x) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x} > 0 ; \alpha > 0 ; x > 0$$

$$(ii) \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} (\alpha x)^{n-1} e^{-\alpha x} d(\alpha x) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1$$

(3) توزيع كوشى:

$$(i) f(x) = \frac{\lambda}{\pi[\lambda^2 + (x - \alpha)^2]} > 0$$

حيث  $\lambda > 0$

$$(ii) I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[\lambda^2 + (x - \alpha)^2]}$$

ضع  $y = x - \alpha$

$$I = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\lambda^2 + y^2} = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda} \tan^{-1}(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = 1$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

### تمارين الباب الثاني

(1-2): في كل من الدوال التالية أثبت أن  $f(x)$  دالة كثافة ل احتمال (أو دالة احتمال) - أى أن  $f(x) > 0$  و  $\int_x f(x) dx = 1$  (أو  $\sum_x f(x) = 1$ ) - ولوجد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  ولرسم منحنى كل من الدالتين  $f(x)$  و  $F(x)$ :

$$(1) f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ 2-x & ; 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & ; 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}[x^2 - 3(x-1)^2] & ; 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}[x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2] & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$(3) f(x) = |x| ; |x| < 1$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} ; |x| < 1$$

$$(5) f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} ; 0 < x < 1$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi(1+x^2/3)} ; -\infty < x < \infty$$

$$(7) f(x) = e^{-x} ; x \geq 0$$

$$(8) f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} ; -\infty < x < \infty$$

$$(9) f(x) = e^x / [1 + e^x]^2 ; -\infty < x < \infty$$

$$(10) f(x) = \frac{2}{\pi}e^x / [1 + e^{2x}] ; -\infty < x < \infty$$

$$(11) f(x) = ae^{-x} + 2be^{-2x} ; x > 0, a+b=1$$

الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(12) f(x) = \frac{a}{2} e^{-|x|} + b e^x / [1 + e^x]^2 ; -\infty < x < \infty , a + b = 1$$

$$(13) f(x) = \frac{1}{4} x e^{-x/2} ; x > 0$$

$$(14) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} ; -\infty < x < \infty$$

$$(15) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/8} ; -\infty < x < \infty$$

$$(16) f(x) = \binom{6}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{6-x} ; x = 0, 1, \dots, 6$$

$$(17) f(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} ; x = 1, 2, \dots$$

$$(18) f(x) = \binom{8}{x} \binom{4}{6-x} / \binom{12}{6} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

$$(19) f(x) = \binom{1+x}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x ; x = 0, 1, 2, \dots$$

$$(20) f(x) = \binom{-8}{x} \binom{-4}{6-x} / \binom{-12}{6} ; x = 0, 1, \dots, 6$$

$$(21) f(x) = \begin{cases} \frac{x(2a+x)}{a(a+x)^2} & ; 0 < x \leq a \\ \frac{a^2(a+2x)}{x^2(a+x)^2} & ; a < x < \infty \end{cases}$$

$$(22) f(x) = -q^x / x \ln(1-q) ; x = 1, 2, 3, \dots , 0 < q < 1$$

$$(23) f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} \frac{\Gamma(a+x) \Gamma(n+b-x)}{\Gamma(n+a+b)}$$

; for :  $x = 0, 1, 2, \dots, n, a > 0, b > 0$

$$(24) f(x) = \frac{1}{\sqrt{n} \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \text{ for : } -\infty < x < \infty$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

$$(25) f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2} ; x > 0, n > 0$$

$$(26) f(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}{\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left[1 + \frac{m}{n}x\right]^{(m+n)/2}} ; x > 0, m > 0, n > 0$$

$$(27) f(x) = \frac{1}{\lambda^2} x e^{-x/\lambda^2} ; x > 0, \lambda > 0$$

$$(28) f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^3} x^2 e^{-x^2/\lambda^2} ; x > 0, \lambda > 0$$

$$(29) f(x_1, \dots, x_k)$$

$$= \frac{\Gamma(n_1 + \dots + n_{k+1})}{\Gamma(n_1) \dots \Gamma(n_{k+1})} x_1^{n_1-1} \dots x_k^{n_k-1} (1 - x_1 - \dots - x_k)^{n_{k+1}-1}$$

$$\text{for: } x_i > 0, i = 1, 2, \dots, k, x_1 + \dots + x_k < 1$$

(2-2): تجربة عشوائية تتمثل في إلقاء كرتين عشوائياً في 4 صناديق بطريقة ما بحيث أن كل كرة يمكن أن تسقط في أي صندوق بفرض متكافئة. فإذا كان المتغير العشوائي  $X$  هو عدد الكرات في الصندوق فأوجد دالة احتمال المتغير  $X$ .

(2-3): تجربة عشوائية تتمثل في إلقاء قطعة عملة متزنة عدة مرات حتى نظهر الصورة لأول مرة فتتوقف عملية الإلقاء. فإذا كان المتغير العشوائي  $X$  هو عدد الرميات فأوجد دالة احتمال  $X$ .

(2-4): صندوق به  $M$  كرة منها  $pM$  كرة بيضاء ( $0 < p < 1$ ) والباقي كرات سوداء. ويوجد شخصان  $A$  و  $B$  يلعبان لعبة من ألعاب الصنفعة تتمثل في سحب كرة عشوائياً من الصندوق، فإذا كانت بيضاء يكسب  $A$  ويأخذ جنيه واحد من  $B$  وإذا كانت سوداء يكسب  $B$  ويأخذ جنيه واحد من  $A$ ، علماً بأن  $A$  معه جنيهان و  $B$  معه جنيه واحد قبل بداية اللعب. فإذا كان  $X$  هو عدد مرات تكرار هذه اللعبة حتى تتوقف بنفاذ المبلغ الموجود مع أحد اللاعبين فأوجد دالة احتمال المتغير  $X$ .

(2-5): إذا كانت:

$$f(x) = \frac{1}{b} \left[ 1 - \left| \frac{x-a}{b} \right| \right] ; a-b < x < a+b$$

حيث  $b, a$  ثابتان و  $-\infty < a < \infty$  و  $b > 0$ .

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(أ) أثبت أن  $f(x)$  دالة كثافة احتمال وارسم منحنى  $f(x)$ .

(ب) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$ .

(2-6): إذا كانت:

$$f(x) = \frac{k}{b} \left[ 1 - \left( \frac{x-a}{b} \right)^2 \right]; a-b < x < a+b, -\infty < a < \infty, b > 0$$

(أ) أوجد قيمة  $k$  التي تجعل  $f(x)$  دالة كثافة احتمال وارسم منحنى  $f(x)$ .

(ب) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  وارسم المنحنى الممثل لها.

(2-7): إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}a & ; 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}(1-a) & ; 2 < x \leq 3; 0 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$ .

(2-8): إذا كانت:

$$f(x; a) = af(x; 1) + (1-a)f(x; 0)$$

حيث  $a$  مقدار ثابت يحقق العلاقة  $0 \leq a \leq 1$ . بفرض أن كل من  $f(\cdot; 0)$  و  $f(\cdot; 1)$  دالة كثافة احتمال، بين أن  $f(\cdot; a)$  تمثل أيضاً دالة كثافة احتمال.

(2-9): إذا كانت:

$$f(x) = ke^{-ax}(1-e^{-ax}); 0 < x < \infty$$

(أ) أوجد قيمة  $k$  التي تجعل  $f(x)$  دالة كثافة احتمال وأوجد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$

(ب) أوجد  $\Pr(X > 1)$ .

(2-10): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  هي:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ = 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

أوجد:  $\Pr(0 < x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < x_2 < 1)$  و  $\Pr(x_1 < x_2)$  و  $\Pr(x_1 = x_2)$  و  $\Pr(x_1 \leq x_2)$ .

(2-11): إذا كانت الدالة  $g(x) \geq 0$  لجميع قيم  $x$  و  $\int_0^{\infty} g(x) dx = 1$  بين أن الدالة:

$$f(x_1, x_2) = 2g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) / \left(\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

حيث  $0 < x_2 < \infty$  و  $0 < x_1 < \infty$  دالة كثافة احتمال للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$ .

(2-12): إذا كانت الدالة  $F(x, y)$  تساوى الواحد الصحيح عندما  $x + 2y \geq 1$  وتساوى الصفر عندما  $x + 2y < 1$ . بين أن هذه الدالة لا يمكن أن تكون دالة توزيع احتمالي لمتغيرين عشوائيين.

(2-13): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  هي:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 ; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$$

$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد الدالة الشرطية  $f_{21}(x_2 | x_1)$  والدالة الهامشية  $f_2(x_2)$ .

(2-14): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = 21x_1^2 x_2^2 ; 0 < x_1 < x_2 < 1$$

$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد: الدالة الشرطية  $f_{12}(x_1 | x_2)$  والدالة الهامشية  $f_1(x_1)$ .

(2-15): نفرض أننا نختار عشوائياً نقطة من الفترة  $[0, 1]$  وأن المتغير العشوائي  $X_1$  هو الرقم المقابل لهذه النقطة وبعد اختيار النقطة الأولى نختار نقطة ثانية في الفترة  $[0, x_1]$  — حيث  $x_1$  هو الرقم المقابل للنقطة الأولى — فإذا كان المتغير العشوائي  $X_2$  هو الرقم المقابل للنقطة الثانية. أوجد الدالة الهامشية  $f_1(x_1)$  والدالة الشرطية  $f_{21}(x_2 | x_1)$  وحسب الاحتمال  $\Pr(x_1 + x_2 \geq 1)$ .

(2-16): نفرض أن  $f(x)$  و  $F(x)$  هما دالتا كثافة الاحتمال والتوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$ . وأن:  $f(x | x > x_0) = f(x) / [1 - F(x_0)]$  (أ) بيِّن أن  $0 < x < \infty$ ,  $f(x) = e^{-x}$  (ب) إذا كان  $f(x) = e^{-x}$  احسب  $\Pr[x > 2 | x > 1]$ .

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(17-2) :  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان مستقلان،  $-\infty < X < \infty$  و  $-\infty < Y < \infty$ .

فإذا كان:  $\Pr[S_1] = \Pr[a < X < b] = \frac{2}{3}$  و  $\Pr[S_2] = \Pr[c < Y < d] = \frac{2}{3}$  فأوجد  $\Pr[S_1 \cup S_2]$ .

(18-2):

$$f(x, y) = k e^{(ax^2 + 2cxy + by^2)} ; -\infty < x, y < \infty$$

فى الدالة السابقة بين أن الشروط اللازمة لتكون كثافة احتمال هي: (1)  $a \leq 0$  (2)  $b \leq 0$  (3)  $ab - c^2 > 0$ . وبين كذلك أنه إذا تحققت هذه الشروط وكان تكامل هذه الدالة من  $-\infty$  إلى  $+\infty$  لكلا المتغيرين يساوى الواحد الصحيح فإن:

$$k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{c} - \frac{c}{b}}$$

(19-2): فى الدالة الثنائية:

$$f(x, y) = \begin{cases} h(x) \cdot g(y) ; a < x < b, a < y < b ; \text{or} ; b < x < c, b < y < c \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

بين أن تحليل هذه الدالة إلى حاصل ضرب دالتين  $h(x)$  و  $g(y)$  ليس كافياً لكي يكون  $X$  و  $Y$  مستقلان.

(20-2): أوجد الثابتين  $k_1$  و  $k_2$  لدالتى كثافة الاحتمال:

$$f(x) = k_1 (a^2 + x^2)^{-n} ; -\infty < x < \infty, a > 0, n > 0 \quad (أ)$$

$$f(x) = k_2 (1-x)^{\frac{n-1}{2}} ; -1 < x < 1 \text{ و } n \text{ ثابت } n > 2 \quad (ب)$$

(21-2) :  $X$  و  $Y$  متغيران موجبان كثافة احتمالهما معاً:

$$f(x, y) = k e^{-ax-by}$$

حيث  $a$  و  $b$  ثابتان موجبان. أوجد قيمة  $k$  وأوجد كذلك دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x, y)$  والدوال الهامشية  $f_1(x)$  و  $f_2(y)$  والدوال الشرطية  $f_{12}(x|y)$  و  $f_{21}(y|x)$ .

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(22 – 2)  $X$  و  $Y$  متغيران موجبان وكثافة احتماليهما معا:

$$f(x, y) = \begin{cases} k y (1 - x - y) & ; x + y \leq 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة  $k$  ثم أوجد الدالة الشرطية  $f_{12}(x|y)$ .

(23 – 2): إذا كانت:

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & ; 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد كثافة الاحتمال الشرطية  $f(x|y)$ .

(24 – 2): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال الشرطية:

$$f(x|y) = \begin{cases} 3x^2/y^3 & ; 0 < x < y \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والدالة الهامشية:  $f_2(y) = 5y^4$  ;  $0 < y < 1$  أوجد الاحتمال:  $\Pr[x > \frac{1}{2}]$

(25 – 2): إذا كانت:

$$f(x, y, z) = 8xyz, 0 < x, y, z < 1$$

دالة كثافة احتمال المتغيرات  $X, Y, Z$ . احسب الاحتمال  $\Pr[X < Y < Z]$

(26 – 2): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x, y) = 4x(1 - y) ; 0 < x, y < 1$$

أوجد الدالة الشرطية  $f(x|y < \frac{1}{2})$ .

(27 – 2): أخذت نقطتان عشويتان على محيط دائرة نصف قطرها  $R$ . فإذا كان المتغير

العشوائي  $X$  هو البعد بين هاتين النقطتين، أوجد دالة كثافة احتمال  $X$ .

(28 – 2): لأي متغير مستقطع  $X$  يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots$  أثبت أن مجموعة النقط

$x_1, x_2, \dots$  التي يتكون منها مدى المتغير  $X$  والتي عندها  $\Pr(X = x_i) > 0$

تمثل على أكثر تقدير مجموعة قابلة للعد.



## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 – 29): لدراسة ظاهرة الانخار فى أحد المجتمعات، لو فرضنا أنه فى طبقة معينة من طبقات المجتمع أمكن تمثيل هذه الظاهرة بمتغير عشوائى  $X$  يمثل كمية المدخرات بالجنيه لأى فرد من أفراد هذه الطبقة، وكانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $X$  هى:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-(x/50)^2} & ; x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-(x/50)^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

علما بأن الحدث  $x \leq 0$  (الانخار السالب) يمثل الدين.

(أ) ارسم الدالة  $F(x)$ .

(ب) هل هذه الدالة مستمرة؟ وإذا كانت مستمرة أوجد صيغة كثافة الاحتمال وارسم شكلها.

(جـ) ما هو احتمال أن انخار فرد من أفراد هذا الطبقة يكون (1) أكثر من 50 جنيه، (2) أقل من (-50) جنيه أى يكون مدين بأكثر من 50 جنيه، (3) ينحصر بين (-50) و(50) جنيه، (4) مساويا 50 جنيه.

(د) ما هو الاحتمال الشرطى لأن تكون كمية مدخرات شخص ما فى هذه الطبقة (1) أقل من 100 جنيه إذا علمنا أن مدخراته أكثر من 50 جنيه (2) أكثر من 50 جنيه إذا علمنا أن مدخراته أقل من 100 جنيه.

(2 – 30): فى دراسة لطول مدة المكالمة التليفونية الدولية بالدقائق من مدينة معينة كظاهرة عشوائية أمكن تمثيل طول مدة المكالمة بالمتغير العشوائى  $X$  الذى له دالة التوزيع الاحتمالى:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{3}e^{-x/3} - \frac{1}{3}e^{-x/6} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث  $[x]$  هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى  $x$  عندما  $0 \leq x$ :

(1) ارسم دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$ .

(2) هل الدالة  $F(x)$  مستمرة أم متقطعة أم غير ذلك.

(3) ما هو احتمال أن تكون طول مدة مكالمة تليفونية دولية من هذه المدينة:

(أ) أكثر من 6 دقائق؟ (ب) أقل من 4 دقائق؟ (جـ) تساوى 3 دقائق؟  
(د) بين 4 و 7 دقائق؟

## الفصل الثقي – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

- (4) ما هو الاحتمال الشرطي أن طول مدة مكالمة تليفونية دولية من هذه المدينة: (أ) أقل من 9 دقائق إذا علمت أنها استمرت أكثر من 5 دقائق؟  
(ب) أكثر من 5 دقائق إذا علمت أنها أقل من 9 دقائق؟
- (2 – 31): إذا كان المتغير العشوائي  $(X, Y)$  من النوع المختلط حيث  $X$  متغير عشوائي متقطع دالة احتماله:

$$P_i = \Pr(X = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i ; i = 1, 2, 3, \dots$$

و  $Y$  متغير عشوائي مستمر. ودالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = i$  هي:

$$f(y | i) = i(1 - y)^{i-1} ; 0 < y < 1$$

اثبت أن دالة كثافة الاحتمال المطلقة (غير الشرطية) للمتغير المستمر  $Y$  هي:

$$f_2(y) = 2/(1 + y)^2 ; 0 < y < 1$$

- (2 – 32): تجربة مركبة تتم على خطوتين. في الخطوة الأولى يتم إلقاء زهرة نرد مترنة، والمتغير العشوائي  $X$  يمثل عدد النقاط التي تظهر على السطح العلوي لزهرة النرد. فإذا كانت القيمة المشاهدة للمتغير  $X$  تساوي  $x$  تكون الخطوة الثانية للتجربة هي اختيار نقطة (أو عدد) عشوائياً من الفترة  $\left[0, \frac{1}{x}\right]$  فإذا كان المتغير  $Y$  يمثل الرقم المختار من الفترة  $\left(0, \frac{1}{x}\right)$  فأوجد:

- (1) دالة احتمال المتغير  $X$ .
  - (2) دالة كثافة الاحتمال (غير الشرطية) للمتغير  $Y$  ودالة كثافة الاحتمال الشرطية  $f(y | x)$  للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$ .
  - (3) دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x, y)$  للمتغير المختلط  $(X, Y)$ .
  - (4) دالة الاحتمال الشرطية  $P(x | y)$  للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$ .
- (2 – 33): كيس به كرة بيضاء وكرتان سوداء. عند سحب 3 كرات من الكيس مع الإعادة (بدون إعادة) إذا كان المتغير العشوائي  $X_i$  يمثل نتيجة السحب رقم  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) حيث  $X_i = 1$  إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ويساوي الصفر إذا كانت سوداء. أوجد:
- (أ) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات الثلاثة  $(X_1, X_2, X_3)$ .
  - (ب) دوال كثافة الاحتمال الهامشية لكل متغير من المتغيرات الثلاثة.

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(جـ) دالة كثافة احتمال المتغير  $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$

(د) دالة كثافة احتمال المتغير  $\max_i Y_2 = (X_1, X_2, X_3)$

(هـ) دالة كثافة احتمال المتغير  $\min_i Y_3 = (X_1, X_2, X_3)$

(2-34): إذا كان المتغيران العشوائيان  $X, Y$  لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}, x \geq 0, y \geq 0$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك، أوجد:

(أ) الاحتمال:  $\Pr(X + Y \leq 1)$  (ب)  $\Pr(x \leq 1, Y \leq 1); Y \leq 1, X \leq 1$

(جـ)  $\Pr(X + Y > 2)$  (د)  $\Pr(X < 2Y)$

(هـ)  $\Pr(X > 1)$  (و)  $\Pr(X = Y)$

(ز)  $\Pr(Y > 1 | X \leq 1)$  (ح)  $\Pr(X > Y | Y > 1)$

(2-35): أوجد كل مطلوبات التمرين السابق (2-34) إذا كانت:

$f(x, y) = \frac{1}{4}; 0 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 2$  وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(2-36): المتغيران العشوائيان  $X, Y$  لهما دالة الاحتمال المشتركة  $P(x, Y)$  المعطاة بالجدول التالي:

X \ Y	P(x, Y)			$P_2(Y)$
	0	1	2	
0	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{6}{60}$
1	$\frac{2}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{12}{60}$
2	$\frac{3}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{18}{60}$
3	$\frac{4}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{24}{60}$
$P_1(x)$	$\frac{10}{60}$	$\frac{20}{60}$	$\frac{30}{60}$	1

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

لوجد:

$$(أ) \Pr(X \leq 1, Y \leq 1) \cdot \Pr(X + Y \leq 1) \cdot \Pr(X < 2Y) \cdot \Pr(X + Y > 2)$$

$$(ب) \Pr(X = Y) \cdot \Pr(Y > 1) \cdot \Pr(X > 1)$$

$$(ج) \Pr(X^2 + Y^2 \leq 1) \cdot \Pr(X \geq Y | Y > 1)$$

$$(د) \Pr(X^2 + Y^2 \leq 1) \cdot \Pr(X \geq Y | Y > 1)$$

(هـ) هل المتغيران  $X, Y$  مستقلان؟ علل إجابتك.

(37 – 2):  $X_1, X_2, \dots, X_5$  خمسة متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/4} & ; \text{for } x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(وهو توزيع 'زاي ليج' المعطى بالعلاقة (2.23.16) عندما  $\lambda = 2$ )

لوجد احتمال أن:  $\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 4$

(38 – 2):  $X, Y$  متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} & ; \infty \leq x, y \leq \infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(أ) هل  $X$  و  $Y$  مستقلان؟

(ب) هل  $X$  و  $Y$  لهما نفس التوزيع؟

(ج) لوجد  $\Pr(X^2 + Y^2 \leq 4)$

(د) هل  $X^2$  و  $Y^2$  مستقلان؟

(هـ) لوجد  $\Pr(Y^2 \leq 2)$  و  $\Pr(X^2 \leq 2)$

(39 – 2):  $X_1, X_2, X_3$  ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حدد العدد  $a$  الذي يجعل احتمال أن واحد على الأقل من المتغيرات  $X_1, X_2, X_3$  أكبر من  $a$  يساوي 0.9.

## الفصل الثاني - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 - 40): A و B حدثان و  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{2}$ , و  $P(A|B) = \frac{1}{4}$ . فإذا كان

المتغير العشوائي X مُعرَّف كما يلي: X = 1 عند حدوث A و X = 0 عند عدم حدوث A. والمتغير العشوائي Y مُعرَّف كما يلي: Y = 1 عند حدوث B و Y = 0 عند عدم حدوث B. بين إذا ما كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة:

(أ) المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان.

(ب)  $\Pr(X^2 + Y^2 = 1) = \frac{1}{4}$

(ج)  $\Pr(XY = X^2 Y^2) = 1$

(د) المتغير العشوائي X له توزيع منظم في الفترة [0, 1]. أي التوزيع (2. 23.

7) عندما  $a = 0$ ,  $b = 1$

(هـ) المتغيران العشوائيان X و Y لهما نفس للتوزيع؟

(2 - 41): إذا كان المتغيران العشوائيان X, Y مستقلان ولهما نفس التوزيع حيث:

$f(x) = f(y) = 0$  و  $f(x) = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $f(y) = 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  خلاف ذلك. أوجد:

(أ)  $\Pr(X + Y < 0.5)$  (ب)  $\Pr(X - Y < 0.5)$

(ج)  $\Pr(XY < 0.5)$  (د)  $\Pr(X/Y < 0.5)$

(هـ)  $\Pr(X^2 < 0.5)$  (و)  $\Pr(X^2 + Y^2 < 0.5)$

(ز)  $\Pr(e^{-1} < 0.5)$  (ح)  $\Pr(\cos \pi Y < 0.5)$

(2 - 42): إذا كانت:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \text{ or } x + y \leq 1 \text{ or } y \leq 0 \\ 1 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل يمكن اعتبار  $F(x, y)$  دالة توزيع احتمالي؟ علل إجابتك.

(2 - 43): عند إلقاء 3 زهرات نرد متزنة عشرة مرات. إذا كان X هو عدد المرات التي

فيها الثلاث أوجه متشابهة و Y عدد المرات التي فيها وجهان فقط متشابهان. أوجد دالة الاحتمال المشتركة للمتغيران X و Y.

## الفصل الثقي - المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2-44): إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان مستقلان ودالة كثافة احتمال كل منهما هي:

$$f(x) = 2x \quad ; \quad 0 < x < 1 \quad ; \quad f(y) = 2y \quad ; \quad 0 < y < 1$$

و  $f(x) = f(y) = 0$  خلاف ذلك. احسب الاحتمال الشرطي:  
 $\Pr(X < Y | X < 2Y)$

(2-45): التوزيع المشترك المنقطع للمتغير  $(X, Y, Z)$  مُعرّف بتخصيص احتمالات متساوية لنقط الاحتمال الستة التالية:  $(0, 0, 0)$  و  $(0, 0, 1)$  و  $(2, 0, 1)$  و  $(2, 1, 0)$  و  $(1, 2, 1)$  و  $(0, 2, 0)$ : (أ) حدد التوزيعات الهامشية للمتغيرات  $X$  و  $Y$  و  $Z$ . (ب) حدد دالة الاحتمال المشتركة الهامشية للمتغير  $(X, Y)$ . (ج) حدد دالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $(X, Y)$  إذا علمت أن  $Z = 1$ .

(2-46): (أ) بين أن الدالة:

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \quad ; \quad \text{for } 0 < x_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

تمثل دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغيرات مستقلة.

(ب) بين أن الدالة:

$$f(x_1, \dots, x_n) = k \quad ; \quad \text{for } x_i > 0, \quad x_1 + \dots + x_n \leq 1$$

تمثل دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغيرات غير مستقلة.

(2-47): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y, Z)$  هي:

$$f(x, y, z) = \frac{3}{4\pi} \quad ; \quad \text{for } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

أوجد دالة للتوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي  $Z$ .

(2-48): المتغيران العشوائيان  $X_1, X_2$  لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & ; \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1 \\ \text{وتساوي الصفر خلاف ذلك} \end{cases}$$

بين أن المتغيران غير مستقلان. ثم بين أن:

$$\Pr(0 < X_1 < \frac{1}{2}, \quad 0 < X_2 < \frac{1}{2}) \neq \Pr(0 < X_1 < \frac{1}{2}) \cdot \Pr(0 < X_2 < \frac{1}{2})$$

## الفصل الثاني – المتغيرات العشوائية ودوال التوزيع الاحتمالي

(2 – 49): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين  $X_1, X_2$  هي:

$$f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 \quad ; 0 < x_1 < x_2 < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن المتغيران  $X_1, X_2$  غير مستقلان.

(2 – 50): إذا كانت المتغيرات الثلاثة  $X_1, X_2, X_3$  لها دالة الاحتمال المشتركة التالية:

$$P(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4} \quad ; (x_1, x_2, x_3) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. أثبت أن:

$$P_{ij}(x_i, x_j) = P_i(x_i) \cdot P_j(x_j) \quad ; i \neq j \quad ; i, j = 1, 2, 3$$

بينما:

$$P(x_1, x_2, x_3) \neq P_1(x_1) P_2(x_2) P_3(x_3)$$

حيث  $P_i(x_i)$  هي دالة احتمال المتغير  $X_i$  و  $P_{ij}(x_i, x_j)$  هي دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_i, X_j$ .

ملاحظة: هذا التمرين مثال قديم "س. برنستين" "S. Bernestien" ليبين أن الاستقلال متنى متنى ليس من الضروري أن يترتب عليه الاستقلال بين المتغيرات الثلاثة معاً.

(2 – 51): إذا كان المتغيران العشوائيان  $X_1, X_2$  لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة التالية:

$$f(x_1, x_2) = 2e^{-x_1 - x_2} \quad ; 0 < x_1 < x_2, \quad 0 < x_2 < \infty$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن المتغيران  $X_1, X_2$  غير مستقلان.

(2 – 52): أثبت أن الدالة  $F(y | x - h < X \leq x)$  المعطاة بالعلاقة (2. 17. 7) تحقق شروط دالة التوزيع الاحتمالي بالنسبة للمتغير الشرطي  $Y$ .

(2 – 53): أثبت صحة العلاقة (2. 17. 9).





## الفصل الثالث

### مقاييس النزعة المركزية

### (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

### Measures of Central Tendency (Location Parameters), Dispersion and Moments

#### (3 - 1) مقدمة:

من دراستنا لمبادئ الإحصاء نعلم أن أى ظاهرة أو مجتمع إحصائي يمكن دراسته وتحديد خصائصه عن طريق تحديد مجموعة من الثوابت أو القيم النموذجية Typical Values — تسمى بارامترات المجتمع — Parameters — تحدد خصائص المجتمع محل الدراسة. وهذه البارامترات تلعب دوراً هاماً في الإحصاء الرياضي. هذه الثوابت أو البارامترات كثيرة، منها الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي والمنوال والوسيط وغيرها من المتوسطات بصفة عامة والتي تسمى بمقاييس المركز (أو مقاييس الموضع). ومنها أيضاً العزوم والمترامكات وغيرها من المقاييس المسماة بمقاييس التشتت. وكل مقياس من هذه المقاييس عبارة عن ثابت يمثل قيمة واحدة أو رقم واحد يعبر عن متوسط المجتمع محل الدراسة أو تشتته أو درجة التواءه أو تقاربه أو غير ذلك من المعلومات التي تحدد خصائص للمجتمعات بحيث يمكن تلخيص بيانات الظاهرة الممثلة للمجتمع محل الدراسة في رقم واحد أو مجموعة محدودة من الأرقام (أو الثوابت) حتى يمكن استيعاب هذه البيانات وإعطاء فكرة عامة عنها لفهمها واستنتاج المعلومات المفيدة منها.

وكما هو معروف أيضاً من دراستنا لمبادئ الإحصاء أن أى جدول تكرارى لظاهرة ما يمثلها متغير عشوائى  $X$  يمكن وضعه فى صورة مراكز فئات  $x_i$  وتكرارات  $r_i$ :

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

Mid X مراكز الفئات	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_k$	$\Sigma$
$r_i$ frequencies تكرارات	$r_1$	$r_2$	...	$r_i$	...	$r_k$	$n$

فإذا فرضنا أن  $g(x)$  دالة ما في المتغير  $X$  (أو في القيم  $x$ ) فيمكن تعريف متوسط الدالة  $g(x)$  بالعلاقة التالية:

$$(3.1.1): \bar{g}(x) = \sum_{i=1}^k g(x_i) \cdot \left(\frac{r_i}{n}\right)$$

وباختيارات مناسبة للدالة  $g(x)$  يمكن أن نحصل من الجدول التكراري على كثير من الثوابت أو البارامترات التي تحدد خصائص المجتمع محل الدراسة سواء من متوسطات أو مقاييس أخرى للتشتت، أو غير ذلك من المقاييس التي تحدد خصائص المجتمع محل الدراسة وذلك كما يلي:

(3-1-1) مقياس المركز (أو الموضع) المحسوبة من الجداول التكرارية:

Measures of Central Tendency (or Measures of Location):

(أ) الوسط الحسابي:

بوضع  $g(x_i) = x_i$  في معادلة (3.1.1) نحصل على الوسط الحسابي - والذي نسميه أحياناً في الإحصاء الرياضي بالتوقع أو القيمة المتوقعة - ونرمز له عادة برمز خاص هو  $\bar{x}$  (أو  $\mu$  أو  $m$ ) وبذلك يكون للوسط الحسابي:

$$(3.1.2): \bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \left(\frac{r_i}{n}\right).$$

(ب) الوسط الهندسي:

بوضع  $g(x_i) = \ln x_i$  في معادلة (3.1.1) نحصل على لوغاريتم الوسط الهندسي - فإذا رمزنا للوسط الهندسي بالرمز  $g_x$  فإن:

$$(3.1.3): \ln g_x = \sum_{i=1}^k (\ln x_i) \cdot \left(\frac{r_i}{n}\right)$$

ومن هذا نحصل على  $g_x$  - وذلك بشرط أن جميع قيم  $x_i$  تكون موجبة حتى يمكن تعريف  $\ln(x_i)$ .

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

### (ج) الوسط التوافقي:

بوضع  $g(x_i) = \frac{1}{x_i}$  في معادلة (3. 1. 1) نحصل على مقلوب الوسط التوافقي —  
فلو رمزنا للوسط التوافقي بالرمز  $H_x$  نجد أن:

$$(3. 1. 4): \frac{1}{H_x} = \sum_i \frac{1}{x_i} \cdot \left(\frac{x_i}{n}\right)$$

### (د) الوسيط والمنوال:

في دراستنا لمبادئ الإحصاء تعرفنا على الوسيط والمنوال للتوزيعات التكرارية. حيث عرفنا الوسيط بأنه هو القيمة المتوسطة للبيانات بعد ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً) في جدول تكرارى متجمع صاعد (أو هابط) — بحيث أن عدد التكرارات السابقة للوسيط تساوى عدد التكرارات اللاحقة له — والوسيط يسمى إحصاء ترتيبى لأهمية الترتيب فى تحديده. والمنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً (أو الأكثر تكراراً) ويقع المنوال فى الفئة المقابلة لكبير تكرار فى الجدول التكرارى.

### (3 - 1 - 2) مقاييس التشتت المصوبة من الجداول التكرارية:

تعرفنا كذلك فى دراستنا لمبادئ الإحصاء على مقاييس التشتت وكيفية إيجادها من الجداول التكرارية — حيث أن هذه المقاييس تبرز خاصية هامة أخرى من خصائص التوزيع التكرارى هى درجة تركيز أو انتشار (أى تشتت) التوزيع التكرارى. فقد يتساوى توزيعان فى المتوسط مع اختلافهما فى درجة التركيز أو الانتشار. ويقاس التشتت بعدة مقاييس مثل المدى الذى يمثل الفرق بين أكبر وأصغر قراءة أو الانحراف المتوسط أو التباين أو الانحراف المعيارى أو غير ذلك مثل العزم والمتراكمات — حيث يمكن قياس درجة السواء التوزيع التكرارى أو تماثله بحساب العزم المركزى الثالث وقياس نقرطح التوزيع بحساب العزم المركزى الرابع وكل هذه المقاييس نحصل عليها بالاختيارات المناسبة للدالة  $g(x_i)$  فى المعادلة (3. 1. 1) كما يلى:

### (أ) الانحراف المتوسط:

بوضع  $g(x_i) = |x_i - \mu|$  فى معادلة (3. 1. 1) [حيث  $\mu$  هو الوسط الحسابى أو المتوقع] نحصل على الانحراف المتوسط — وهو متوسط الانحرافات المطلقة للقيم  $x_i$  عن متوسطها  $\mu$  — وبذلك يكون الانحراف المتوسط والذى نرمز له بالرمز  $\Delta_x$  هو:

$$(3. 1. 5): \Delta_x = \sum_i |x_i - \mu| \left(\frac{x_i}{n}\right)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(ب) التباين والانحراف المعياري:

للحصول على التباين  $\sigma_x^2$  من الجدول التكراري نضع  $g(x_i) = (x_i - \mu)^2$  في معادلة (3. 1. 1) فنحصل على التباين في الصورة:

$$(3. 1. 6): \sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

والانحراف المعياري  $\sigma_x$  هو الجذر الموجب للتباين:

$$(3. 1. 7): \sigma_x = + \sqrt{\sum_i (x_i - \mu)^2 \left(\frac{f_i}{n}\right)}$$

(ج) العزم المركزي الثالث:

يمكن الحصول على العزم المركزي الثالث بوضع  $g(x_i) = (x_i - \mu)^3$  في معادلة (3. 1. 1) وبذلك يكون العزم المركزي الثالث هو:

$$(3. 1. 8): \mu_3 = \sum_i (x_i - \mu)^3 \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

(د) العزم المركزي الرابع:

وبالمثل يكون العزم المركزي الرابع:

$$(3. 1. 9): \mu_4 = \sum_i (x_i - \mu)^4 \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

(هـ) العزم المركزي من الدرجة  $r$ :

وعموماً يكون العزم المركزي من الدرجة  $r$  هو:

$$(3. 1. 10): \mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

(و) بعض مقاييس الالتواء والتفرطح:

كما يمكن قياس الالتواء والتفرطح للتوزيع التكراري بعدة مقاييس. فمن مقاييس الالتواء مثلاً:

$$(3. 1. 11): S_1 = \frac{\text{mean} - \text{mode}}{\sigma} = \frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{النوال}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$(3. 1. 12): S_2 = \mu_3 / \mu_2^3$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزم

ومن مقاييس التفرطح:

$$(3. 1. 13): \gamma = \frac{\mu_3}{\mu_2^2} - 3$$

وقياساً على ما سبق يمكن تحديد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس السابقة للتوزيعات الاحتمالية بصورة مماثلة لما هو متبع في التوزيعات التكرارية مع مراعاة المحاذير الرياضية اللازمة وذلك باستبدال التكرار النسبي  $\frac{f_i}{n}$  في معادلة (3. 1. 1) بدالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى  $X$  وتحويل علامة المجموع إلى علامة التكامل إذا كان  $X$  متغير مستمر وتركها كما هي إذا كان متقطع، وذلك استنباطاً من العلاقة بين التوزيعات التكرارية والتوزيعات الاحتمالية مثل العلاقة بين دالة التوزيع الاحتمالى ودالة التوزيع التجريبية للعينة والمعطاة بالعلاقة (2. 22. 4).

### (3 - 2) مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات أو مقاييس الموضع) للمتغير العشوائى المفرد:

**Measures of Central Tendency (Means or Measures of Location) for Uni-variate r. v.:**

(3 - 2 - 1): مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات والتي تعرف كذلك بمقاييس الموضع للمتغير العشوائى المفرد  $X$  مثل الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى والوسط (وباقى الإحصاءات الترتيبية) والمعدل — يمكن الحصول عليها للمتغير العشوائى  $X$  أو لأى دالة (دورالية) فى المتغير  $X$  — بأسلوب مماثل لذلك الأسلوب المستخدم فى الحصول على هذه المقاييس من التوزيعات التكرارية وذلك من المعادلة (3. 1. 1) باستخدام دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى  $X$  بدلا من التكرار النسبى  $\frac{f_i}{n}$ .

فإذا كانت  $g(x)$  دالة فى المتغير العشوائى المتقطع  $X$  الذى له دالة الاحتمال  $P(x)$  — فإن الدالة  $g(x)$  تكون متغيراً عشوائياً — ويكون متوسط (أو توقع) هذا المتغير (أو هذه الدالة)  $g(x)$  — كما يتضح من معادلة (3. 1. 1) — هو:

$$(3. 2. 1): E[g(X)] = \bar{g}(X) = \sum_i g(x_i)P(x_i)$$

حيث  $\sum$  هو المجموع مأخوذاً على جميع قيم  $X$  التى عندها  $P(x) > 0$ .

### الفصل الثالث - مقاييس للتزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

أما إذا كان المتغير  $X$  من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  فإن توقع الدالة  $g(x)$  تكون:

$$(3.2.2): E[g(X)] = \bar{g}(X) = \int_x g(x)f(x)dx$$

حيث  $\int_x$  هو التكامل مأخوذاً على كل مدى للمتغير  $X$ .

ولكن المجموع في العلاقة (3.2.1) قد يكون مكوناً من عدد لانتهائي من الحدود — وعلى ذلك فإنه لا يكون دائماً مجموع تقاربي أى لا يكون دائماً موجود — فقد يكون المجموع لانتهائي. كما أن التكامل الموجود في العلاقة (3.2.2) قد يكون فيه أحد أو كلا طرفي التكامل لانتهائي — لهذا فإنه لا يكون دائماً موجود — ولذلك فإننا نقول أن التوقع المحسوب بالعلاقة (3.2.1) يكون موجود إذا تحققت العلاقة التالية:

$$(3.2.3): \sum_i |g(x_i)|P(x_i) < \infty$$

حيث  $|g(x_i)|$  هي القيمة الموجبة للدالة  $g(x_i)$ . كما أن التوقع المحسوب بالعلاقة (3.2.2) يكون موجود إذا تحققت العلاقة التالية:

$$(3.2.4): \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$$

وعلى ذلك إذا كان المجموع في الجانب الأيمن من العلاقة (3.2.1) موجود (أى محدود) ولكن العلاقة (3.2.3) غير متحققة فإننا نقول أن توقع الدالة أو المتغير العشوائي  $g(X)$  غير موجود كما في مثال (3-2-3) التالي — وكذلك إذا كان التكامل في الجانب الأيمن من العلاقة (3.2.2) موجود في حين أن العلاقة (3.2.4) غير متحققة فإننا نقول أن توقع المتغير العشوائي  $g(X)$  غير موجود.

وعموماً إذا كانت الدالة  $|g(X)|$  لها حد أعلى — أى يوجد عدد حقيقي موجب  $M$  بحيث تكون  $|g(X)| \leq M$  لجميع قيم  $X$  — فإن توقع المتغير العشوائي  $g(X)$  يكون دائماً موجود وذلك لتحقق الشرطين (3.2.3)، (3.2.4) دائماً.

ويمكن التعبير عن التوقع  $E[g(X)]$  بعلاقة واحدة في حالة المتغير المتقطع أو المستمر واستخدام صيغة واحدة في الحالتين بدلاً من الصيغتين (3.2.1) و (3.2.2) وذلك باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير  $X$  واستخدام تكامل "ستيلتج" فنقول أن:

$$(3.2.5): E[g(X)] = \int_x g(x)dF(x)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

يسمى بتوقع المتغير العشوائى  $g(X)$ ، إذا كان  $X$  معرف بدالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$ ، وإذا تحققت العلاقة التالية:

$$(3.2.6): \int_x g(x) dF(x) < \infty$$

حيث أن التكامل يتحول إلى مجموع إذا كان المتغير  $X$  من النوع المنقطع ويتحول  $dF(x)$  إلى دالة الاحتمال  $p(x_i)$ .

مما سبق يمكن تقديم التعريف التالى لتوقع المتغير العشوائى  $g(X)$ .

تعريف (3 - 2 - 1): إذا كانت  $g(X)$  دالة (بورالية) فى المتغير العشوائى  $X$  الذى له دالة للتوزيع الاحتمالى  $F(x)$  فإن توقع المتغير  $g(X)$  يعرف بأنه:

$$(3.2.7a): E[g(X)] = \int_x g(x) dF(x)$$

إذا كان المتغير العشوائى  $X$  معين بدالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$  وإذا تحققت العلاقة (3.2.6).

أو:

$$(3.2.7b): E[g(X)] = \sum_i g(x_i) P(x_i)$$

إذا كان  $X$  متغير منقطع له دالة الاحتمال  $P(x)$  وتحققت العلاقة (3.2.3).

أو:

$$(3.2.7c): E[g(X)] = \int_x g(x) f(x) dx$$

إذا كان  $X$  متغير مستمر له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  وتحققت العلاقة (3.2.4).

ملاحظة (3 - 2 - 1): [يوضع  $g(x) = [X - c]^r$  فى العلاقات (3.2.7) السابقة نحصل على كمية تسمى بالعزم الرائى (أو العزم من الدرجة  $r$ )  $\mu'_r$  للمتغير  $X$  حول الثابت  $c$  - فإذا كانت  $c$  هى متوسط  $X$  فإنه يسمى بالعزم الرائى المركزى - وسنقدم ذلك فى بند (3 - 5 - 3) التالى.

ونتناول الآن مقاييس للموضع. وهى الوسط الحسابى (أو التوقع) والوسيط والمنوال وغيرها كل على حدة.

### الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(3-2-2) الوسط الحسابي أو التوقع للمتغير المفرد  $X$ :

إذا كان  $X$  متغير عشوائي له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  فيمكن تعريف توقع المتغير  $X$  - كما في تعريف (3-2-1) بوضع  $g(x) = x$  - كما يلي:

تعريف (3-2-2): إذا كان  $X$  متغير عشوائي له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  - فإن توقع المتغير  $X$  يعرف بأنه:

$$(3.2.8a): E(X) = \int x dF(x)$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.2.8b): \int x |dF(x)| < \infty$$

والتكامل مأخوذ بمفهوم تكامل 'ستيلتج'.

فإذا كان المتغير  $X$  من النوع المنقطع وله دالة الاحتمال  $P(x)$  فإن:

$$(3.2.8c): E(X) = \sum x_i P(x_i)$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.2.8d): \sum x_i |P(x_i)| < \infty$$

(أي يكون المجموع متقارباً تقارب مطلق)

أما إذا كان المتغير  $X$  من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  فإن:

$$(3.2.8e): E(X) = \int x f(x) dx$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.2.8f): \int x |f(x)| dx < \infty$$

(أي يكون التكامل متقارباً تقارب مطلق)

وعادة نستخدم أكثر من لفظ للتوقع منها التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي.

وفيما يلي بعض الأمثلة نوجد فيها للتوقع لعدد من التوزيعات الاحتمالية المقدمة في البند (2-23).



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

مثال (3-2-2 أ): أوجد  $E(X)$  إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له التوزيع الاحتمالي الآتي:

- (1) التوزيع ذو الحدين المعطى بالعلاقة (1. 26. 3).
- (2) التوزيع البواسوني المعطى بالعلاقة (1. 29. 1).
- (3) التوزيع الهايبرجيومترى المعطى بالعلاقة (1. 27. 2).
- (4) التوزيع المنتظم المعطى بالعلاقة (2. 23. 7).
- (5) توزيع جاما المعطى بالعلاقة (2. 23. 10).
- (6) توزيع بيتا المعطى بالعلاقة (2. 23. 11).

(الحل)

(1) توقع المتغير ذو الحدين  $(k = x, q = 1 - p)$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} = np [p + (1-p)]^{n-1} = np \end{aligned}$$

(2) توقع المتغير ذو التوزيع البواسوني  $(k = x)$ :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

(3) توقع المتغير ذو التوزيع الهايبرجيومترى  $(k = x)$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^n x \binom{m}{x} \binom{M-m}{n-x} / \binom{M}{n} = \frac{m}{\binom{M}{n}} \sum_{x=1}^n \binom{m-1}{x-1} \binom{M-m}{n-x} \\ &= \frac{m}{\binom{M}{n}} \binom{m-1+M-m}{x-1+n-x} \\ &= \frac{m}{\binom{M}{n}} \binom{M-1}{n-1} = n \left( \frac{m}{M} \right) = np \quad ; \quad p = \frac{m}{M} \end{aligned}$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(4) توقع المتغير ذى التوزيع المنتظم:

$$E(X) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x dx = \frac{1}{(b-a)} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2(b-a)} [b^2 - a^2] = \frac{b+a}{2}$$

(5) توقع المتغير ذى توزيع جاما:

$$E(X) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x x^{n-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha \Gamma(n)} = \frac{n}{\alpha}$$

(6) توقع المتغير ذى التوزيع بيتا (n, m):

$$E(X) = \frac{1}{\beta(m, n)} \int_0^1 x x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{\beta(m, n)} \beta(m+1, n)$$

$$= \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1+m)} = \frac{m}{n+m}$$

ويجب ملاحظة أن عملية إيجاد التوقع طبقاً لتعريف (3 - 2 - 2) والذي نشترط فيه تحقق العلاقتين (3. 2. 8d) و (3. 2. 8f) ما هي إلا عملية رياضية لها خصائص أساسية معينة تساعد على تبسيط الكثير من العمليات الحسابية عند إيجاد توقع بعض الدوال أو المتغيرات العشوائية. فإذا كان  $b$  و  $c$  مقادير ثابتة و  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g(x)$  دوال فى المتغير العشوائى  $X$  وتوقعات هذه الدوال موجودة (محدودة) فيمكن إثبات أن دليل التوقع  $E(\cdot)$  له الخصائص التالية:

(3 - 2 - 2 أ) خصائص دليل التوقع  $E(\cdot)$ :

(1)

$$(3.2.9): E(c) = c$$

(2)

$$(3.2.10a): E[c g(X)] = c E[g(X)]$$

$$(3.2.10b): E[c g(X) \pm b] = c E[g(X)] \pm b$$

(3)

$$(3.2.11a): E[g_1(X) \pm g_2(X)] = E[g_1(X)] \pm E[g_2(X)]$$

### الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وعموماً

$$(3.2.11b): E\left[\sum_i [c_i g_i(X) + b_i]\right] = \sum_i c_i E g_i(X) + \sum_i b_i$$

حيث  $b_i, c_i$  ثوابت،  $g_i(X)$  دوال في المتغير  $X$ .

$$(3.2.12): E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$$

إذا كانت  $g_1(X) \leq g_2(X)$  لجميع قيم  $X$ .

$$(3.2.13): |E[g(X)]| \leq E[|g(X)|]$$

(6) إذا كان  $X, Y$  متغيران مستقلان فإن:

$$(3.2.14): E[g_1(X)g_2(Y)] = E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

العلاقات من (3.2.9) حتى (3.2.13) يمكن إثباتها سواء كان المتغير العشوائي  $X$  من النوع المنقطع أو النوع المتصل (المستمر) والإثبات ما هو إلا تطبيق مباشر لتعريف (3.2.1) - لذلك سنكتفى بالإثبات في الحالة التي يكون فيها  $X$  متغير عشوائي من النوع المستمر - وذلك كما يلي:

(1)

$$E[c] = \int_{-\infty}^{\infty} c f(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c ;$$

(2)

$$E[cg(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)f(x)dx = c \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = cE[g(x)] ;$$

(3)

$$E[g_1(X) \pm g_2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x) \pm g_2(x)]f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)f(x)dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)f(x)dx$$

$$= E[g_1(X)] \pm E[g_2(X)] ;$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(4) إذا كانت  $g_2(x) \geq g_1(x)$  فإن:  $g_2(x) - g_1(x) \geq 0$

$$E[g_2(X) - g_1(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [g_2(x) - g_1(x)]f(x)dx \geq 0$$

$$\therefore E[g_2(X)] \geq E[g_1(X)]$$

(5) في العلاقة (3. 2. 13) إذا وضعنا:

$$g_1(x) = g(x), \quad g_2(x) = |g(x)|$$

$$\therefore E[g(X)] \leq E[|g(X)|] \quad \dots\dots\dots (a)$$

أما إذا وضعنا في (3. 2. 13)

$$g_1(x) = -|g(x)|; \quad g_2(x) = g(x)$$

نجد أن:

$$-E[|g(X)|] \leq E[g(X)] \quad \dots\dots\dots (b)$$

من (a)، (b) نجد أن:

$$-E[|g(X)|] \leq E[g(X)] \leq E[|g(X)|]$$

$$\therefore |E[g(X)]| \leq E[|g(X)|]$$

(6)

$$E[g_1(X)g_2(Y)] = \int_x \int_y g_1(x)g_2(y)f(x,y)dx dy$$

ومن الاستقلال

$$= \int_x \int_y g_1(x)g_2(y)f_1(x)f_2(y)dx dy = E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

مثال (3 - 2 - 2 ب): إذا كان  $X$  متغير عشوائي له توزيع منتظم دالة كثافة

احتماله

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}; \quad a < X < b$$

فأوجد:

$$E(X-m)^2$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

حيث  $m = E(X)$

(الحل)

$$E(X - m)^2 = E[X^2 - 2mX + m^2]$$

ومن الخاصية (3.2.11)

$$E(X - m)^2 = E(X^2) - E(2mX) + E(m^2)$$

ومن (3.2.9) و (3.2.10)

$$\begin{aligned} E(X - m)^2 &= E(X^2) - 2mE(X) + m^2 \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 = E(X^2) - m^2 \end{aligned}$$

ونجد من مثال (3-2-2) (4) أن:

$$m = E(X) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x \, dx = \frac{b+a}{2}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{(b-a)} \left( \frac{x^3}{3} \right)_a^b = \frac{1}{3} \frac{(b^3 - a^3)}{(b-a)} \\ &= \frac{1}{3} (b^2 + ba + a^2) \end{aligned}$$

$$\therefore E(X - m)^2 = E(X^2) - m^2$$

$$= \frac{1}{3} (b^2 + ba + a^2) - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{12} (b-a)^2$$

مثال (3-2-2 جـ): إذا كان المتغير العشوائي  $X$  يأخذ القيم:

$$x_i = (-1)^i 2^i / i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots$$

باحتمالات

$$P_i = \Pr(X = x_i) = \frac{1}{2^i}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

فإن توقع المتغير  $X$  يكون غير موجود بالرغم من أن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = -\ln 2$$

أى أن  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i < \infty$  ولكن:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

ولهذا فإن  $E(X)$  غير موجود لعدم تحقق العلاقة (3. 2. 8d).

المثال السابق يوضح أن للطرف الأيمن من العلاقة (3. 2. 8c) لا يعرف بأنه توقع للمتغير  $X$  إلا إذا تحققت العلاقة (3. 2. 8d).

مثال (3 - 2 - 2 د): إذا كان المتغير العشوائى  $X$  له توزيع كوشى المعطى بالعلاقة (2. 23. 12) - (عندما  $\lambda = 1, \alpha = 0$ ) - أى أن دالة كثافة احتماله هى:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; -\infty \leq x \leq \infty$$

فأوجد توقع المتغير  $X$ .

(الحل)

توقع المتغير  $X$  من المفروض أن نحصل عليه من التكامل التالى (عندما يكون هذا التكامل موجود):

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)}$$

وهذا التكامل غير صحيح Improper لوجود  $\infty$  فى كلا طرفى علاقة التكامل لذا يمكن الحصول عليه بإحدى طريقتين أو مفهومين هما:

(1) المفهوم الأول:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{x dx}{(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln(1+x^2)]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln(1+a^2) - \ln(1+a^2)] = 0 \end{aligned}$$

## الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

والتكامل بهذه الطريقة يسمى بـ "القيمة الرئيسية لكوشى" أو "القيمة الرئيسية للتكامل بمفهوم كوشى" - Cauchy Principal Value - وهو فى هذا المثال موجود لأن قيمته تساوى 0.

وعلى ذلك لو عرفنا التوقع بالعلاقة (3. 2. 8e) على أن يأخذ التكامل بمفهوم "القيمة الرئيسية لكوشى" - فإن التوقع يكون موجود فى هذا المثال - ولكن فى الحقيقة التوقع معرف بالعلاقة (3. 2. 8e) على أن يأخذ التكامل بالمفهوم التالى وهو المفهوم العادى للتكامل:

(2) المفهوم التالى:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^b \frac{x dx}{(1+x^2)} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} [\ln(1+x^2)]_{-\infty}^b \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} [\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2)] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\ln(\infty) - \ln(\infty)]\end{aligned}$$

وهذه كمية غير محددة - إذن التوقع غير موجود. وعلى هذا فإن التوقع لا يكون موجود إلا إذا كان التكامل المعطى بالعلاقة (3. 2. 8e) موجود بالمفهوم العادى وليس بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى.

ملاحظة (3 - 2 - 1): [عندما يكون التوقع موجود (Exists) تكون قيمته عند حساب التكامل بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى (Cauchy Principal Value) هى نفس قيمته عند حساب التكامل بالطريقة العادية - وبهذا تكون النتيجة فى الجزئين (1) و(2) من المثال السابق واحدة - وبالتالي يكون من المسموح به إيجاد التوقع بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى عندما يكون موجود].

ملاحظة (3 - 2 - 2 ب): فى تعريف التوقع - سواء تعريف (3 - 2 - 1) أو (3 - 2 - 2) - اشترطنا أن يكون التكامل (أو المجموع) متقاربين تقارب مطلق - لأننا لو أخذنا التكامل بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى سنجد فى بعض التوزيعات الاحتمالية - التى من مثل نوع التوزيع الموجود فى المثال السابق - أن توقع المجموع ليس من الضرورى أن يساوى مجموع التوقعات - أى أن الخاصية (3. 2. 11) ليس من الضرورى أن تتحقق دائما - وهذا من ضمن الأسباب التى من أجلها روعى فى تعريف التوقع ضرورة تحقق الشروط (3. 2. 8d) و(3. 2. 8f) مع مراعاة أن يكون التكامل متقارباً تقارب مطلق وليس محسوباً بمفهوم القيمة الرئيسية لكوشى. وقد بين "فريشيت" "Fréchet, 1937" أن توقع مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين أحدهما مقدار ثابت ليس من الضرورى أن يساوى مجموع توقعيهما إذا اعتبرنا أن القيمة الرئيسية للتكامل بمفهوم كوشى هى التوقع

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

فى تعريف (3-2-1) أو (3-2-2). إذ قدم "فريشيت" دالة كثافة احتمال معينة لمتغير عشوائى  $X$  وبين أن  $E(|x|)$  غير موجود ولكن إذا عرفنا التوقع بأنه القيمة الرئيسية بمفهوم كوشى للتكامل المعطى بالعلاقة (3. 2. 8e) فإن التوقع يكون موجود — ثم بأخذ مقدار ثابت  $c$  كمتغير عشوائى  $X - c$  أى  $X = c$  — أثبت "فريشيت" أن توقع مجموع متغيرين عشوائيين ليس من الضروري أن يساوى مجموع توقعى المتغيرين إذا اعتبرنا أن التوقع هو القيمة الرئيسية للتكامل بمفهوم كوشى. والملاحظة التالية تلقى الضوء على هذا الموضوع.

ملاحظة (3-2-2 جـ):

(أ) لقد اشترطنا، سواء فى تعريف (3-2-1) أو تعريف (3-2-2)، أن تكون التكاملات التى نعرف بها للتوقع متقاربة تقارب مطلق — وسوف نوضح المبرر الذى وضع من أجله هذا الشرط لإظهار أهميته — وذلك بتقديم مثال مبسط كما يلى:

إذا كان  $X$  متغير عشوائى مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  — وعرفنا توقع  $X$  حسب مفهوم القيمة الرئيسية لكوشى — بدلا من اشتراط أن يكون التكامل متقاربا تقارب مطلق — أى اعتبرنا أن:

$$(3. 2. 15): E(X) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b x f(x) dx$$

إذا فعلنا ذلك سنجد أنه ليس من الضرورى أن تتحقق العلاقة:

$$E(X+c) = E(X) + c$$

لأى ثابت  $c$  وذلك كما يلى:

إذا كان  $X$  متغير عشوائى له دالة كثافة احتمال زوجية  $f(x) = f(-x)$  — سنجد باستخدام تعريف التوقع المعطى بالعلاقة (3. 2. 15) أن  $E(X)$  موجود ويساوى الصفر

ولذلك لأن  $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$  يساوى صفر لجميع قيم  $a$  حيث أن  $x f(x)$  يعتبر دالة فردية. كما أن:

$$(3. 2. 16): E(X+c) = \int_{-\infty}^{\infty} (x+c) f(x) dx$$

وبوضع  $x+c=y$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y-c) dy$$



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وبإيجاد التكامل السابق حسب مفهوم القيمة الرئيسية لكوشى نجد أن:

$$(3.2.17): E(X+c) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a y f(y-c) dy$$

وبفرض أن  $c > 0$  ثم العودة بوضع  $x = y - c$  يمكن وضع التكامل السابق في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a y f(y-c) dy &= \int_{-a-c}^{a-c} (x+c) f(x) dx = \int_{-a-c}^{a-c} x f(x) dx + c \int_{-a-c}^{a-c} f(x) dx \\ &= \int_{-a-c}^{a+c} x f(x) dx - \int_{a-c}^{a+c} x f(x) dx + c \int_{-a-c}^{a-c} f(x) dx \end{aligned}$$

وعندما  $a \rightarrow \infty$  في العلاقة السابقة نجد أن التكامل الأول في الطرف الأيمن — وهو  $E(X)$  — يساوى الصفر والتكامل الأخير يساوى الواحد الصحيح وبالتالي فإن العلاقة (3.2.17) تصبح

$$E(X+c) = 0 - \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-c}^{a+c} x f(x) dx + c$$

وبما أن  $E(X) = 0$  إذن يمكن وضع للعلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$E(X+c) = E(X) + c - \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-c}^{a+c} x f(x) dx$$

فإذا كان التكامل الموجود في العلاقة السابقة لا يساوى الصفر — كان معنى ذلك أن:

$$E(X+c) \neq E(X) + c$$

(ب) مما سبق يتضح ما يلي:

إن تعريف التوقع  $E(X)$  بالعلاقة (3.2.15) — (التي نأخذ فيها التكامل بمفهوم قيمة كوشى الرئيسية ولا نشترط أن يكون متقاربا تقاربا مطلقا) — يترتب عليه إمكانية وجود متغير عشوائى  $X$  وثابت  $c$  بحيث يكون  $E(X+c) \neq E(X) + c$  — ولكى نثبت ذلك يكفى إثبات أنه من الممكن أن نجد دالة كثافة احتمال زوجية  $f(\cdot)$  وثابت  $c > 0$  بحيث يكون:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$(3.2.18): \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{a+c} x f(x) dx \neq 0$$

وتمرين (3 - 33) (هـ) يعتبر مثال على هذه الحالة.

ملاحظة (3 - 2 - 2 د): إذا كان المتغير العشوائى له توزيع متماثل وتوقعه موجود فإن هذا التوقع يكون هو مركز التماثل - أنظر ملاحظة (3 - 5 - 3 ب) وبند (2 - 12 - 4).

ملاحظة (3 - 2 - 2 هـ): من (2.6.6b) نجد أن أى متغير عشوائى مدمج يكون توقعه مساوياً نقطة احتماله الوحيدة.

(3 - 2 - 3) الوسط الهندسى والوسط التوافقى:

#### The Geometric and the Harmonic Means:

الوسط الهندسى والوسط التوافقى من المتوسطات الشائعة التى نقدمها للطلاب فى دراسته لمبادئ الإحصاء. ولكنها نقل فى الأهمية عن الوسط الحسابى فى النظرية الإحصائية والإحصاء الرياضى وذلك لعدة اعتبارات بعضها رياضى يتعلق بصعوبة التعامل معها رياضياً وبعضها إحصائى يتعلق بأهمية الدور الذى يلعبه الوسط الحسابى (أو التوقع) فى دراسة نظرية العينات كما سيتضح فيما بعد.

فى دراستنا لمبادئ الإحصاء نعرف الوسط الهندسى لمجموعة من القيم  $x_1, \dots, x_n$  عددها  $n$  بأنه الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم - ولا يُعرف الوسط الهندسى إذا كان أحد هذه القيم صفر أو سالب. ويعرف الوسط الهندسى المحسوب من جدول تكرارى بالمعادلة (3.1.3) السابقة. وقياساً على ذلك يمكن تعريف الوسط الهندسى  $g_x$  للمتغير العشوائى  $X$  بالعلاقة التالية:

$$(3.2.19): \ln g_x = \sum_i \ln(x_i) P(x_i)$$

إذا كان  $X$  متغير عشوائى متقطع يأخذ القيم  $x_i$  بدالة احتمال  $P(x_i) = \Pr(X = x_i)$  و  $\ln g_x$  هو اللوغاريتم الطبيعي للوسط الهندسى، أو:

$$(3.2.20): \ln g_x = \int \ln(x) f(x) dx$$

إذا كان  $X$  متغير مستمر ودالة كثافة احتماله  $f(x)$ . وذلك إذا كان المتغير العشوائى  $X$  متغير موجب أى أن  $X$  لا يأخذ القيمة صفر أو أى قيمة سالبة - سواء كان  $X$  متغير مستمر أو متقطع - وبشرط أن يكون المجموع فى (3.2.19) أو التكامل فى (3.2.20) موجود كما سبق تقديم ذلك عند دراسة التوقع فى تعريف (3 - 2 - 1). وإذا

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

كأن أحد قيم المتغير  $X$  سالبة أو تساوى الصفر فلا يمكن إيجاد الوسط الهندسى وبالتالي نستخدم الوسط الحسابى أو أى متوسط آخر بدلاً منه. كذلك قيلنا على العلاقة (3. 1. 5) والتي نعرف بها الوسط التوافقى المحسوب من جدول تكرارى يمكن تعريف الوسط التوافقى  $H_x$  كما يلى:

$$(3. 2. 21): \frac{1}{H_x} = \sum_i \left( \frac{1}{x_i} \right) P(x_i) \quad \text{إذا كان } X \text{ متغير منقطع}$$

$$= \int_x \frac{1}{x} f(x) dx \quad \text{إذا كان } X \text{ متغير مستمر}$$

وذلك بشرط أن  $X \neq 0$  وأن يكون كل من المجموع والتكامل السابق موجود.

مثال (3 - 2 - 3): إذا كان  $X$  متغير عشوائى مستمر له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \quad ; a \leq X \leq b, a > 0$$

أوجد الوسط الهندسى  $g_x$  والوسط التوافقى  $H_x$  وقارنهما بالوسط الحسابى  $m$  عندما تكون  $a=2, b=4$ .

(الحل)

$$\ln g_x = \int_a^b \ln(x) \frac{dx}{(b-a)}$$

بإيجاد التكامل بالتجزء نجد أن:

$$= \frac{1}{(b-a)} [b \ln b - a \ln a - (b-a)]$$

$$\ln g_x = (b-a) \sqrt[b]{b^b a^{-a}} - 1$$

لاحظ أن  $a > 0$  وهذا يضمن أن قيم  $X$  كلها موجبة مما يمكن معه إيجاد قيمة  $g_x$  حسب التعريف فلو كانت  $a$  سالبة أو تساوى الصفر لما أمكن إيجاد  $\ln(a)$ .

كما أن الوسط التوافقى هو:

$$\frac{1}{H_x} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{1}{(b-a)} \ln(x) \Big|_a^b = \ln \left( \sqrt[b]{\frac{b}{a}} \right)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

عندما  $a = 2$ ،  $b = 4$  يكون:

$$\ln g_x = \ln \sqrt[3]{4^4 2^{-2}} - 1 = 1.079$$

$$g_x = 2.943$$

$$\frac{1}{H_x} = \ln \sqrt[3]{\frac{4}{2}} = \ln \sqrt{2} = 0.3466$$

$$\therefore H_x = 2.885$$

ومن مثال (3 - 2 - 1) (4) نجد أن

$$m = \frac{b + a}{2} = 3$$

وبمقارنة القيم الثلاثة نجد أن:

$$H_x = 2.885$$

$$g_x = 2.943$$

$$m = 3$$

$$\therefore H_x < g_x < m$$

في الواقع يمكن إثبات أن:

الوسط التوافقي  $\geq$  الوسط الهندسي  $\geq$  الوسط الحسابي

$$(3. 2. 22): H_x \leq g_x \leq m_x$$

وذلك بالنسبة لأي متغير عشوائي موجب حيث يمكن إيجاد الوسط الهندسي. ولإثبات العلاقة السابقة أنظر تمرين (3 - 26)

في الواقع يعتبر الوسط الحسابي هو أهم المتوسطات الثلاثة التي ذكرناها، لذلك عند ذكر كلمة متوسط دون تحديد نوع هذا المتوسط، يكون المقصود هو المتوسط الحسابي والذي عادة نطلق عليه لفظ التوقع أو التوقع الرياضي ونسميه أحياناً بالعزم الأول حول الصفر كما سنوضح عند دراستنا للعزوم ونرمز له بـ  $\mu$  بعدة رموز من أهمها  $\mu$  أو  $m$  أو  $\bar{x}$  إذا كان المتغير  $X$  أو  $\bar{y}$  إذا كان المتغير  $Y$  وهكذا. وإذا نظرنا للتوزيع الاحتمالي على أنه توزيع لكتلة من مادة وزنها الوحدة على القيم المختلفة للمتغير - وهو ما يعرف بالتمثيل الميكانيكي للاحتمال - يكون التوقع هو مركز الثقل (Center of Gravity) لهذه الكتلة على محور المتغير. وهذه الخاصية تضيف على التوقع أهمية كبيرة كتأثير نموذجي يمثل مركز التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

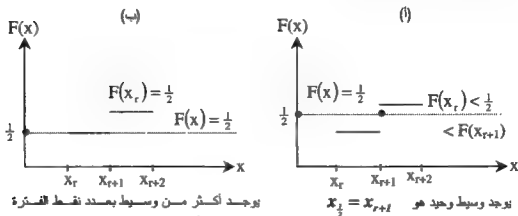
## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

### (3 - 2 - 4) الوسيط والكميات الترتيبية The Median & Quantiles :

الوسيط هو إحدى الثوابت أو القيم النموذجية التي تقيّد في تحديد خصائص الظاهرة أو المجتمع محل الدراسة. فإذا كانت  $x_0$  إحدى قيم المتغير  $X$  التي تقسم الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير  $X$  إلى قسمين متساويين كل منهما يساوى  $\frac{1}{2}$  فإن  $x_0$  تسمى "وسيط" التوزيع، وبالتالي فإن الوسيط هو قيمة  $x$  التي تحقق المعادلة:

$$(3. 2. 23): F(x) = \frac{1}{2}$$

أى أن الوسيط هو أى جذر من جذور المعادلة السابقة حيث  $F(x)$  هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى  $X$ . وجذور المعادلة السابقة يمكن الحصول عليها هندسياً من شكل الدالة  $F(x)$  برسم خط أفقى  $y = F(x) = \frac{1}{2}$  يقطع منحنى الدالة  $F(x)$  عند نقطة (أو فترة) وقيمة  $x$  عند هذه النقطة (أو قيم  $x$  فى هذه الفترة) تكون هى وسيط التوزيع. فإذا كانت  $F(x)$  دالة توزيع لمتغير منقطع كما فى شكل (2 - 6 - 1) يكون من الممكن وجود فترة مشتركة عند تقاطع الخط المستقيم  $y = F(x) = \frac{1}{2}$  مع منحنى الدالة  $F(x)$ . ففى شكل (2 - 6 - 1) لو كان الخط المستقيم  $y = F(x) = \frac{1}{2}$  يلتقى مع المنحنى عند النقطة  $x_r$  فإن كل نقطة فى الفترة  $x_r \leq x < x_{r+1}$  تعتبر وسيط للتوزيع - أى يوجد فى هذه الحالة عدد لانهاى من القيم كل منها يساوى الوسيط أو أنه يوجد أكثر من وسيط للتوزيع - لما إذا كان الخط الأفقى  $y = F(x) = \frac{1}{2}$  يقع بين الخطين  $y = F(x_r)$  و  $y = F(x_{r+1})$  ففى شكل (2 - 6 - 1) فإن التوزيع يكون له وسيط وحيد فقط Unique Median هو  $x_{\frac{1}{2}} = x_{r+\frac{1}{2}}$ . ويمكن إبراز ذلك الجزء من رسم (2 - 6 - 1) الذى يوضح ذلك فى الشكلين التاليين:



شكل (3 - 2 - 4)

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

لما إذا كان المتغير العشوائى  $X$  من النوع المستمر فإن دالة التوزيع الاحتمال  $F(x)$  تمثل منحنى مستمر غير متناقص كما فى الشكل (2- 8- 3 ب) وفى هذه الحالة توجد نقطة تقاطع وحيدة بين الخط  $y = F(x) = \frac{1}{2}$  والمنحنى  $F(x)$  هذه النقطة الوحيدة تسمى الوسيط — وهو وسيط وحيد — Unique Median للمتغير المستمر  $X$  أى أن المعادلة  $F(x) = \frac{1}{2}$  يكون لها جنر وحيد فى هذه الحالة وعلى هذا يمكن تعريف الوسيط كما يلى:

تعريف (3- 2- 4) الوسيط Median:

القيمة  $x$  التى تحقق للمتبائنت

$$(3. 2. 24): Pr(X \leq x) \geq \frac{1}{2} ; ; Pr(X \geq x) \geq \frac{1}{2}$$

تسمى "وسيط" المتغير  $X$  ونرمز لها بالرمز  $x_{\frac{1}{2}}$ .

والمتابائنتين السابقتين يمكن التعبير عنهما بمتبائنة مزدوجة واحدة هى:

$$(3. 2. 25): \frac{1}{2} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} + Pr(X = x)$$

فإذا كان المتغير  $X$  من النوع المستمر فإن  $Pr(X = x) = 0$  وبالتالي فإن المتبائنة المزدوجة السابقة تتحول إلى المعادلة (3. 2. 23) السابقة وبذلك يمكن القول أنه إذا كان المتغير  $X$  من النوع المستمر فإن الوسيط يكون هو القيمة  $x$  التى تحقق المعادلة:

$$(3. 2. 26): F(x) = \frac{1}{2}$$

والوسيط فى هذه الحالة يكون قيمة وحيدة — أى وسيط وحيد.

مثال (3- 2- 4):

أوجد الوسيط لكل من التوزيعات التالية:

$$. P(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (أ)$$

(ب) إذا كان  $X$  متغير عشوائى يمكن أن يأخذ إحدى القيمتين 0, 1 حيث

$$. Pr(X = 1) = \frac{3}{4}, Pr(X = 0) = \frac{1}{4}$$

(جـ) إذا كان  $X$  ممكن أن يأخذ القيم 0, 1, 2 حيث  $P(0) = \frac{1}{8}, P(1) = \frac{3}{8}, P(2) = \frac{1}{2}$

$$. f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} ; -\infty < x < \infty \quad (د)$$

الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$f(x) = 3x^2 ; 0 < X < 1 \quad (\text{هـ})$$

(الحل)

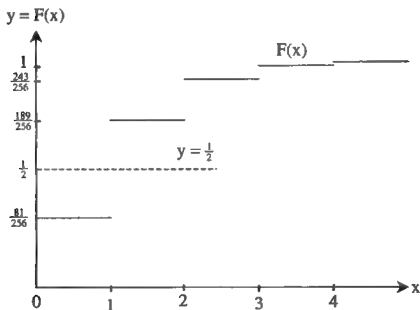
(أ)  $P(x)$  عند نقط الاحتمال 0, 1, 2, 3, 4 هي

$$P(0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{81}{256}$$

$$P(1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256}$$

$$P(2) = \frac{54}{256}, \quad P(3) = \frac{12}{256}, \quad P(4) = \frac{1}{256}$$

ويرسم دالة للتوزيع الاحتمالي  $F(x) = Pr(X \leq x)$



من الرسم نلاحظ وجود وسيط وحيد عند النقطة  $x_{\frac{1}{2}} = 1$

وكذلك باستخدام العلاقة (2. 24) نجد في الفترة  $1 \leq x < 2$  أن عندما

$$1 < x < 2$$

**الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) وانتشتت والعزوم**

$$Pr(X \leq x) = \frac{189}{256} > \frac{1}{2}$$

$$Pr(X \geq x) = 1 - Pr(X < x) = 1 - \frac{189}{256} = \frac{65}{256} < \frac{1}{2}$$

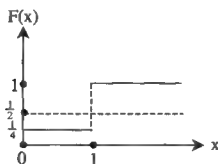
أى أن العلاقة (3. 2. 24) لا تتحقق.

ولكن عندما ( $x = 1$ ) فإن العلاقة السابقة تصبح

$$Pr(X \leq x) = \frac{189}{256} > \frac{1}{2}$$

$$Pr(X \geq x) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} > \frac{1}{2}$$

إذن العلاقة (3. 2. 24) تتحقق عند نقطة وحيدة هي الوسيط (الوحيد)  $x_{\frac{1}{2}} = 1$ .



$$Pr(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad Pr(X = 1) = \frac{3}{4} \quad (\text{ب})$$

من الرسم واضح أن هناك وسيط وحيد هو  $x_{\frac{1}{2}} = 1$ .

وباستخدام العلاقة (3. 2. 24) نجد في الفترة  $x \geq 1$  أن:

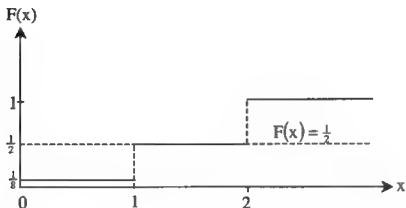
$$Pr(X \leq x) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) = 1 > \frac{1}{2}$$

$$Pr(X \geq x) = Pr(X = 1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$$



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

إن الفترة  $x \geq 1$  كلها تحقق العلاقة (3. 2. 24) ولكن  $x$  لا تزيد عن 1 إذن الوسيط يكون هو القيمة الوحيدة  $x_{\frac{1}{2}} = 1$  وباقى قيم الفترة  $x \geq 1$  لا يعتبر أى منها وسيط.



(جـ) يمكن رسم منحنى الدالة  $F(x)$  فى الشكل التالى:

من الرسم واضح أن الخط  $F(x) = \frac{1}{2}$  ينطبق على منحنى  $F(x)$  فى الفترة  $1 \leq x < 2$  إذن كل نقطة (كل قيمة) فى الفترة  $1 \leq x < 2$  تعتبر وسيط.

كما أن باستخدام العلاقة (3. 2. 24) نجد أن كل قيمة  $x$  فى الفترة  $1 \leq x < 2$  تعتبر وسيط — لأنه لكل قيمة  $x$  فى هذه الفترة نجد أن:

$$\Pr(X \leq x) = \frac{1}{2}, \quad \Pr(X \geq x) = \frac{1}{2}$$

وهذا يحقق العلاقة (3. 2. 24).

(د) الدالة  $f(x)$  دالة زوجية ومتماثلة حول الصفر وبالتالي فإن:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$  أى أن

$F(0) = \frac{1}{2}$  وبذلك يكون  $x = 0$  هو الجذر الوحيد للمعادلة  $F(x) = \frac{1}{2}$  إذن طبقا للعلاقة

(3. 2. 26) يوجد وسيط وحيد هو  $x_{\frac{1}{2}} = 0$ .

(هـ) كما فى (د) يوجد وسيط وحيد هو جذر المعادلة

$$\frac{1}{2} = F(x) = \int_0^x 3Z^2 dz = (Z^3)_0^x = x^3$$

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

إنّ الوسيط هو

$$\therefore x_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

الوسيط هو حالة خاصة من مجموعة من البارامترات تسمى "بالكميات الترتيبية" Quantiles وتعرف كما يلي:

تعريف (3-2-4) الكميات الترتيبية:

القيمة  $x$  التي تحقق المتباينات

$$(3.2.27): Pr(X \leq x) \geq P ; Pr(X \geq x) \geq 1 - p \quad (0 < P < 1)$$

تسمى "بالكمية الترتيبية" من الدرجة  $P$  ونرمز لها بالرمز  $x_p$ .

والمتباينات السابقة يمكن التعبير عنها بالمتباينة المزدوجة التالية:

$$(3.2.28): P \leq F(x) \leq P + Pr(X = x)$$

وفى حالة المتغيرات المستمرة تكون  $Pr(X = x) = 0$  وبالتالي فإن "الكمية الترتيبية" من الدرجة  $P$  تكون هي قيمة  $x$  التي تحقق المعادلة:

$$(3.2.29): F(x) = P$$

ومن الممكن طبعا في بعض الأحيان أن أكثر من قيمة  $x$  تحقق العلاقات (3.2.27) أو (3.2.28) وفى هذه الحالة كل قيمة من هذه القيم تسمى "كمية ترتيبية" من الدرجة  $P$ . كما أن  $x_{\frac{1}{4}}$  تسمى بالربيع الأدنى The Lower Quartile،  $x_{\frac{3}{4}}$  هي الوسيط،

$x_{\frac{1}{4}}$  تسمى بالربيع الأعلى The Upper Quartile كما أن الكميات  $x_{0.1}, x_{0.2}, x_{0.3}, \dots$  تسمى بالعشيرات Deciles.

مثال (3-2-4): إذا كان  $X$  متغير عشوائى له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

أوجد "الكمية الترتيبية" من الدرجة  $P = 0.4$  أى أوجد "الكمية الترتيبية"  $x_{0.4}$ .

(الحل)

من معادلة (3.2.29) تكون  $x_{0.4}$  هي قيمة  $x$  التي تحقق المعادلة  $F(x) = 0.4$  أى هي قيمة  $x$  التي تحقق المعادلة التالية:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

$$0.4 = F(x) = \int_0^x e^{-y} dy = 1 - e^{-x}$$

$$\therefore e^{-x} = 0.6$$

$$-x = \ln(0.6) = -0.512$$

إذن الكمية الترتيبية  $x_{0.4}$  هي:  $x_{0.4} = 0.512$

يتضح مما تقدم أن كل توزيع احتمالي يكون له وسيط واحد على الأقل. وفي بعض التوزيعات يوجد وسيط وحيد يمثل نقطة وحيدة محددة على محور المتغير كما في كل التوزيعات المستمرة وبعض التوزيعات المنقطعة، وفي بعض التوزيعات تكون كل نقطة في فترة معينة على محور المتغير وسيط لهذا المتغير. في حين أن التوقع لا يكون موجود دائماً إذ نجد كثير من التوزيعات الاحتمالية توقعها غير موجود. وعلى هذا فإن الوسيط يكون أفضل من التوقع في تحديد خصائص التوزيعات الاحتمالية، وحتى في الحالات التي يكون فيها التوقع موجود يكون الوسيط أفضل من التوقع أحياناً حيث أن قيمة التوقع ممكن أن تتأثر إلى حد كبير بالقيم المتطرفة (الشاذة) للمتغير والتي تكون بعيدة عن المنطقة الرئيسية لتركز قيم المتغير أي لتركيز التوزيع *The Bulk of The Distribution* ومع هذا فإن الوسط الحسابي (التوقع) يظل هو الأعظم أهمية عن غيره من المتوسطات في الإحصاء الرياضي والنظرية الإحصائية المتقدمة وذلك لبعض الخصائص التي يتميز بها في دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية وخاصة تلك المسماة بتوزيعات المعايير كما سيتضح ذلك فيما بعد.

#### (3 - 2 - 5) المنوال *The Mode*:

سبق أن عرفنا المنوال في دراستنا لمبادئ الإحصاء بأنه القيمة الأكثر تكراراً - أو القيمة الأكثر شيوعاً - وسنعرف المنوال الآن بالنسبة للتوزيعات الاحتمالية في النوعين الأكثر أهمية وهما النوع المستمر والنوع المنقطع. فإذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير مستمر  $X$  فإن أي نقطة  $x_0$  تجعل دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  نهاية عظمى تسمى "منوال" التوزيع، وإذا كانت الدالة  $f(x)$  لها قمة واحدة يكون التوزيع له منوال وحيد - ويسمى توزيع وحيد القمة أو وحيد المنوال *Unimodal Distribution*، أما إذا كانت  $f(x)$  لها قمتين كان التوزيع له منوالين ويسمى *Bimodal Distribution*، وإذا كانت  $f(x)$  لها عدة قسم كان التوزيع متعدد القمم *Multimodal Distribution*. فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  دالة مستمرة وتفاضلية فإن القيمة  $x$  التي تحقق العلاقات التالية:

$$(3.2.30): \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

تسمى "منوال" التوزيع. وطبعاً من الممكن أن توجد أكثر من قيمة  $x$  تحقق العلاقة المابقة فيوجد أكثر من منوال. أما إذا كانت  $\frac{df(x)}{dx}$  تساوى الصفر ولكن

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \quad \text{فإن قيمة } x \text{ التي تحقق هذه العلاقة تجعل الدالة } f(x) \text{ نهاية صغرى ومثل}$$

هذه النقط نطلق عليها لفظ "المنوال المعكوس" Anti mode. أما بالنسبة للتوزيعات التي من النوع المتقطع فيمكن ترتيب نقط الاحتمال (أي قيم المتغير)  $x_i$  ترتيباً تصاعدياً — بالنظر إلى قيمة كل منها — والنقطة  $x_i$  التي تحقق العلاقة التالية:

$$(3.2.31): P_i > P_{i-1} \quad , \quad P_i > P_{i+1}$$

تسمى منوال التوزيع، وعلى ذلك فإن التوزيع المتقطع يمكن أيضاً أن يكون وحيد المنوال أو ثنائي المنوال أو متعدد المنوال. أما إذا كانت كل قيم  $x_i$  لها نفس الاحتمال — أي باحتمالات متساوية — فإنه لا يوجد في هذه الحالة منوال للتوزيع، حتى في التوزيعات المستمرة إذا كانت دالة كثافة الاحتمال ثابتة بالنسبة لجميع قيم المتغير فإنه لا يوجد منوال. وفي التوزيعات التي يتم تحديدها عددياً — مثل التوزيعات التكرارية — لا يمكن تحديد قيمة مضبوطة Exact للمنوال وإنما تتحدد قيمته بطريقة تقريبية — وهذه من أهم الصعوبات التي تواجهنا عند استخدام المنوال.

ملاحظة (3-2-5) أ:

(1) في التوزيعات المتماثلة يكون المتوسط (إذا كان موجود) والوسيط متساويين — فإذا كان التوزيع المتماثل وحيد المنوال (سواء منوال عادي أو منوال معكوس) فإن:

$$\text{المتوسط} = \text{الوسيط} = \text{المنوال}$$

وإذا كان التوزيع وحيد المنوال ومتماثل حول نقطة ما  $X = a$  حيث  $F(a+x) = 1 - F(a-x) + \Pr(X=x)$  كما في (2-12-4) فـإن: المتوسط = الوسيط = المنوال =  $a$ . أما إذا كان التوزيع متماثل ومتعدد المنوال سنجد أن الوسيط = الوسيط ولكنهما قد يختلفان عن أي منوال للدالة — فنظر تمرين (3-4).

(2) وفي التوزيعات الملتوية غير المتماثلة تكون قيم المتوسطات الثلاثة مختلفة، ولكن توجد علاقة تجريبية استنبطها كارل بيرسون K. Pearson من التوزيعات المختلفة لبعض المتغيرات المستمرة — إذ لاحظ في حالة التوزيعات الملتوية القريبة إلى حد ما من التماثل أن الوسيط يقع في  $\frac{1}{3}$  المسافة من الوسيط الحسابي إلى المنوال ويكون أقرب إلى الوسيط الحسابي أي أن:

$$(\text{الوسيط الحسابي} - \text{المنوال}) \text{ يساوي تقريباً } 3 (\text{الوسيط الحسابي} - \text{الوسيط})$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

ويمكن التعبير عن ذلك رمزياً كما يلي:

$$(3.2.32): m - x_0 \approx 3(m - x_{\frac{1}{2}})$$

حيث  $m$  هو الوسط الحسابي و  $x_{\frac{1}{2}}$  الوسيط و  $x_0$  المنوال. وتمرين (6 - 21)

يعطى توزيع احتمالي خاص تتحقق بالنسبة له العلاقة التقريبية (3.2.32).

(3) ويوجد مقياس آخر من مقاييس الموضع وإن كان قليل الاستعمال إلا أن له بعض الاستخدامات في نظرية المعاينة (التي سنقدمها فيما بعد) كما أنه سهل الحساب، هذا المقياس هو "منتصف المدى" Mid-range، وهو قيمة المتغير  $X$  التي تقع في المنتصف تماماً بين أصغر قيمة وأكبر قيمة للمتغير، وهي بذلك تعتمد على القيمتين الطرفيتين للمتغير وهاتين القيمتين كثيراً ما تكون إحداهما أو كلاهما تساوي  $\pm \infty$  وهذا هو السبب في أن هذا المقياس غير مناسب لقياس الموضع في كثير من التوزيعات التي لها قيم غير محدودة.

مثال (3 - 2 - 4 جـ): أوجد المنوال لكل من التوزيعات التالية:

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x = 1, 2, 3, \dots \quad (أ)$$

$$f(x) = 12x^2(1-x); 0 < x < 1 \quad (ب)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}; 0 < x < \infty \quad (جـ)$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(n, m)} x^{n-1} (1-x)^{m-1} \quad 0 \leq x \leq 1, n > 0, m > 0 \quad (د)$$

(الحل)

(أ) تكون نهاية عظمى عندما  $x = 1$  حيث أن  $P(1)$  أكبر احتمال وبالتالي يكون المنوال هو  $x_0 = 1$ .

(ب) بوضع:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$12(2x - 3x^2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad \text{or} \quad x = \frac{2}{3}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضوع) والتشتت والعزوم

ولكن عندما  $x = 0$  تكون  $f(x) = 0$  وعندما  $x = \frac{2}{3}$  تكون  $f(x) = \frac{16}{9}$  إذن  $f(x)$  تكون نهاية عظمى عندما  $x = \frac{2}{3}$  وبالتالي فإن المنوال هو:  $x_0 = \frac{2}{3}$ .

(جـ)

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$xe^{-x}(2-x) = 0$$

إذن  $x = 0$  أو  $x = 2$  أو  $x = \infty$  ولكن عندما  $x = 0$  أو  $x = \infty$  تكون  $f(x) = 0$  وعندما  $x = 2$  تكون  $f(x) = 2e^{-2} > 0$  إذن  $f(x)$  تكون نهاية عظمى عندما  $x = 2$  ويكون المنوال:  $x_0 = 2$ .

(د) ضبع:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{x^{n-2}(1-x)^{m-2}}{\beta(n,m)} [(n-1)(1-x) - (m-1)x] = 0$$

المقدار السابق في الطرف الأيسر يساوى للصفر عندما  $x = 0$  أو  $x = 1$  بشرط أن تكون  $(n > 2, m > 2)$  — كذلك يساوى الصفر عندما  $x = \frac{n-1}{n+m-2}$  أى عندما  $0 < x < 1$  ولكن الحالة التى فيها  $x = 0$  أو  $x = 1$  تكون  $f(x) = 0$  أى نهاية صغرى — إذن الدالة  $f(x)$  تكون نهاية عظمى عندما:

$$x = \frac{n-1}{n+m-2}, n > 1, n+m > 2$$

وهذه هي قيمة المنوال للدالة  $f(x)$ .

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

#### (3 - 3) مقاييس التشتت للمتغير العشوائى المفرد:

#### Measures of Dispersion for One-dimensional r.v.:

ذكرنا فى بداية بىذ (3 - 1) أن أى ظاهرة أو مجتمع إحصائى يمكن دراسته وتحديد خصائصه عن طريق تحديد مجموعة من الثوابت أو القيم النموذجية تسمى بارامترات المجتمع. وبعد معرفتنا لقيمة نموذجية (أو لثابت من ثوابت المجتمع) فإننا غالباً نهتم بحساب بارامتر آخر يوضح مدى انتشار أو تركيز قيم المتغير حول هذه القيمة النموذجية. والبارامتر الذى من هذا النوع يسمى مقياس للانتشار أو التشتت Measure of Dispersion وأحياناً يسمى مقياس التركيز Measure of Concentration. والتركيز هو عكس التشتت، فكلما زاد التركيز قل التشتت والعكس صحيح. فإذا كان البارامتر الذى لدينا هو المتوسط  $\mu$ ، فإن متوسط مربعات انحرافات قيم أى متغير عن متوسطه  $\mu$  يستخدم كمقياس لدرجة تشتت (أو تركيز) هذا المتغير عن متوسطه، ويسمى هذا المقياس "بالتباين" "Variance"، وهو الذى نلقبه فى البند التالى.

#### (3 - 3 - 1) التباين والانحراف المعيارى :

#### The Variance & The Standard Deviation:

إذا كان  $X$  متغير عشوائى توقعه موجود ويساوى  $\mu$  فإن تباين  $X$  باعتباره متوسط (أو توقع) مربعات انحرافات قيم  $X$  عن متوسطها  $\mu$  - يساوى  $E(X - \mu)^2$  - يمكن الحصول عليه من العلاقة (3. 2. 7) السابقة بوضع  $g(x) = (x - \mu)^2$  حيث نحصل على توقع مربعات انحرافات  $X$  عن متوسطها. وحيث أن تباين  $X$  هو متوسط مربعات انحرافات قيم  $X$  عن متوسطها إذا فإن وحدات قياس التباين هى مربعات وحدات قياس  $X$  فإذا كانت قيم  $X$  محسوبة بالسنتيمتر فإن تباين  $X$  بحسب بالسنتيمتر المربع. وعلى هذا يمكن تعريف التباين كما يلى:

#### تعريف (3 - 3 - 1) التباين The Variance:

"متوسط مربعات انحرافات المتغير العشوائى  $X$  عن توقعه  $\mu$  يسمى "بالتباين" وعادة نرمز له بالرمز  $\mu_2$  أو  $\sigma^2$  أو  $D^2(X)$  أو  $V(X)$  ويعطى بالعلاقة التالية:

$$(3. 3. 1a): V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

إذا كان  $X$  متغير مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  أو

$$(3. 3. 1b): V(X) = \sum_x (x_i - \mu)^2 P_i$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

إذا كان  $X$  متغير منقطع و  $P_i = Pr(X = x_i)$  هي دالة احتمال  $X$ .

وكما يتضح من التعريف السابق - أن التباين مقياس لتشتت المتغير العشوائي حول توقعه - وعلى ذلك فكلما زاد تركيز قيم المتغير العشوائي حول توقعه كلما كان تباينه صغيراً.

ملاحظة (3 - 3 - 1): التباين يعرف أيضاً بالعزم الثاني حول التوقع أو حول المركز أو العزم المركزي الثاني كما سيتضح عند دراسة العزوم في البند (3 - 5).

لكل متغير عشوائي تباينه موجود - نجد من معادلات (3. 2. 10) أن:

$$(3. 3. 2): V(X) = E(X - \mu)^2 = E[X^2 - 2\mu E(X) + \mu^2] \\ = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

كذلك من معادلة (3. 2. 10b) - إذا كانت  $b, c$  أى مقداران ثابتان فإن:

$$(3. 3. 3): V[aX + b] = E[(aX + b)^2] - [E(aX + b)]^2 \\ = a^2 E(X^2) - a^2 E^2(X) = a^2 V(X)$$

إن من العلاقة السابقة عندما  $a = 1$  نجد أن:

$$(3. 3. 4): V(X + b) = V(X)$$

وإذا كان  $X, Y$  متغيران مستقلان فيُتضح من العلاقة (3. 2. 14) أن:

$$(3. 3. 5): V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

وذلك لأن:

$$V(X + Y) = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 \\ = E[X^2 + Y^2 + 2XY] - [E^2(X) + E^2(Y) + 2E(XY)] \\ \text{ومن الاستقلال} \\ = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X)E(Y) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) \\ = [E(X^2) - E^2(X)] + [E(Y^2) - E^2(Y)] = V(X) + V(Y)$$



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

ويمكن تعميم العلاقة (3. 3. 5) إلى حالة  $n$  من المتغيرات المستقلة فإذا كان  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات مستقلة عددها  $n$  و  $a_1, \dots, a_n$  مقادير ثابتة فإن:

$$(3. 3. 6): V(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1^2 V(X_1) + \dots + a_n^2 V(X_n)$$

مثال (3 - 3 - 1): أوجد تباين التوزيع التالي:

$$P_i = \Pr(X = i) = \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

— وهو التوزيع المسمى بتوزيع ذو الحدين بمعلمتين  $n, p$ . وإذا كان  $X$  متغير له توزيع ذو حدين بمعلمتين  $2, \frac{1}{2}$  و  $Y$  متغير آخر له توزيع ذو حدين بمعلمتين  $3, \frac{1}{3}$  فقارن بين تشتت كل من المتغيرين.

(الحل)

$$E(X) = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i} = np[P + (1-P)]^{n-1} = nP$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i}$$

$$i^2 = i(i-1) + i \text{ بوضع}$$

$$\begin{aligned} &= n(n-1)P^2 \sum_{i=2}^n \binom{n-2}{i-2} P^{i-2} (1-P)^{n-i} \\ &+ nP \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} P^{i-1} (1-P)^{n-i} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = n(n-1)P^2 + nP$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= n(n-1)P^2 + nP - n^2P^2 = nP(1-P)$$

نلاحظ أن المتغيران  $X, Y$  لهما نفس التوقع حيث

$$E(X) = nP = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$E(Y) = nP = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

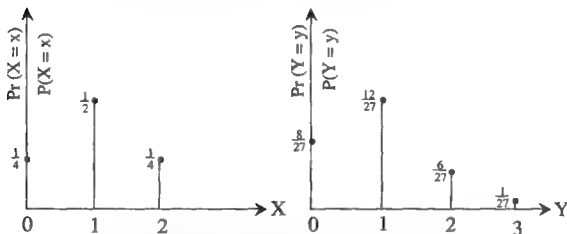
### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

ولكنهما مختلفان في التباين حيث

$$V(X) = nP(1-P) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V(Y) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

إن تباين  $X$  أقل من تباين  $Y$  وهذا يدل على أن قيم  $X$  (حول توقعها) أكثر تركيزاً من قيم  $Y$  (حول توقعها) ويمكن رسم دالتي احتمال  $X$ ،  $Y$  ومن الرسم يمكن ملاحظة درجة التركيز - حيث نجد أن قيم  $X$  أكثر تركيزاً - أي أقل تشتتاً.



من الشكلين السابقين نرى أن التشتت حول التوقع للمتغير العشوائي  $X$  أقل من تشتت المتغير  $Y$  - إذ واضح أن قيم  $Y$  أكثر انتشاراً حول توقعها من قيم  $X$  - وهذا يوضح أهمية التباين كمقياس للتشتت.

مثال (3 - 3 - 2): أوجد تباين المتغير  $X$  ذي التوزيع المسمى بتوزيع بيتا بمعلمتين  $n, m$  حيث دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\beta(n, m)} X^{n-1} (1-X)^{m-1} ; 0 \leq X \leq 1 ; n > 0, m > 0$$

### الفصل الثالث - مقاييس للنزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(الحل)

$$E(X) = \frac{1}{\beta(n, m)} \int_0^1 x \cdot x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx = \frac{\beta(n+1, m)}{\beta(n, m)} = \frac{n}{n+m}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta(n, m)} \int_0^1 x^2 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx$$

$$= \frac{1}{\beta(n, m)} \beta(n+2, m) = \frac{(n+1)n}{(n+m+1)(n+m)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{nm}{(n+m+1)(n+m)^2}$$

ملاحظة (3-3-1 ب): من (2. 6. 6b) نجد أن تباين أى متغير عشوائى مدمج يساوى الصفر.

تعريف (3-3-1 ب) الانحراف المعياري Standard Deviation:

الجذر الموجب للتباين يسمى بـ "الانحراف المعياري".

وعادة نرمز للانحراف المعياري بالرمز  $\sigma$  أو  $\sqrt{\mu_2}$  أو  $\sqrt{V(X)}$  أو  $\sqrt{D^2(X)}$  وذلك إذا رمزنا للتباين بالرمز  $\sigma^2$  أو  $\mu_2$  أو  $V(X)$  أو  $D^2(X)$  على الترتيب. والانحراف المعياري للمتغير  $X$  له نفس وحدات قياس  $X$  وذلك لأنه الجذر التربيعي (الموجب) للتباين ومادام التباين يقاس بمربع وحدات قياس  $X$  فإن جذر التباين يكون له نفس وحدات قياس  $X$ . وكثيراً ما نحتاج إلى قياس متغير معين بوحدات من انحرافه المعيارى - فإذا كان  $X$  متغير عشوائى توقعه  $\mu$  وانحرافه المعيارى  $\sigma$  - فإننا كثيراً ما نحتاج إلى إيجاد المتغير  $\frac{X-\mu}{\sigma}$  الذى يسمى بالمتغير القياسى وهو يمثل انحراف المتغير  $X$  عن متوسطه  $\mu$  مقيماً بوحدات من انحرافه المعيارى  $\sigma$ .

تعريف (3-3-1 جـ): إذا كان  $X$  متغير عشوائى توقعه  $\mu$  وانحرافه

المعيارى  $\sigma$ ، فإن المتغير العشوائى  $Y$  المعروف بالعلاقة:  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$  يسمى بالمتغير

القياسى Standardized r. v. حيث

$$E(Y) = 0$$

$$V(Y) = 1$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

التباين يتميز بالخاصية الهامة التالية: لأي قيمة ثابتة  $c \neq E(X)$ :

$$(3.3.7a): V(X) < E[(X - c)^2]$$

ويمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كما يلي:

$$(3.3.7b): E[(X - c)^2] = E[(X - \mu + \mu - c)^2]$$

حيث  $\mu = E(X)$

$$= E[(X - \mu)^2] + (\mu - c)^2 = V(X) + (\mu - c)^2$$

وحيث أن  $(\mu - c)^2 > 0$  عندما  $\mu \neq c$  إذن العلاقة (3.3.7) صحيحة.

والتوقع  $E[(X - c)^2]$  يسمى بـ "الانحراف التربيعي المتوسط" The Mean Quadratic Deviation or The Mean Square Deviation للمتغير العشوائي  $X$  عن النقطة  $c$ ، وعلى ذلك يكون التباين هو الانحراف التربيعي المتوسط عن النقطة  $\mu = E(X)$ ، فإذا كان توقع المتغير  $X$  يساوى الصفر ( $\mu = 0$ ) فإن  $V(X) = E(X^2)$  يكون هو الانحراف التربيعي للمتغير  $X$  عن النقطة  $\mu = 0$  أي أن  $E(X^2)$  يقيس تشتت المتغير  $X$  عن النقطة  $\mu = 0$  وكلما كان  $E(X^2)$  صغيراً كلما كانت قيم  $X$  متركزة حول الصفر والتوقع  $E(X^2)$  يسمى بـ "الوسيط التربيعي" "The Mean Square" وعلى هذا فإن "الوسيط التربيعي" لأي متغير عشوائي يعتبر مقياس لانحرافات هذا المتغير عن الصفر. وعموماً، الانحراف التربيعي المتوسط  $E[(X - c)^2]$  هو أساس مبدأ المربعات الصغرى Principal of Least Squares الذى سنتعرض له فيما بعد - حيث أن الانحراف التربيعي المتوسط  $E[(X - c)^2]$  يقيس درجة تركيز قيم  $X$  حول النقطة  $X = c$  وكلما كان الانحراف التربيعي المتوسط صغيراً كلما كان التركيز كبيراً.

(3 - 2) الانحراف المتوسط The Mean Deviation:

الانحراف المتوسط مقياس آخر من مقاييس التشتت بالإضافة إلى التباين والانحراف المعياري، ويعرف الانحراف المتوسط بالصيغة التالية:

$$(3.3.8a): \delta(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| f(x) dx .$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(إذا كان  $X$  متغير مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  وتوقعه  $\mu$ )

$$(3.3.8b): \quad = \sum |x - \mu| P(x).$$

(إذا كان  $X$  متغير منقطع دالة كثافة احتماله  $P(x)$  وتوقعه  $\mu$ )

والانحراف المتوسط  $\delta(\mu)$  يسمى بالانحراف المتوسط حول المتوسط  $\mu$ ، كما يسمى أحياناً "بالانحراف المتوسط" اختصاراً للتعبير — ومن العلاقاتين (3.3.8a)، (3.3.8b) نرى أن الانحراف المتوسط للمتغير  $X$  حول توقعه  $\mu$  هو  $E(|X - \mu|)$ . ويمكن إيجاد الانحراف المتوسط حول الوسيط  $x_{\frac{1}{2}}$  بإيجاد التوقع  $E(|X - x_{\frac{1}{2}}|)$  كذلك الانحراف المتوسط حول المنوال  $x_0$  يكون  $E(|X - x_0|)$ ، وهكذا يكون الانحراف المتوسط حول النقطة  $x = c$  هو  $E(|X - c|)$  — حيث  $c$  يمكن أن تكون الوسيط الحسابي أو الهندسي أو المتوسط أو الوسيط أو المنوال أو أي قيمة أخرى. وتوجد خاصية هامة من خصائص الانحراف المتوسط يمكن تقديمها كما يلي:

يمكن إثبات أن  $E(|X - c|)$  تحقق العلاقة التالية:

$$(3.3.9): \quad E(|X - c|) = \begin{cases} E(|X - x_{\frac{1}{2}}|) + 2 \int_{x_{\frac{1}{2}}}^c (c - x) f(x) dx & \text{عندما } c > x_{\frac{1}{2}} \\ E(|X - x_{\frac{1}{2}}|) + 2 \int_c^{x_{\frac{1}{2}}} (x - c) f(x) dx & \text{عندما } c < x_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

وذلك إذا كان  $X$  متغير مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  ووسيطه  $X = x_{\frac{1}{2}}$ ، كما يمكن إثبات نفس العلاقة السابقة إذا كان  $X$  متغير من النوع المنقطع، والعلاقة السابقة توضح الخاصية التالية التي يتميز بها  $E(|X - c|)$  وهي:

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

المتوقع  $E(|X - c|)$  يكون نهاية صغرى عندما تكون  $c$  مساوية للوسيط  $x_j$ . وهذا واضح من العلاقة السابقة إذ نجد أن  $E(|X - c|)$  في الطرف الأيسر مساويا للتوقع  $E(|X - x_j|)$  في الطرف الأيمن مضافا إليه كمية موجبة، ولإثبات العلاقة السابقة لنظر تمرين (3 - 18) ومادام  $E(|X - c|)$  يكون نهاية صغرى عندما تكون  $c$  هي الوسيط، إذن لو استخدمنا الوسيط كمقياس للموضع فيكون من الطبيعي أن نستخدم الانحراف المتوسط كمقياس للتشتت. كذلك مادام  $E[(X - c)^2]$  يكون أقل ما يمكن عندما  $c$  تساوى التوقع كما يتضح من العلاقة (3. 3. 7b) إذن عند استخدام التوقع كمقياس للموضع يكون من الطبيعي استخدام التباين كمقياس للتشتت.

ملاحظة (3 - 3 - 2): إذا كان المتغير  $X$  محدود - أى يوجد عددين حقيقيين  $a, b$  ( $a < b$ ) حيث  $a < X < b$  و  $F(x) = 0$  لجميع قيم  $x \leq a$  و  $F(a + \varepsilon) > 0$  لجميع قيم  $\varepsilon > 0$  مهما كانت  $\varepsilon$  صغيرة كما أن  $F(x) = 1$  لجميع قيم  $x \geq b$  و  $F(b - \varepsilon) < 1$  حيث  $F(x)$  هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $X$  - إذن للفترة  $a \leq X \leq b$  تحتوى على كل توزيع المتغير  $X$  كما أن طول هذه الفترة ( $b - a$ ) يسمى بـ "المدى" Range، وأحيانا يستخدم المدى كمقياس من مقاييس التشتت. والفترة  $a \leq X \leq b$  تعطى أحيانا فكرة جيدة عن موضع وتشتت التوزيع. لذلك إذا كانت هذه الفترة لانهائية - أى أحد أو كلا طرفيها يساوى مالا نهائية - فيمكن فى بعض الأحيان استخدام الفترة  $\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$  أو  $x_1 \leq X \leq x_2$  لإعطاء فكرة مبسطة (وأحيانا جيدة) عن توزيع المتغير  $X$  والكمية  $\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$  تسمى تصف المدى الربيعى "Semi - interquartile range" وأحيانا تستخدم كمقياس للتشتت.

بقى أن ننوه أن الانحراف المتوسط عند التعامل معه رياضيا تواجهنا أحيانا بعض الصعوبات الناتجة عن التعامل مع القيمة المرجبة  $|x - \mu|$  لذلك يمكن تقديم العلاقة التالية للانحراف المتوسط  $\delta(\mu)$  التى لا تعتمد على القيمة الموجبة وهى:

$$(3. 3. 10): \delta(\mu) = 2 \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) dF(x) = -2 \int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) dF(x)$$

حيث  $F(x)$  هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $X$  و  $\mu = E(X)$ ، ولإثبات العلاقة السابقة لنظر تمرين (3 - 27).

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

#### (3-3-3) الفرق المتوسط The Mean Difference:

الفرق المتوسط أحد مقاييس التشتت قدمه "جيني" عام 1912 — (Gini, 1912).  
وسمى بهذا الاسم تمييزاً له عن الانحراف المتوسط ونرمز له بالرمز  $\Delta$  ويعرف بالعلاقة التالية:

$$(3.3.11): \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - x'| f(x) f(x') dx dx'$$

إذا كان المتغير العشوائي من النوع المستمر.

أما إذا كان المتغير من النوع المتقطع فإن الفرق المتوسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$(3.3.12): \Delta = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |x_i - x_j| P_i P_j \quad ; \quad i \neq j$$

ملاحظة (3-3-3): يمكن حساب الفرق المتوسط من الجدول التكرارى كما يلى:

إذا كانت مراكز الفئات عددها  $m$  ولنرمز لها بالحروف  $x_1, x_2, \dots, x_m$

والتكرارات المقابلة لها  $r_1, \dots, r_m$  حيث  $\sum_{i=1}^m r_i = n$  فلو كونا الجدول التكرارى

المتجمع الصاعد وكانت تكراراته المتجمعة هي  $R_1, \dots, R_m$  — حيث  $R_i = \sum_{j=1}^i r_j$  هو

التكرار المتجمع المقابل لمركز الفئة  $x_i$  —  $(r_i = R_i < R_2 < \dots < R_m = n)$  — إذن

إذا استخدمنا العلاقة (3.3.12) السابقة مع كثافة الدالة التجريبية  $P_n^*(x_i) = \frac{r_i}{n}$

(المعطاة بالعلاقة (2.22.2) والتي تحسب من الجدول التكرارى) بدلاً من دالة الاحتمال  $P_i$  — يمكن بعد إجراء بعض العمليات الحسابية أن نضع العلاقة (3.3.12) فى الصورة التالية التى تصلح لحساب الفرق المتوسط من الجدول التكرارى:

$$(3.3.13a): \Delta = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{m-1} R_i (n - R_i) (x_{i+1} - x_i)$$

فإذا كانت الفئات متساوية وطول كل منها  $c$   $(x_{i+1} - x_i) = c$  إذن:

$$(3.3.13b): \Delta = \frac{2c}{n^2} \sum_{i=1}^{m-1} R_i (n - R_i)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

ملاحظة (3-3-3 ب): فى حالة المتغير المستمر فى (3.3.11) - يجب مراعاة أن الدالة  $f(x)$  هى نفسها الدالة  $f(x')$  لذلك استخدمنا رمز واحد للدلالة على هذه الدالة هو  $f(.)$  ولكن  $x$  و  $x'$  يمثلان قيمتان مختلفتان من قيم المتغير  $X$ . والفرق المتوسط يعطى متوسط الانحرافات المطلقة بين قيم المتغير بعضها البعض وليس الانحرافات عن قيمة مركزية، وهذا مما يجعل له قيمة نظرية، كما أن الفرق المتوسط يمكن أن يكون موجود فى بعض الحالات التى لا يوجد فيها التباين وذلك لأن التكامل أو المجموع عند حساب  $\Delta$  قد يكون تقاربى لاعتماده على  $|x - x'|$  وهى خطية (من الدرجة الأولى) فى حين أن التباين يعتمد على  $(x - \mu)^2$  وهو مقدار درجة ثانية، وعلى أى حال إذا كان التوقع موجود يكون الفرق المتوسط موجود كذلك.

ولكن من ناحية أخرى يودى ظهور علامة القيمة الموجبة فى الفرق المتوسط إلى صعوبة التعامل معه رياضياً - مثل الانحراف المتوسط تماماً - لذلك نقدم مقياس آخر للتشتت يعتمد على مربعات انحرافات القيم عن بعضها البعض بدلاً من الانحرافات المطلقة. والمقياس الذى نقدمه يسمى "متوسط الفرق المربع" وهو كما ذكرنا يعتمد على مربعات انحرافات القيم عن بعضها البعض دون استخدام علامة القيمة الموجبة. فإذا رمزنا له بالرمز  $\theta^2$  فإننا نعرفه بالعلاقة التالية:

$$(3.3.13): \theta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x')^2 f(x) f(x') dx dx'$$

إذا كان المتغير مستمراً

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x_i - x_j)^2 P_i P_j ; (i \neq j)$$

إذا كان المتغير متقطعاً.

ويمكن إثبات أن "متوسط الفرق المربع"  $\theta^2$  لأى متغير عشوائى  $X$  يساوى ضعف تباين المتغير - أى أن:

$$(3.3.14): \theta^2 = 2V(X)$$

وذلك لأن من العلاقة (3.3.13) نجد أن:

$$\theta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xx' + x'^2) f(x) f(x') dx dx'$$



### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وبكتابة  $y$  بدلا من  $x'$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy \\
 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X^2) = V(X) + V(X) = 2V(X)
 \end{aligned}$$

والعلاقة (3. 3. 14) توضح أن التباين يمكن تعريفه بأنه نصف "متوسط الفرق المربع  $\theta^2$ " وبالتالي يمكن حسابه من العلاقة (3. 3. 13) التي تعتمد على انحرافات قيم المتغير عن بعضها ولا تعتمد على انحرافات قيم المتغير عن قيمة مركزية مثل التوقع كما في العلاقة (3. 13. 1). ولما كان تقديم المعامل  $\theta^2$  الهدف منه هو التغلب على الصعوبات التي تواجهنا في حساب الفرق المتوسط  $\Delta$  المتمثلة في وجود القيمة الموجبة إلا أن هذا التعديل أو التحسين أوصلنا إلى التباين  $\sigma^2$  فذلك يؤكد أن ميزان التفضيل بين الفرق المتوسط  $\Delta$  والانحراف المعياري  $\sigma$  مازال في صالح  $\sigma$ ، وبذلك يظل الانحراف المعياري أفضل من الفرق المتوسط كمقياس للتشتت. كما يجب ملاحظة أن "متوسط الفرق المربع  $\theta^2$ " لا يساوي "مربع الفرق المتوسط  $\Delta^2$ " - أي أن  $\theta^2 \neq \Delta^2$ . وإذا كان تقديم "متوسط الفرق المربع  $\theta^2$ " يعتبر محاولة للتغلب على الصعوبة المتمثلة في وجود القيمة الموجبة في "الفرق المتوسط  $\Delta$ "، إلا أن هذا أوصلنا إلى معامل جديد هو في الواقع ضعف التباين، أي أننا بذلك تخلينا نهائيا عن  $\Delta$ . ولكن في الواقع يمكن إيجاد صورة أخرى غير السابقة لحساب  $\Delta$  تعتمد على دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير. فإذا كان  $X$  متغير عشوائي من النوع المستمر دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  وله توقع موجود، فإن الفرق المتوسط  $\Delta$  يكون موجودا كذلك. ويمكن إثبات أننا نستطيع الحصول عليه من العلاقة التالية بدلا من العلاقة (3. 3. 11) التي تعتمد على القيمة الموجبة:

$$(3. 3. 15): \Delta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \{1 - F(x)\} dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} x \{F(x) - \frac{1}{2}\} dF(x)$$

أنظر تمرين (3 - 23).

من العرض السابق لمقاييس الموضع (أو المركز) ومقاييس التشتت وجننا أكثر من مقياس للموضع وكذلك أكثر من مقياس للتشتت والسبب في وجود أكثر من مقياس للخاصية الواحدة التي نرغب في قياسها يرجع إلى الغموض الذي يكتف تعريفنا أو مفهومنا للخاصية ذاتها. ولو كانت الخاصية محددة تحديدا لا يكتفه الغموض لكان من

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

الطبيعى أن يكون هناك مقياس وحيد لقياسها. فمثلا المركز أو الموضع خاصية من خصائص التوزيع لو كان المقصود بها هو مركز الثقل حسب المفهوم الميكانيكى للتوزيع على أنه كتلة من مادة وزنها وحدة الوزن لكان مركز الثقل له مقياس واحد لقياسه هو التوقع (الوسط الحسابى). ولكن لعدم تحديد المركز على هذه الصورة فإننا نستخدم لقياسه مقاييس أخرى مثل الوسط الهندسى والوسط التوافقى. كذلك التشتت هل المقصود به تشتت القيم عن بعضها أو تشتت القيم عن قيمة مركزية وما هي هذه القيمة المركزية كل هذا كان سببا في وجود أكثر من مقياس للتشتت. وفي الحقيقة كل مقياس من هذه المقاييس له مميزاته وعيوبه وقد يكون مقياس ما أجود بكثير من غيره في حالة معينة ولكنه في حالة أخرى يكون أقل جودة من غيره. لذلك فإننى لا أرى فائدة كبيرة من محاولة حصر مميزات وعيوب كل مقياس. ومع ذلك فإن كل مقاييس التشتت السابقة تشترك في عيب معين وهى أنها تقيس التشتت بنفس وحدات قياس المتغير، فلو كان المتغير  $X$  يمثل التوزيع العسرى لمجموعة من الأشخاص فإن الانحراف المعياري مثلا يكون تمييزه بالسنوات ولو كان المتغير  $Y$  يمثل أطوال نفس المجموعة من الأشخاص يكون الانحراف المعياري محسوباً بالمستقيمترات، وبالتالي فإننا إذا رغينا في مقارنة تشتت المتغير  $X$  بتشتت المتغير  $Y$  فإن ذلك لا يكون ممكناً باستعمال الانحراف المعياري (أو حتى أى مقياس آخر سابق) وذلك لاختلاف التمييز لوحدات كل من المقياسين، فلا يمكن مقارنة مستقيمترات بسنوات. لذلك كان لابد من تقديم مقياس آخر للتشتت لا يعتمد على وحدات قياس المتغير وإنما يكون في شكل وحدات مطلقة لا تمييز لها، هذا المقياس نسميه معامل الاختلاف ونقدم له أكثر من صيغة في البند التالى.

#### (3 - 3 - 4) معامل الاختلاف Coefficient of Variation:

ذكرنا أن مقاييس التشتت التى عرضناها لها نفس تمييز قيم المتغير، لذلك عند المقارنة بين تشتت مجتمعين لا تصلح مقاييس التشتت السابقة إلا إذا كان المجتمعان لهما نفس التمييز عند قياس قيم كل منهما. لذلك لابد من البحث عن مقياس للتشتت يكون مستحراً من التمييز فى شكل وحدات مطلقة لاستخدامه لمقارنة التشتت في حالة المجتمعات المختلفة التمييز. هذا المقياس هو ما نسميه بـ "معامل الاختلاف" وسنرمز له بالرمز  $V$ . وفى الواقع توجد أكثر من صيغة يمكن استخدامها لهذا الغرض ومن هذه الصيغ ما يلى:

#### (1) معامل اختلاف كارل بيرسون Karl Pearson's Coefficient of Variation:

وهو معرف بالعلاقة التالية:

$$(3.3.16): V = \frac{\sigma}{\mu}$$

أى يساوى الانحراف المعياري مقسوماً على المتوسط  $\mu$ ، وهو أكثر معاملات الاختلاف استخداماً في التطبيق. ثم يليه فى الأهمية للمعامل التالى المعروف باسم:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(2) معامل التركيز لجيني Gini's Coefficient of Concentration:

وهو معرف بالعلاقة التالية:

$$(3.3.17): G = \frac{\Delta}{2\mu}$$

أى يساوى الفرق المتوسط  $\Delta$  مقسوماً على ضعف المتوسط  $(2\mu)$ .  
ويمكن إثبات أن:

$$(3.3.18): 0 \leq G \leq 1$$

أنظر تمرين (3 - 60). كما يوجد صيغ أخرى لمعامل الاختلاف لكنها قليلة الاستخدام منها ما يلى:

$$(3.3.19): \begin{cases} (a) \quad V = \frac{\delta(\mu)}{\mu} \\ (b) \quad V = \frac{\delta(x_{\frac{1}{2}})}{x_{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

الصيغة الأولى (a) هى الانحراف المتوسط حول الوسط  $\mu$  مقسوماً على الوسط  $\mu$ ،  
والصيغة الثانية (b) هى الانحراف المتوسط حول الوسيط  $x_{\frac{1}{2}}$  مقسوم على الوسيط  $x_{\frac{1}{2}}$ .

ملاحظة (3 - 3 - 4أ):

ذكرنا أن معامل اختلاف بيرسون هو  $V = \frac{\sigma}{\mu}$  كما فى العلاقة (3.3.16) فإذا

كان التوقع  $\mu = I$  فإن معامل اختلاف بيرسون يكون هو نفسه الانحراف المعياري  $\sigma$ ، ومعنى هذا أن معامل الاختلاف يكون مقياس من مقاييس التشتت إذا كان المتغير يقاس بوحدات من توقعه.

مثال (3 - 3 - 4أ): فى التوزيع المنتظم التالى:

$$f(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

أوجد:

(أ) الانحراف المتوسط حول الوسط الحسابي  $\delta(\mu)$ .

الانحراف المتوسط حول الوسيط  $\delta(x_{\frac{1}{2}})$ .

الانحراف المتوسط حول المنوال  $\delta(x_0)$ .

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(ب) التباين  $\sigma^2$  والانحراف المعياري  $\sigma$ .

(ج) الفرق المتوسط  $\Delta$  ومتوسط الفرق للمربع  $\theta^2$ .

(د) معامل الاختلاف لبيرسون.

(هـ) معامل التركيز لجيني.

(الحل)

$$\mu = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \text{ التوقع (ا)}$$

والوسيط هو حل المعادلة

$$\frac{1}{2} = F(x) = \int_0^x dx = x$$

إذن الوسيط هو  $x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

وهذا التوزيع لا يوجد له منوال لأنه ليس له قمة. وحيث أن التوقع يساوي الوسيط إذن الانحراف المتوسط حول التوقع  $\delta(\mu)$  هو نفسه الانحراف المتوسط حول الوسيط  $\delta(x_{\frac{1}{2}})$ . ومن علاقة (3. 3. 8) نجد أن:

$$\delta(\mu) = \int_0^1 |x - \frac{1}{2}| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{4}$$

(ب) التباين  $\sigma^2$ :

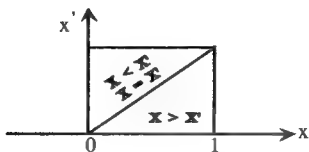
$$\sigma^2 = E(x - \mu)^2 = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12}$$

الانحراف المعياري  $\sigma$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.2887$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

(جـ) الفرق المتوسط  $\Delta$  [من علاقة (3. 3. 11)]



$$\Delta = \int_0^1 \int_0^1 |x - x'| dx dx'$$

$$\Delta = \int_0^1 \left\{ \int_{x'=0}^x (x - x') dx' + \int_{x'=x}^1 (x' - x) dx' \right\} dx = \frac{1}{3}$$

كما يمكن إيجاد الفرق المتوسط  $\Delta$  باستخدام علاقة (3. 3. 15) حيث نجد أن:

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= x \quad ; 0 \leq x \leq 1 \\ &= 1 \quad ; x \geq 1 \\ &= 0 \quad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta = 2 \int_0^1 x(1 - x) dx = \frac{1}{3}$$

كذلك:

$$\Delta = 4 \int_0^1 x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3}$$

أما متوسط الفرق المربع  $\theta^2$  فهو كما ذكرنا قبل ذلك في العلاقة (3. 3. 14) مساوٍ ضعف التباين، فلا داعي لحسابه باستخدام الصيغة (3. 3. 13) وإنما نحسبه باستخدام التباين:

$$\therefore \theta^2 = 2\sigma^2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(د) من علاقة (3. 3. 16) نجد أن معامل الاختلاف لكارل بيرسون هو:

$$V = 0.5774$$

(هـ) من علاقة (3. 3. 17) نجد أن معامل التركيز لجيني هو:

$$G = \frac{\Delta}{2\mu} = \frac{1}{3}$$

سبق أن ذكرنا بعض العلاقات التي تربط بين بعض مقاييس الموضع مثل العلاقة (3. 2. 22) التي تربط بين الوسط الحسابي  $\mu$  والوسط الهندسي  $g_x$  والوسط التوافقي  $H_x$  وتصل على أن  $\mu \leq g_x \leq H_x$  وكذلك العلاقة (3. 2. 32) التي توضح أن: الوسط الحسابي (التوقع) مطروحا منه المنوال  $\sim 3$  (الوسط الحسابي - الوسيط)، كما يمكن إيجاد بعض العلاقات التي تربط بين بعض مقاييس التشتت، فيمكن إثبات أن:

الانحراف المتوسط حول الوسط الحسابي  $\delta(\mu)$  أقل من أو يساوي الانحراف المعياري  $\sigma$ :

$$(3. 3. 20): \delta(\mu) \leq \sigma$$

والفرق المتوسط  $\Delta$  أقل من أو يساوي  $\sigma\sqrt{2}$

$$(3. 3. 21): \Delta \leq \sqrt{2} \sigma$$

نظر تمرين (3 - 20).

ولما كان المتوسط  $\mu$  هو أهم مقاييس الموضع على الإطلاق والتباين  $\sigma^2$  أهم مقاييس التشتت وذلك من وجهة نظر الإحصاء الرياضي على الأقل لأهميتهما المتعاطمة في دراسة توزيعات المعاينة (كما سنرى فيما بعد عند دراسة توزيعات المعاينة) لذا كان من المفيد البحث عن أى علاقات بين  $\mu$  و  $\sigma^2$ ، ولكن في الواقع لا توجد علاقات محددة تربط بين  $\mu$  و  $\sigma^2$ ، إذ أن المتوسط  $\mu$  ليس من الضروري أن يكون أكبر من أو يساوي  $\sigma^2$  كما أنه ليس من الضروري أن يكون أقل من أو يساوي  $\sigma^2$ . ولكن في توزيعات معينة نجد أن  $\mu \geq \sigma^2$  وفي توزيعات أخرى نجد أن  $\mu \leq \sigma^2$  وفي توزيعات غيرها نجد أن  $\mu$  يمكن أن تكون أكبر من  $\sigma^2$  أو تساويها أو تكون أقل منها (وذلك لقيم مختلفة للبارامتر الذي يعتمد عليه التوزيع). فمثلا في التوزيع ذو الحدين كما في مثال (3 - 3) نجد أن:

$$\mu = np \quad \sigma^2 = npq$$

(n عدد صحيح موجب،  $0 < p < 1$ ،  $q = 1 - p$ )

إذن  $\mu > \sigma^2$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وفى التوزيع اليوسونى كما فى مثال (3 - 2 - 2) نجد أن  $\mu = \lambda$  ويمكن إثبات أن التباين  $\sigma^2 = \lambda$  أى أن  $\mu = \sigma^2$  فى التوزيع اليوسونى. وفى توزيع جاما فى نفس المثال (3 - 2 - 2) نجد أن  $\mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$  ويمكن إثبات أن التباين  $\sigma^2 = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}$  إذن: ( $\alpha > 0, n > 0$ )

$\mu < \sigma^2$  عندما  $0 < \alpha < 1$  و  $\mu = \sigma^2$  عندما  $\alpha = 1$  و  $\mu > \sigma^2$  عندما  $\alpha > 1$ .

مما سبق يتضح عدم وجود نمط محدد فى العلاقة بين  $\mu$  و  $\sigma^2$ .

### (3 - 4) متباينة "تشيبينشيف" Chebychev's Inequality:

لقد قدم تشيبينشيف (1867) — متباينة هامة يمكن بها أن نحدد الاحتمال المنشتر فى "نيلي" أى توزيع احتمالى بطريقة تقريبية، وهذه المتباينة تبرز بوضوح أهمية الدور الذى يلعبه الانحراف المعيارى كمقياس للتشتت، وهى تأخذ الصيغة التالية:

إذا كان  $X$  متغير عشوائى توقعه  $\mu$  وتباينه موجود (Exist) ويساوى  $0 < \sigma^2$  فإن:

$$(3.4.1): Pr(|X - \mu| \geq \lambda \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

حيث  $\lambda$  أى ثابت موجب.

ويمكن الحصول على متباينة تشيبينشيف كنتيجة للنظرية التالية:

نظرية (3 - 4):

إذا كان  $Y$  متغير عشوائى غير سالب (أى يأخذ قيم غير سالبة فقط) وتوقعه  $E(Y)$  موجود و  $k$  أى ثابت موجب فإن:

$$(3.4.2): Pr(Y \geq k) \leq \frac{E(Y)}{k}$$

(الإثبات)

سوف نثبت هذه النظرية فى حالة المتغير المستمر علماً بأن الإثبات فى حالة المتغير المتقطع يتم بأسلوب مشابه مع استبدال علامات التكامل بعلامات المجموع.

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y f(y) dy = \int_0^k y f(y) dy + \int_k^{\infty} y f(y) dy$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$E(Y) \geq \int_k^{\infty} y f(y) dy \geq k \int_k^{\infty} f(y) dy \text{ و } \int_0^k y f(y) dy \geq 0 \text{ إذن } k \geq 0, y \geq 0$$

وبما أن:

$$\int_k^{\infty} f(y) dy = \Pr(Y \geq k)$$

إذن:

$$E(Y) \geq k \Pr(Y \geq k)$$

وهذا يثبت صحة المتباينة (3. 4. 2).

هـ. ط. ث.

وإذا فرضنا أن  $X$  متغير عشوائى توقعه  $E(X) = \mu$  وانحرافه المعياري  $\sigma$  و  $Y$  متغير عشوائى آخر حيث:  $Y = (X - \mu)^2$  فإن المتغير  $Y$  يحقق فروض نظرية (3 - 4) السابقة حيث أن  $Y \geq 0$  و  $E(Y)$  موجود  $E(Y) = E(X - \mu)^2 = \sigma^2$  فإذا وضعنا الثابت  $k = \lambda^2 \sigma^2$  فإننا نحصل من العلاقة (3. 4. 2) على المتباينة التالية:

$$(3. 4. 3): \Pr[(X - \mu)^2 \geq \lambda^2 \sigma^2] \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

والمتباينة السابقة مكافئة تماماً للمتباينة (3. 4. 1) وهذا يثبت صحة متباينة تشيبيشيف.

والمتباينة (3. 4. 2) تظل صحيحة حتى إذا استبدلنا المتغير المفرد  $Y$  بالمتغير المشترك المتعدد  $(Y_1, \dots, Y_n)$  لـ  $n$  من المتغيرات العشوائية ويمكن إثبات ذلك بنفس طريقة الإثبات السابقة المستخدمة في حالة المتغير المفرد.

فى الواقع متباينة (3. 4. 1) أول من اكتشفها هو "بنيامى" Bienaymé (1853) ثم اكتشفها بعد ذلك بطريقة مستقلة تشيبيشيف (1867) لذلك تسمى أحياناً "بمتباينة بنيامى - تشيبيشيف" "Bienaymé - Chebychev's Inequality".

فإذا كان  $X$  متغير عشوائى تباينه (موجود) ويساوى  $\sigma^2$  وتوقعه  $\mu$  فإن "متباينة تشيبيشيف" توضح أن مقدار الاحتمال فى توزيع المتغير  $X$  الذى يوجد خارج للفترة  $\mu - \lambda\sigma \leq X \leq \mu + \lambda\sigma$  يساوى على أكثر تقدير  $\frac{1}{\lambda^2}$  وهذا يعطى فكرة جيدة عن كيفية استخدام الانحراف المعياري كمقياس للتشتت مما يوضح أهمية الدور الذى يلعبه الانحراف المعياري كمقياس للتشتت. فزى مثلاً من متباينة (3. 4. 1) فى التوزيعات ذات



### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

التباين المحدود أن مقدار الاحتمال المنتشر خارج الفترة  $\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$  لا يمكن أن يزيد عن  $\frac{1}{9}$ ، وفي بعض التوزيعات قد يكون الاحتمال المضبوط خارج هذه الفترة يساوى الصفر، وفي هذه الحالة يكون الفرق بين الحد الأعلى الذى تقدمه متباينة تشيبيشيف وبين مقدار الاحتمال المضبوط المنتشر خارج الفترة  $\mu \pm 3\sigma$  يساوى  $\frac{1}{9}$ ، وبالتالي يثار التساؤل السالى: هل يمكن تحسين الحد الأعلى الذى تقدمه متباينة تشيبيشيف حتى يكون أكثر قرباً إلى الاحتمال المضبوط فى الفترة  $|X - \mu| \geq \lambda\sigma$  وذلك لجميع قيم  $\lambda > 0$  ولجميع المتغيرات العشوائية ذات التباين المحدود؟ أو بمعنى آخر هل يمكن إيجاد متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف لجميع قيم  $\lambda > 0$  لجميع المتغيرات العشوائية ذات التباين المحدود؟ سنحاول الآن مناقشة ذلك من خلال الأمثلة التالية.

مثال (3-4 أ): إذا كان  $X$  متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{4} \quad ; \quad -2 < x < 2$$

فإن:

$$E(X) = 0 \quad , \quad V(X) = \frac{4}{3} \quad , \quad \sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

وعندما  $\lambda = \frac{3}{2}$ :

$$\begin{aligned} \Pr(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) &= \Pr(|X| \geq \sqrt{3}) \\ &= 1 - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{4} dx = 1 - \frac{1}{4}(2\sqrt{3}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 \end{aligned}$$

إن 0.134 هو الاحتمال المضبوط لتحقيق المتباينة  $|X - \mu| \geq \lambda\sigma$  عندما  $\mu = 0$  و  $\lambda = \frac{3}{2}$  و  $\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}$  ولكن من متباينة تشيبيشيف (3.4.1) نجد أن الحد الأعلى للاحتمال السابق هو  $\left(\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4}{9}\right) \approx 0.444$  وهذا يوضح أن الاحتمال المضبوط فى هذه الحالة يقل عن الحد الأعلى الذى تقدمه المتباينة (3.4.1) بمقدار 0.31 تقريباً وهذا الفرق يعتبر كبيراً نسبياً، إذ أن الحد الأعلى أكثر من ثلاثة أمثال الاحتمال المضبوط، وإذا أخذنا  $\lambda = \sqrt{3}$  سنجد أن الاحتمال المضبوط هو  $\Pr(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) = \Pr(|X| \geq 2) = 0$  فى حين أن الحد الأعلى  $\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  الذى تقدمه متباينة تشيبيشيف يساوى  $\frac{1}{4}$  والفرق فى هذه الحالة أيضاً كبير نسبياً.

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

فى المثال السابق وجدنا اختلافاً كبيراً نسبياً بين الاحتمال المضبوط  $\Pr(|X - \mu| \geq \lambda\sigma)$  والحد الأعلى الذى تقدمه متباينة (3. 4. 1) والسؤال الآن هل يمكن الحصول على متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف؟ لجميع قيم  $\lambda > 0$  وجميع المتغيرات العشوائية محدودة التباين، أو بمعنى آخر هل يمكن تحسين الحد الأعلى لمتباينة تشيبيشيف؟ فى الواقع المثال التالى يوضح أنه لا يمكن إيجاد متباينة تصلح لجميع قيم  $\lambda > 0$  ولجميع المتغيرات العشوائية ذات التباين المحدود أفضل من متباينة تشيبيشيف بدون وضع فروض (أو قيود) على توزيع المتغير العشوائى خلاف فرض أن يكون التباين محدود.

مثال (3 - 4 ب): إذا كان المتغير العشوائى  $X$  من النوع المتقطع وبأخذ القيم

$$x = -2, 0, 2 \text{ باحتمالات } \frac{1}{8}, \frac{6}{8}, \frac{1}{8} \text{ على الترتيب منجد أن:}$$

$$\mu = E(X) = 0, \quad \sigma = 1$$

فإذا كانت  $\lambda = 2$  فإن:

$$\begin{aligned} \Pr(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) &= \Pr(|X| \geq 2) \\ &= \Pr(X = -2 \text{ or } X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

وهذا هو الاحتمال المضبوط، ومن متباينة (3. 4. 1) نجد أن الحد الأعلى لمتباينة تشيبيشيف عندما  $\lambda = 2$  يساوى  $\frac{1}{4}$  وهو نفس قيمة الاحتمال المضبوط فى هذه الحالة، وبالتالي فإننا لا يمكن أن نحصل على متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف فى هذه الحالة حيث أن حدها الأعلى هو نفسه الاحتمال المضبوط.

وعموماً فى مجموعة خاصة من المتغيرات العشوائية المنقطعة التى تتميز بأن تباينها محدود إذا كان تباين المتغير يساوى  $\sigma^2$  ونقطه  $\mu$  ونقط احتمال المتغير هى:  $X = \mu - \lambda\sigma, \mu, \mu + \lambda\sigma$  — أى ثلاث نقط فقط — باحتمالات  $\frac{1}{2\lambda^2}, \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right), \frac{1}{2\lambda^2}$  على الترتيب فإن:

$$\Pr(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) = \frac{1}{\lambda^2}$$

وهذا يوضح أنه لا يمكن فى هذه الحالة الحصول على متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف، والحد الأعلى الذى تقدمه المتباينة فى هذه الحالة  $\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  يصلح لتحديد الاحتمالات (ولكن هذا ليس صحيحاً فى جميع التوزيعات بصفة عامة) والمثال السابق

### الفصل الثالث - مقاييس للتزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

يعتبر حالة خاصة من التوزيعات التي يمكن الحصول بالنسبة لها على حد أعلى لمتباينة تشيبيشيف" يساوى الاحتمال المضبوط وذلك عندما  $\lambda = 2$ .

وقد ظهر بعد متباينة تشيبيشيف" عدد كبير من المتباينات من نفس النوع، نذكر فيما يلي أشهر هذه المتباينات، فمنها على سبيل المثال تلك المتباينة التي قدمها كارل بيرسون (1919) K. Pearson والتي توضح أنه بالنسبة لأي متغير عشوائي  $X$  توقعه  $\mu$  يكون:

$$(3.4.4): \Pr(|X - \mu| \geq k V_r^{1/r}) \leq \frac{1}{k^r}$$

حيث  $V_r = E(|X - \mu|^r)$ ، وذلك إذا كان  $V_r$  موجود حسب تعريف (3-2-1) عندما  $g(x) = |X - \mu|^r$  والمتباينة السابقة يمكن الحصول عليها من متباينة (3.4.2) عندما نضع:

$$Y = |X - \mu|^r ; K = k^r V_r$$

ومتباينة تشيبيشيف" (3.4.1) تعتبر حالة خاصة من متباينة بيرسون (3.4.4) عندما  $r = 2$  والتقدير الذي نفترضه لصحة المتباينة (3.4.4) هو أن يكون  $E(|X - \mu|^r)$  محدود.

والمتباينات السابقة جميعها لا يمكن تحسين حدها الأعلى ليكون أكثر اقتراباً من الاحتمال المضبوط في التوزيعات الاحتمالية بصفة عامة إلا إذا فرضنا مزيداً من القيود على التوزيع الاحتمالي، فمثلاً قدم "جاوس" (1821) Gauss متباينة في حالة المتغير العشوائي المستمر وحيد المنوال محدود التباين أفضل من متباينة تشيبيشيف" وهي تأخذ الصورة التالية:

$$(3.4.5): \Pr(|X - x_0| \geq k V) \leq \frac{4}{9k^2}$$

لجميع قيم  $k > 0$  حيث  $x_0$  هو منوال المتغير  $X$  و:

$$V^2 = E(X - x_0)^2 = V(X) + [x_0 - E(X)]^2$$

ومن متباينة (3.4.5) يمكن الحصول على المتباينة التالية للانحراف عن المتوسط  $\mu$ :

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والانحراف

$$(3.4.6): \Pr(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{1+u^2}{(\lambda - |u|)^2}$$

لجميع قيم  $|u| > \lambda$  حيث  $u = \frac{\mu - x_0}{\sigma}$ ،  $x_0$  و  $\sigma$  هما المنوال والانحراف المعياري للمتغير  $X$ .

والمتباينة (3.4.6) أفضل من متباينة تشيبيشيف (3.4.1) حيث أن الحد الأعلى للمتباينة (3.4.6) أقل عادة من الحد الأعلى للمتباينة (3.4.1)، فعلى سبيل المثال إذا كانت  $|u| = 0.3$  فإن احتمال أن يزيد الانحراف عن المتوسط  $\mu$  عن  $3\sigma$  باستخدام المتباينة (3.4.6) يكون 0.06645 بينما هذا الاحتمال باستخدام متباينة تشيبيشيف (3.4.1) يساوى 0.11111، أما إذا حسبنا احتمال الانحراف عن  $4\sigma$  سيكون الاحتمالين المقابلين هما 0.03539 باستخدام (3.4.6) و 0.0625 باستخدام (3.4.1) — والمتباينة التي قدمها "جاسوس" (1821) — افترض للوصول إليها أن التباين محدود وأن التوزيع وحيد المنوال، فهي بذلك تعتمد على نفس الفرض الذي تتطلبه متباينة تشيبيشيف (وهو أن يكون التباين محدود) بالإضافة إلى فرض إضافي هو أن يكون التوزيع وحيد المنوال، وهذا يوصلنا إلى متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف. وعموماً لا يمكن الحصول على متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف بدون فرض المزيد من القيود على توزيع المتغير العشوائي أكثر من مجرد افتراض أن يكون التباين محدود وعموماً في التوزيعات التي يكون فيها  $E|X - \mu|^r$  موجود عندما  $r > 2$  يمكن الحصول على متباينة أفضل من متباينة تشيبيشيف ولمعرفة المزيد من هذه المتباينات يمكن الرجوع إلى "جودون" (1955)، (1964)، (Godwin, H.J.).

كما قدم "بيرج" (1957) "Berge" المتباينة التالية في حالة المتغير الثنائي المشترك  $(X_1, X_2)$ : لأي متغيرين عشوائيين  $X_1, X_2$  حيث  $V(X_1) = \sigma_1^2$  و  $V(X_2) = \sigma_2^2$  ومعامل الارتباط بينهما  $\rho$  يمكن إثبات أن:

$$(3.4.7): \Pr(|X_1 - E(X_1)| \geq \lambda\sigma_1 \text{ or } |X_2 - E(X_2)| \geq \lambda\sigma_2) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\lambda^2}$$

ثم قام "ولكن" و"برات" (1958) "I. Olkin, J.W. Pratt" بتعميم المتباينة السابقة إلى حالة  $n > 2$  من المتغيرات العشوائية المشتركة  $(X_1, \dots, X_n)$ .

## الفصل الثالث - مقاييس للنزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

### (3-5) العزوم (للمتغير المفرد) (Moments (For One - dimensional r.v.)

يعتبر المتوقع والتباين حالتان خاصتان من مجموعة أكبر من الثوابت أو البارامترات Parameters تسمى بالعزوم — التي سبق الإشارة إليها في ملاحظة (3-2-1) كحالة خاصة من تعريف (3-2-1) — وتلعب العزوم دوراً هاماً في التطبيقات الإحصائية. وتستخدم العزوم في توصيف التوزيعات الاحتمالية وقياس خصائصها، وفي بعض الأحيان وتحت شروط معينة تفيد في تحديد التوزيعات الاحتمالية. والعزوم ليست هي الثوابت الوحيدة التي تحقق هذه الأغراض وإنما توجد مجموعة أخرى من الثوابت (أو البارامترات) مفيدة في هذا المجال تسمى بالمتراكمات والتي سوف نقدمها فيما بعد. ويمكن تعريف العزوم كحالة خاصة من تعريف (3-2-1) كما يلي:

#### (3-5-1) العزوم العادية Ordinary Moments

تعريف (3-5-1 أ) العزم الرائي أو العزم ذو الدرجة  $r$  The  $r^{\text{th}}$  moment

إذا كانت الدالة  $g(X) = X^r$  دالة تكاملية (أي تكاملها محدود) في المدى  $(-\infty \leq X \leq \infty)$  بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  حيث  $r$  عدد صحيح موجب فإنه — طبقاً لتعريف (3-2-1) — يعرف المتوقع:

$$(3.5.1): \mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF(x)$$

بأنه "العزم العادي من الدرجة  $r$ " أو "العزم الرائي حول الصفر" للمتغير  $X$  أو للدالة  $F(x)$  أو العزم الرائي حول الصفر للتوزيع.

والتكامل السابق هو تكامل "ستيلتج" بالنسبة للدالة  $F(x)$  وهو يتحول إلى مجموع إذا كان المتغير  $X$  من النوع المنقطع أنظر.

ونقول أن العزم الرائي محدود أو موجود (Exists) طالما كانت الدالة  $X^r$  تكاملية في المدى  $-\infty \leq X \leq \infty$  بالنسبة للتوزيع  $F(x)$ ، والدالة  $X^r$  تكون تكاملية بالنسبة للتوزيع  $F(x)$  إذا تحققت العلاقة (3.2.6) عندما  $g(x) = x^r$  — (ويمكن نظرياً توسيع التعريف السابق باعتبار أن  $r$  عدد مقيس غير سالب وليس مجرد عدد صحيح موجب) — فإذا كان التوزيع من النوع المنقطع فإن العزم الرائي  $\mu'_r$  للمتغير العشوائي  $X$  يعرف بأنه:

$$(3.5.1a): \mu'_r = \sum_i x_i^r P(x_i)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

وذلك إذا تحققت العلاقة

$$(3.5.1b): \sum_i |x_i|^r P(x_i) < \infty$$

حيث  $P(x_i)$  هي دالة احتمال  $X$ .

أما إذا كان التوزيع من النوع المستمر فإن العزم الرأى للمتغير العشوائى  $X$  يعرف بأنه:

$$(3.5.2a): \mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

إذا تحققت العلاقة

$$(3.5.2b): \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f(x) dx < \infty$$

حيث  $f(x)$  هي دالة كثافة احتمال  $X$ .

وفى كلا النوعين لا يعتبر  $\mu'_r$  موجود إلا إذا تحققت العلاقة (3.5.1b) أو (3.5.2b). ونرمز للعزم العادى بوضع شرطة أعلى الرمز  $\mu$  لتمييزه له عن العزم المركزى الذى سنتقدمه فيما بعد. والعزم الرأى  $\mu'_r$  يسمى أيضاً بالعزم الرأى حول الصفر كما سنوضح فيما بعد لتمييزه عن العزم الرأى حول المركز والذى نرمز له عادة بالرمز  $\mu$  بدون إضافة الشرطة. والعزم الرأى له نفس وحدات قياس المتغير مرفوعة للقوة  $r$ . والتوقع هو العزم الأول حول الصفر  $\mu'_1$  عندما  $r = 1$ . كما أن العزم  $\mu'_0$  (من الدرجة للصفر) دائماً موجود ويساوى الواحد الصحيح حيث أن:

$$(3.5.3): \mu'_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$

ويمكن باستخدام تكامل "ستيليج" تقديم صيغة أخرى غير العلاقة (3.5.1) للحصول على العزم الرأى  $\mu'_r$  عندما يكون هذا العزم موجود وذلك لأى متغير عشوائى  $X$  بدلالة دالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$  فى الشكل التالى:

$$(3.5.4): \mu'_r = r \left\{ \int_0^{\infty} x^{r-1} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 x^{r-1} F(x) dx \right\}$$

انظر تمرين (3 - 47).

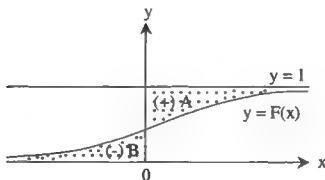
### الفصل الثالث - مقاييس للنزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

ومن العلاقة السابقة يمكن للحصول على صيغة أخرى للتوقع بدلا من العلاقة (3. 2. 8c) أو العلاقة (3. 2. 8e) وذلك عندما نضع  $r = 1$  في العلاقة (3. 5. 4) فيكون التوقع

$$(3. 5. 5): E(X) = \mu'_r = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx$$

ومن الصيغة السابقة يمكن تمثيل التوقع هندسياً، حيث يتضح من هذه الصيغة أن التوقع يمكن تمثيله هندسياً من منحنى دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  إذ أنه يساوى المساحة المحصورة بين المحور الرأسى  $x = 0$  والخط المستقيم  $y = 1$  والمنحنى  $y = F(x)$  فى الفترة  $(0 \leq x \leq \infty)$  مطروحاً منها المساحة المحصورة بين المحور الأفقى  $y = 0$  والمنحنى  $y = F(x) = F(x)$  والمحور الرأسى  $x = 0$  فى الفترة  $(-\infty \leq x \leq 0)$  كما يتضح من الشكل التالى:

شكل (3 - 5 - 1)



التوقع  $E(X)$  يساوى مساحة المنطقة المظلة A مطروحاً منها مساحة المنطقة المظلة B. ويجب أن ننبه للقارئ أننا لن نستخدم الصيغة (3. 5. 4) للحصول على  $\mu'_r$  إلا إذا كان  $\mu'_r$  موجود، ولنفس السبب لن نستخدم الصيغة (3. 5. 5) للحصول على التوقع إلا إذا كان التوقع موجود، حيث أن إثبات أى من هاتين الصيغتين يعتمد على أن العزم المشار إليه موجود.

بقى أن نشير إلى ملاحظة بسيطة بالنسبة للعزوم العادية، هى أننا نشير إليها بالرمز  $\mu'_r$  حيث نضع الشرط تمييزاً لها عن العزوم المركزية، ولكن بالنسبة للتوقع سنرمز له عادة بالرمز  $\mu$  دون كتابة الدليل 1 أسفل الحرف  $\mu$  ودون وضع شرطة أعلى هذا الحرف وذلك لعدم وجود أى خلط بين العزم الأول حول الصفر وهو التوقع والعزم الأول حول المركز والذي سنثبت فيما بعد أنه يساوى للصفر، وبذلك يكون الرمز المستخدم للتوقع رمز بسيط وسهل فى الكتابة وهذا يتناسب مع كثرة استخدامنا لدليل التوقع، كما أننا سنرمز له أحياناً أخرى بالرمز m.

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

#### (3-5-2) العزوم المطلقة The Absolute Moments:

إذا كان العزم الرائي  $\mu'_r$  موجود فإن الدالة  $g(x) = |x|^r$  تكون تكاملية في المدى  $-\infty \leq x \leq \infty$  بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  طبقاً لتعريف (3-5-1) وبالتالي فإن التوقع:

$$(3.5.6): \nu'_r = E(|X|^r) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x)$$

يعرف بأنه "العزم المطلق من الدرجة  $r$ " أو العزم الرائي المطلق "The  $r^{\text{th}}$  Absolute Moment" حيث  $|x|^r$  هي القيمة الموجبة لـ  $x$ .

وعلى هذا إذا كان  $X$  متغير عشوائي من النوع المنقطع ودالة احتماله  $P(x_i)$  عند نقطة الاحتمال  $x_i$  فإن العزم الرائي المطلق:

$$(3.5.6): \nu'_r = E(|X|^r) = \sum_i |x_i|^r P(x_i)$$

وإذا كان  $X$  متغير عشوائي من النوع المستمر ودالة كثافة احتماله  $f(x)$  فإن:

$$(3.5.7): \nu'_r = E(|X|^r) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f(x) dx$$

والعزم المطلق  $\nu'_r$  يكون هو نفس العزم العادي  $\mu'_r$  إذا كانت  $r$  عدد زوجي. وكما يتضح من العلاقتين (3.5.1b) و (3.5.2b) إذا كان العزم العادي  $\mu'_r$  موجود فإن العزم المطلق  $\nu'_r$  يكون موجود أيضاً، وبصفة عامة إذا كان  $\mu'_r$  موجود فيمكن إثبات أن جميع العزوم العادية والمطلقة من الدرجة  $k$  تكون جميعها موجودة لجميع قيم  $0 \leq k \leq r$  كما يتضح ذلك من النظرية التالية:

نظرية (3-5-2أ):

إذا كان العزم الرائي  $\mu'_r$  موجود فإن كل العزوم العادية والمطلقة من الدرجة  $k$  تكون موجودة لجميع قيم  $0 \leq k \leq r$ .

(الإثبات)

لجميع قيم  $0 \leq k \leq r$  نجد أن:

$$|x|^k < |x|^r + 1$$



### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

إذن:

$$v'_k = E(|X|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x)$$

$$\therefore v'_k < \int_{-\infty}^{\infty} [1 + |x|^r] dF(x) < 1 + \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x) = 1 + v'_r$$

وحيث أن  $v'_r$  موجود (لأن  $\mu'_r$  موجود) إذن  $v'_k$  موجود لجميع قيم  $0 \leq k \leq r$ .  
هـ. ط. ث.

ملاحظة (3-5-2): هذه الملاحظة مكونة من جزئين هما:

(1) نقدم فيما يلي شرط كافي لوجود أي عزم من الدرجة  $0 < k$  في الصيغة التالية:

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير العشوائي  $X$  تحقق الشروط التالية لأي عدد صحيح  $0 < k$ :

$$(3.5.8): \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r F(x) < c \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r [1 - F(x)] < c \end{cases}$$

حيث  $c$  مقدار ثابت - فإن أي عزم من الدرجة  $k$  يكون موجود لجميع قيم  $r > k$ .  
(الإثبات)

ولإثبات ذلك يكفي إثبات أنه في حالة تحقق العلاقات (3.5.8) يكون تكامل  $|x|^k$  بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  في أي فترة محدودة ( $a \leq x \leq b$ ) أقل من ثابت معين  $c$  مثلاً لا يعتمد على  $a$  أو  $b$  وذلك كما يلي:

في أي فترة  $2^{j-1} \leq x \leq 2^j$  حيث  $j$  عدد صحيح موجب نرض أن:

$$\begin{aligned} (a) \quad I_j(2) &= \int_{2^{j-1}}^{2^j} |x|^k dF(x) \leq 2^{jk} \int_{2^{j-1}}^{2^j} dF(x) \\ &= 2^{kj} [F(2^j) - F(2^{j-1})] \leq 2^{kj} [1 - F(2^{j-1})] \end{aligned}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وبفرض صحة العلاقة (3. 5. 8) فإنه يوجد ثابت محدود  $c$  حيث يكون:

$$(2^{j-1})^r [1 - F(2^{j-1})] < c$$

$$\therefore [1 - F(2^{j-1})] < 2^{r-j} c$$

من العلاقة السابقة والعلاقة (a) نجد أن:

$$I_j(2) < 2^{kj} \cdot 2^{r-j} \cdot c$$

وحيث أن  $r$  عدد محدود و  $c$  مقدار ثابت محدود إذن يمكن وضع  $c' = c \cdot 2^r$  حيث  $c'$  مقدار ثابت محدود وبالتالي فإن المتباينة السابقة تصبح:

$$(b) I_j(2) < 2^{j(k-r)} \cdot c'$$

حيث  $c'$  ثابت (محدود) مستقل عن  $j$ .

كذلك في أى فترة محدودة  $-2^{j-1} \leq x \leq 2^{j-1}$  نفرض أن:

$$(c) I_j(-2) = \int_{-2^j}^{-2^{j-1}} |x|^k dF(x) \leq 2^{jk} \int_{-2^j}^{-2^{j-1}} dF(x)$$

$$= 2^{jk} [F(-2^{j-1}) - F(-2^j)] < 2^{jk} F(-2^{j-1})$$

وبفرض صحة العلاقة (3. 5. 8) فإنه يوجد ثابت محدود  $c$  (وهو نفس الثابت  $c$  الذى سبق الإشارة إليه) حيث يكون:

$$| -2^{j-1} |^r F(-2^{j-1}) < c$$

وكما سبق أن وضعنا  $c' = c \cdot 2^r$  حيث  $c'$  مقدار ثابت محدود كما سبق أن ذكرنا، فإن المتباينة السابقة تأخذ الشكل التالى:

$$F(-2^{j-1}) < 2^{-jr} \cdot c'$$

من العلاقة السابقة والعلاقة (c) نجد أن:

$$(d) I_j(-2) < 2^{j(k-r)} \cdot c'$$

حيث  $c'$  ثابت (محدود) مستقل عن  $j$ .

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

كما أن:

$$(e) \quad I = \int_{-1}^1 |x|^k dF(x) \leq \int_{-1}^1 dF(x) = F(1) - F(-1) \leq 1$$

ولكن لأي فترة محدودة  $a \leq x \leq b$  يكون:

$$\begin{aligned} \int_a^b |x|^k dF(x) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-2^{j-1}}^{-2^j} |x|^k dF(x) + \int_{-1}^1 |x|^k dF(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}}^{2^j} |x|^k dF(x) \end{aligned}$$

من (a) و (c) و (e) يمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي:

$$\int_a^b |x|^k dF(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} I_j(-2) + I + \sum_{j=1}^{\infty} I_j(2)$$

ومن (b) و (d) و (e) نجد أن:

$$\int_a^b |x|^k dF(x) < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(k-r)} \cdot c' + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(k-r)} c' < 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(k-r)} c'$$

حيث  $c'$  ثابت مستقل عن  $j$  - إذن:

$$(f) \quad \int_a^b |x|^k dF(x) < 1 + 2c' \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j(r-k)}$$

عندما تكون  $k < r$  يكون المجموع الموجود في الطرف الأيمن من المتباينة

السابقة محدود لأنه يمثل متوالية هندسية لانتهائية حدها الأول  $\left(\frac{1}{2}\right)^{r-k}$  وأساسها  $\left(\frac{1}{2}\right)^{r-k}$

وبالتالي فإن مجموعها يساوي  $\frac{1}{2^{(r-k)} - 1}$  إذن العلاقة (f) تأخذ الصورة:

$$(g) \quad \int_a^b |x|^k dF(x) < 1 + \frac{2c'}{2^{(r-k)} - 1}$$

والطرف الأيمن في العلاقة السابقة كمية محدودة حيث  $c'$  ثابت (محدود) كما

ذكرنا و  $r > k$  - كما أن الطرف الأيمن أيضاً مستقل عن  $a, b$  - إذن:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$\lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b |x|^k dF(x) < 1 + \frac{2c'}{2^{(r-k)} - 1}$$

$$\therefore v_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) < \infty$$

أى أن العزم المطلق  $v_k$  موجود وبالتالي  $\mu'_k$  موجود لجميع قيم  $r > k$ .

ولكن عندما تكون  $r \leq k$  يكون المجموع فى الطرف الأيمن من العلاقة (f) السابقة ممثلاً لمجموع متسلسلة لانهائية كل حد من حدودها أكبر من أو يساوى الواحد الصحيح وبالتالي فإن المجموع يكون غير محدود أى يساوى  $\infty$  وبالتالي فإن الشرط الكافى يسرى فقط عندما  $r > k$ . وبذلك نكون قد أثبتنا صحة الشرط الكافى الذى ذكرناه.

هـ. ط. ث

(2) فى الواقع توجد علاقة بين وجود العزوم واحتمال أن يأخذ المتغير العشوائى قيم مطلقة كبيرة - فإذا كان العزم الرالى  $\mu'_r$  للمتغير العشوائى X موجود فإن:

$$(3.5.9): \lim_{a \rightarrow \infty} a^r \Pr(|X| > a) = 0$$

حيث  $0 < \alpha$ .

ويمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كما يلى:

$$I = \lim_{a \rightarrow \infty} a^r \Pr(|X| > a) = \lim_{a \rightarrow \infty} a^r \int_{|x|>a} dF(x)$$

حيث  $F(x)$  دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير X.

$$I \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|x|>a} |x|^r dF(x)$$

$$I \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x) - \int_{-a}^a |x|^r dF(x) \right]$$

وحيث أن  $\mu'_r$  موجود إذن  $v'_r$  موجود كذلك - وبهذا يكون التكامل الثانى على الطرف الأيمن مأخوذاً حسب قيمة كوشى الرئيسية (عندما  $a \rightarrow \infty$ )

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(Cauchy Principal Value) هو نفسه  $v_r'$  (العزم الرأسي المطلق) - ونحن نعرف كما في ملاحظة (3-2-1) - أن هذا مسموح به.

$$\therefore I \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |x|^r dF(x)$$

$$I \leq v_r' - v_r' = 0$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (3.5.9).

ملاحظة (3-5-2 ب): إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له حد أدنى وحد أعلى - أي متغير محدود من كلا طرفيه Bounded - بمعنى وجود عددين محدودين  $a$  و  $b$  بحيث يكون  $Pr(a < X < b) = I$  - فإن كل عزوم المتغير  $X$  تكون محدودة Finite - وفي هذه الحالة يحقق العزم الرأسي  $\mu_r'$  المتباينة التالية:

$$|\mu_r'| \leq \max(|a|^r \text{ or } |b|^r)$$

حيث  $\max$  تعبر عن أكبر القيمتين.

ونلك لأن:

$$|\mu_r'| = \left| \int_a^b x^r dF(x) \right| \leq \int_a^b |x|^r dF(x)$$

إننا عندما  $|a| > |b|$  تكون  $|\mu_r'| \leq |a|^r$ ، وعندما  $|b| < |a|$  تكون  $|\mu_r'| \leq |b|^r$ ، وفي كلتا الحالتين نجد أن:

$$|\mu_r'| \leq \max(|a|^r \text{ or } |b|^r)$$

ملاحظة (3-5-2 ج): إذا كان العزم العادي  $\mu_r'$  للمتغير  $X$  موجود و  $r$  عدد زوجي فإنه يساوى العزم المطلق  $v_r'$  - كما سبق أن ذكرنا بعد تعريف  $v_r'$  بالعلاقة (3.5.7) - وفي هذه الحالة يكون العزم أكبر من الصفر ولا يساوى الصفر إلا إذا كان المتغير العشوائي  $X$  متلاشي (مدمج) كما في (2.6.6b) واحتماله الكلي متركزاً عند النقطة  $X = 0$  - أما العزم المطلق عندما يكون موجود فإنه لا يساوى الصفر أبداً إلا إذا كان المتغير العشوائي متلاشي واحتماله الكلي متركزاً عند النقطة  $X = 0$  سواء كانت درجته ( $r$ ) زوجية أم فردية - وفي هذا يختلف عن العزم العادي الذي قد يكون موجود ويساوى الصفر (عندما تكون درجته فردية) دون أن يكون المتغير العشوائي متلاشي وهذا واضح من تعريف كل من العزم العادي والعزم المطلق.

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

#### (3 - 5 - 3) العزوم حول نقطة والعزوم المركزية:

#### The Moments About A Point & The Central Moments:

إذا كانت للدالة  $g(x) = (x - a)^r$  دالة تكاملية في المدى  $(-\infty \leq x \leq \infty)$  بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  — حيث  $a$  مقدار ثابت فإن:

$$(3.5.10): \mu'_r(a) = E[g(X)] = E[(X - a)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r dF(x)$$

يعرف بأنه "العزم الرأسي حول النقطة  $a$ " أو ببساطة "العزم الرأسي حول  $a$ " للمتغير  $X$ . وعندما  $a = 0$  نحصل على العزم العادي  $\mu'_r$  وعندما  $g(x) = |x - a|^r$  نحصل على العزم المطلق حول النقطة  $a - v'_r(a)$  وعندما تكون النقطة  $a$  هي التوقع  $\mu$  نحصل على العزم الرأسي المركزي  $\mu_r$  ويكتب بدون شرطة لتمييزه عن العزم العادي  $\mu'_r$  — أى أن:

$$(3.5.11): \mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r dF(x)$$

هو العزم الرأسي المركزي للمتغير العشوائي  $X$ . نلاحظ أن  $\mu_0 = \mu'_0 = v'_0 = 1$  — والعزم المركزي الأول  $\mu_1 = 0$  — كما أن العزم الثاني المركزي هو التباين.

ويمكن إيجاد العزوم حول النقطة  $a$  بدلالة العزوم حول نقطة أخرى  $b$  من العلاقة (3.5.10) بوضع:

$$(x - a)^r = [(x - b) + (b - a)]^r$$

وباستخدام مفكوك ذات الحدين:

$$(3.5.11'): (x - a)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (x - b)^{r-j} (b - a)^j$$

وبالتعويض عن المعادلة السابقة في (3.5.10) نجد أن:

$$(3.5.12): \mu'_r(a) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (b - a)^j \mu'_{r-j}(b)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

ونلاحظ من علاقة (3. 5. 10) أن:

$$(3. 5. 13): \begin{cases} \mu'_1(a) = \mu - a, \mu'_1(b) = \mu - b \\ b - a = -[\mu'_1(b) - \mu'_1(a)] \end{cases}$$

وللحصول على العزوم المركزية بدلالة العزوم حول الصفر نضع  $a = \mu$  ،  $b = 0$  في العلاقة (3. 5. 12) — فنحصل على العزم المركزي الرأسي  $\mu_r$  بدلالة العزوم حول الصفر  $\mu'_r$  في الصورة التالية:

$$(3. 5. 14a): \mu_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-\mu'_1)^j \mu'_{r-j}$$

كما يمكن بطريقة مماثلة الحصول على العزوم المركزية بدلالة العزوم حول نقطة (b) مثلاً في الصورة التالية:

$$(3. 5. 14b): \mu_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} [-\mu'_1(b)]^j \mu'_{r-j}(b)$$

وبمقارنة علاقتي (3. 5. 14) نجد أن العلاقة (الدالية) بين العزوم المركزية والعزوم حول الصفر هي نفس العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم حول نقطة — لذلك سنكتب هذه العلاقة مفصلة لعدد من العزوم المركزية — على أن نكتب العزوم على الجانب الأيمن في الصورة  $\mu'_r$  دون التفرقة بين إذا ما كان العزم حول الصفر أو حول نقطة — حيث أن هذه العلاقة واحدة في الحالتين.

إذن بوضع  $r = 1, 2, 3, 4, \dots$  في أي من العلاقتين (3. 5. 14) يمكن كتابة العزوم المركزية بدلالة العزوم حول الصفر (أو حول النقطة b) في الصورة التالية:

$$(3. 5. 15): \begin{cases} \mu_0 = 1 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 \\ \mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu_1'^3 \\ \mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu_1'^2\mu'_2 - 3\mu_1'^4 \\ \dots \end{cases}$$

فإذا كانت  $\mu'_r$  هي العزم الرأسي حول الصفر فإن  $\mu = \mu'_1$  وإذا كانت  $\mu'_r$  هي العزم الرأسي حول النقطة b فإن  $\mu - b = \mu'_1$  طبقاً للعلاقة (3. 5. 13).

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وإذا وضعنا  $a = 0$  و  $b = \mu$  في العلاقة (3. 5. 12) نحصل على العزوم حول الصفر بدلالة العزوم المركزية:

$$(3. 5. 16): \mu'_r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (\mu)^j \mu_{r-j}$$

حيث  $\mu$  هو التوقع و  $\mu_k$  هو العزم المركزى من الدرجة  $k$ .

وبذلك يمكن كتابة العزوم حول الصفر بدلالة العزوم المركزية في الصورة التالية:

$$(3. 5. 17): \begin{cases} \mu'_0 = 1 \\ \mu'_1 = \mu \\ \mu'_2 = \mu_2 + \mu^2 \\ \mu'_3 = \mu_3 + 3\mu\mu_2 + \mu^3 \\ \mu'_4 = \mu_4 + 4\mu\mu_3 + 6\mu^2\mu_2 + \mu^4 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

#### (أمثلة)

مثال (3 - 5 - 1): متغير عشوائى  $X$  له توزيع بواسونى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

أوجد: توقع وتباين  $X$  وكذلك العزم المركزى الثالث  $\mu_3$ .

#### (الحل)

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

$$\mu'_2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} (x-1+1) \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = \mu'_2 - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزم

بالمثل نجد أن:

$$\mu'_3 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda^3 \frac{\lambda^2}{\lambda!} e^{-\lambda} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

إن العزم المركزي الثالث من العلاقة (3.5.15) هو:

$$\mu_3 = \lambda$$

مثال (3 - 5 - 2): إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له توزيع جاما دالة كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \quad , \quad x > 0, n > 0$$

خلاف ذلك  
= 0

أوجد العزم الرأسي حول الصفر  $\mu'_r$  ثم أوجد تبين التوزيع.

(الحل)

$$\mu'_r = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^r x^{n-1} e^{-x} dx$$

وبما أن  $n > 0$  إذن  $r + n > 0$  أي أن التكامل السابق موجود - إذن:

$$\mu'_r = \frac{1}{\Gamma(n)} \Gamma(n+r)$$

$$\mu'_1 = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n$$

$$\mu'_2 = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = (n+1)n$$

إن تبين

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = n(n+1) - n^2 = n$$

مثال (3 - 5 - 3):  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{k}{(1+x^2)^m} \quad ; \quad -\infty \leq x \leq \infty, m \geq 1$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(1) أوجد قيمة  $k$ .

(2) بين شرط وجود العزم الرأسي  $M_r'$ .

(3) عندما  $m = 1$  أوجد كل العزوم المحدودة (الموجودة).

(4) عندما  $m > 1$  أوجد كل العزوم المحدودة.

(الحل)

(1) لإيجاد قيمة  $k$  نعلم أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dx}{(1+x^2)^m} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{k} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m}$$

وذلك لأن  $f(x)$  دالة زوجية وحيدة المنوال متماثلة حول الصفر  $f(-x) = f(x)$

ضع:

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

إذن:

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 y^{m-\frac{1}{2}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1} dy$$

التكامل السابق تكامل بيتا وشرط وجوده أن يكون  $m - \frac{1}{2} > 0$  أي  $m > \frac{1}{2}$ .

إذن عندما:  $m > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{k} = \beta\left(\frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}\right)$$

$$k = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})}, \quad m > \frac{1}{2}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزم

(2) العزم الذى من الدرجة  $J$  (فى حالة وجوده) يكون:

$$\mu'_J = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^J dx}{(1+x^2)^m}$$

والتكامل السابق (فى حالة وجوده) يكون مساوياً للصفر عندما تكون  $J$  عدد فردى — وبهذا فإن كل العزوم الفردية الموجودة لهذا التوزيع تساوى الصفر — أما إذا كانت  $J$  عدد زوجى — لتكن  $J = 2r$  حيث  $r$  عدد صحيح غير سالب — يكون العزم  $\mu'_{2r}$  هو:

$$\mu'_{2r} = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2r} dx}{(1+x^2)^m} = 2k \int_0^{\infty} \frac{x^{2r} dx}{(1+x^2)^m}$$

وبأسلوب مماثل لإيجاد التكامل فى (1) نجد أن:

$$\mu'_{2r} = k \int_0^1 y^{m-r-\frac{1}{2}-1} (1-y)^{r+\frac{1}{2}-1} dy$$

والتكامل السابق هو تكامل بيتا وشرط وجوده هو أن تكون:

$$m-r-\frac{1}{2} > 0, \quad r+\frac{1}{2} > 0$$

وهذا يتطلب أن:  $2r < 2m-1$ . أى أن شرط وجود العزم  $\mu'_{2r}$  هو أن تكون  $2r < 2m-1$  — وعلى ذلك فإن العزوم حول الصفر التى من درجة أقل من  $(2m-1)$  كلها موجودة والعزوم الفردية منها كلها أصفار — ولكن العزوم التى تزيد درجتها عن  $(2m-1)$  أو تساويها غير موجودة.

(3) عندما  $m=1$  تكون  $2m-1=1$  ومن (2) يتضح أن كل العزوم ابتداء من التوقع غير موجودة وقد سبق أن وجدنا فى مثال (3-2-2) أن التوقع غير موجود وبالتالي فإن كل العزوم التى أعلى منه درجة غير موجودة — لهذا عندما  $m=1$  تكون كل عزوم هذا التوزيع غير موجودة.

(4) عندما تكون  $m > 1$  تكون كل العزوم الزوجية  $\mu'_{2r}$  موجودة إذا تحققت العلاقة  $2r < 2m-1$  كما أوضحنا فى (2) ويكون كما أثبتنا فى (2):

$$\begin{aligned} \mu'_{2r} &= k \beta(m-r-\frac{1}{2}, r+\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2}) \Gamma(m-r-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(m-\frac{1}{2})}, \quad 2r < 2m-1 \end{aligned}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

وبذلك تكون كل العزوم الزوجية والفردية التي درجتها أقل من  $2r$  موجودة والفردية منها تساوى الصفر كما سبق أن ذكرنا فى (2) وبهذا يكون التوقع موجود ويساوى الصفر عندما  $m > 1$ .

ملاحظة (3 - 5 - 3): العزم الثانى حول النقطة  $c$  يمكن — باستخدام العلاقة (3. 3. 7b) — كتابته فى الصورة التالية:

$$\mu'_2 = E(X - c)^2 = V(X) + (\mu - c)^2$$

حيث  $\mu$  هو توقع  $X$  — وهذا يوضح أن العزم الثانى يكون أقل ما يمكن عندما  $\mu = c$  — أى أن العزم الثانى يكون نهاية صغرى عندما يكون محسوباً حول مركز التوزيع  $\mu$ .

ملاحظة (3 - 5 - 3): إذا كان متغير عشوائى له توزيع احتمالى متمثل حول قيمة معينة "a" فإن العزوم الفردية حول "a" جميعها أصفار. فإذا كان مركز التماثل "a" هو التوقع فإن كل العزوم المركزية الفردية تكون أصفار (إذا كانت موجودة) — أى أن أى توزيع متمثل حول توقعه تكون عزومه المركزية الفردية (إذا كانت موجودة) كلها أصفار.

ملاحظة (3 - 5 - 3 —): سبق أن ذكرنا أن العزوم الزوجية العادية تساوى العزوم الزوجية المطلقة — والآن نضيف الآتى:

إذا كان المتغير العشوائى  $X$  متغير غير سالب — أى أن  $Pr(X \geq a) = 1$  حيث  $a \geq 0$  — فإن العزوم المطلقة حول أى نقطة  $b$  على يسار النقطة  $a$  تساوى العزوم العادية المساوية لها فى الدرجة (يمكن للقارئ إثبات ذلك).

مثال (3 - 5 - 4): أوجد العزوم المركزية العادية والمطلقة للمتغير  $X$  ذى التوزيع المعتاد إذا كانت دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]; -\infty \leq x \leq \infty$$

(الحل)

(1) التوقع: يلزم لإيجاد العزوم المركزية أن نحصل على التوقع  $\mu$ .

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

ويستخدم التحويلة  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$  نختصر التكامل السابق إلى:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z) e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

التكامل الثانى فى الطرف الأيمن يساوى صفر لأنه تكامل دالة فردية فى المدى

$\pm \infty$  والتكامل الأول يساوى  $\sqrt{2\pi}$  إذن:  $E(X) = \mu$ .

(2) العزوم المركزية العادية: يمكن إيجاد العزم المركزى الرئى  $\mu_r$  كما يلى:

$$\mu_r = E(X - \mu)^r = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

وينفس التحويلة السابقة:

$$\mu_r = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^r \exp[-z^2/2] dz$$

فإذا كانت  $r$  عدد فردى تكون الدالة المكاملة فردية ويكون التكامل فى المدى  $\pm \infty$

مساوياً للصفر أى أن  $\mu_r = 0$  عندما  $r$  عدد فردى.

أما إذا كانت  $r$  عدد زوجى — لتكن  $2k = r$  حيث  $k$  عدد صحيح غير سالب — فإن:

$$\mu_{2k} = \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} z^{2k} e^{-z^2/2} dz$$

ويستخدم التحويلة:

$$y = z^2/2, \quad z = \sqrt{2y}$$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{2}} y^{-1/2} dy$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

$$\therefore \mu_{2k} = \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{\pi}} 2^k \int_0^{\infty} y^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)-1} e^{-y} dy$$

$$\therefore \mu_{2k} = \frac{\sigma^{2k} 2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

ولكن:

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{2^{2k} k!}$$

$$\mu_{2k} = \sigma^{2k} \cdot \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

وبما أن  $r = 2k$  حيث  $r$  عدد زوجي فيمكن كتابة الصيغة التالية:

العزم المركزي للموزع المعتاد دائما موجودة والعزم الرأسي المركزي معطى بالعلاقة التالية:

$$(3.5.18): \mu_r = \frac{r!}{2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{2}\right)!} \cdot \sigma^r \quad \text{عندما } r \text{ عدد زوجي}$$

$$= 0 \quad \text{عندما } r \text{ عدد فردي}$$

(3) العزم المركزي المطلقة: العزم المركزي المطلق  $v_r = E(|X - \mu|^r)$  هو نفسه العزم المركزي للعادي عندما تكون  $r$  عدد زوجي وبالتالي تكون قيمته هي الموجودة في العلاقة (3.5.18) السابقة حيث  $v_r = \mu_r$ . وعندما تكون  $r$  عدد فردي — يمكن بنفس الأسلوب السابق الوصول إلى ما يلي:

$$v_r = E(|X - \mu|^r) = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^r e^{-z^2/2} dz$$

وهنا الدالة المكاملة زوجية

$$\therefore v_r = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} z^r e^{-z^2/2} dz = \frac{2^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \sigma^r$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وبذلك يمكن كتابة العزوم المطلقة المركزية للتوزيع المعتمد فى الصورة التالية:

$$(3.5.19): \nu_r = \frac{r!}{2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)!} \sigma^r \quad \text{عندما } r \text{ عدد زوجى}$$

$$= \frac{2^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \sigma^r \quad \text{عندما } r \text{ عدد فردى}$$

وعزوم أى متغير عشوائى ليست مجرد كميات اعتباطية Arbitrary Quantities لا رابط بينها وإنما هى كميات يوجد بينها علاقات معينة تقدم بعض من هذه العلاقات فيما يلى:

لأى مجموعة من الثوابت  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  يكون مقدار الدرجة الثانية:

$$(3.5.20): Q_n = \int \left[ \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k \right]^2 dF(x) \geq 0$$

فإذا كان العزم  $\mu'_{2n}(a)$  موجود - تكون كل العزوم العادية والمطلقة التى من الدرجة  $2n$  أقل موجودة وبالتالي يمكن كتابة  $Q_n$  فى الصورة التالية:

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n c_k c_j \mu'_{k+j}(a) \geq 0$$

حيث  $\mu'_{k+j}(a)$  هو العزم ذو الدرجة  $(k+j)$  حول  $a$ .

ويمكن كتابة  $Q_n$  فى شكل مصفوفى كما يلى:

$$Q_n = \underline{c}' M \underline{c} \geq 0$$

حيث

$$\underline{c}' = [c_0 c_1 c_2 \dots c_n]$$

والمصفوفة  $M$  عناصرها العزوم  $\mu'_{k+j}$  ومادامت  $Q_n \geq 0$  فإن  $|M| \geq 0$  وهذا يوصلنا إلى نتيجة معينة هى أن:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

العزوم الأولى  $\mu'_k(a)$  تحقق المتباينات التالية:

$$\begin{vmatrix} \mu'_0(a) & \mu'_1(a) & \dots & \mu'_k(a) \\ \mu'_1(a) & \mu'_2(a) & \dots & \mu'_{k+1}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu'_k(a) & \mu'_{k+1}(a) & \dots & \mu'_{2k}(a) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

وإذا وضعنا  $|x - a|^k$  فى العلاقة (3. 5. 20) بدلا من  $(x - a)^k$  نحصل على صيغة مشابهة للعزوم المطلقة حول  $a$ .

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلى:

إذا كانت عزوم أى توزيع حتى الدرجة  $2n$  موجودة فإنها تحقق المتباينات التالية:

$$(3. 5. 21a): \begin{cases} \mu'_{i+J}(a) \geq 0 \\ v'_{i+J}(a) \geq 0 \end{cases} \quad i, J = 0, 1, 2, \dots, k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

حيث  $\mu'_{i+J}(a)$  هو العزم العادى من الدرجة  $(i + J)$  حول النقطة  $(a)$  ويمثل العنصر الموجود فى الصف  $(i)$  والعمود  $(J)$  من المحدد  $|\mu'_{i+J}(a)|$  — والعزم المطلق  $v'_{i+J}(a)$  يعرف بنفس الطريقة. وعندما  $\mu = a$  نحصل على نفس المتباينات السابقة للعزوم المركزية — العادية منها والمطلقة — فى الصورة التالية:

$$(3. 5. 21b): \begin{cases} |\mu_{i+J}| \geq 0 \\ |v_{i+J}| \geq 0 \end{cases} \quad i, J = 0, 1, 2, \dots, k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$\mu_{i+J}$  هو العزم المركزى من الدرجة  $(i + J)$  ويمثل العنصر الموجود فى الصف  $i$  والعمود  $J$  من المحدد  $|\mu_{i+J}|$  وبالمثل نعرف العزم المركزى المطلق  $v_{i+J}$ .

ومن العلاقة (3. 5. 21b) عندما  $k = 2$  نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} \geq 0$$



### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

إن العزوم المركزية الأربعة الأولى تحقق العلاقة التالية:

$$(3.5.22a): \mu_2\mu_4 - \mu_3^2 - \mu_2^3 \geq 0$$

ونقدم فيما يلي بعض الكميات التي يتم حسابها من العزوم المركزية ولها أهمية خاصة في الدراسات الإحصائية كما سيتضح فيما بعد - ونعرفها كما يلي:

$$(3.5.22b): \beta_1 = \mu_3/\mu_2^3 \quad ; \quad \beta_2 = \mu_4/\mu_2^2 \quad ; \quad \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} \quad ; \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

وبقسمة طرفي العلاقة (3.5.22a) على  $\mu_2^3$  نحصل على العلاقة التالية بين  $\beta_1$  ،  $\beta_2$  :

$$(3.5.22c): \beta_2 \geq \beta_1 + 1$$

نعرف من نظرية (3 - 5 - 2) أن العزم الرأسي  $\mu_r'$  عندما يكون موجود تكون كل العزوم المطلقة والعادية من الدرجة  $k$  كلها موجودة لجميع قيم  $0 \leq k \leq r$  - ونحن الآن سنقدم نظرية هامة خاصة بالعزوم المطلقة تسمى "متباينة لابونوف" Lapunov's Inequality".

نظرية (3 - 5 - 3):

إذا كان العزم المطلق من الدرجة  $n$  للمتغير العشوائي  $X$  موجود فإن المتباينة:

$$(3.5.23): v_k^{\frac{1}{k}} \leq v_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$$

تكون صحيحة لجميع قيم  $k = 1, 2, \dots, n-1$  ; حيث  $v_k = E|X - a|^k$  و  $a$  أي عدد حقيقي.

(الإثبات)

أى مقدار من الدرجة الثانية فى  $u$  ،  $z$  على الصورة:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} [u|x-a|^{\frac{k+1}{2}} + z|x-a|^{\frac{k-1}{2}}]^2 dF(x)$$

يكون دائماً غير سالب - إذن:

$$Q = v_{k-1}u^2 + 2v_kuz + v_{k+1}z^2 \geq 0$$

وحيث أن الشرط اللازم لى يكون مقدار الدرجة الثانية  $Q \geq 0$  هو أن يكون محدد هذا المقدار غير سالب أى أن:

$$\begin{vmatrix} v_{k-1} & v_k \\ v_k & v_{k+1} \end{vmatrix} \geq 0$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

إن

$$v_k^2 \leq v_{k-1} \cdot v_{k+1}$$

ويرفع طرفي المتباينة السابقة إلى القوة  $k$

$$\therefore v_k^{2k} \leq v_{k-1}^k \cdot v_{k+1}^k$$

وبما أن  $v_n$  موجود إذن  $v_k$  موجود لجميع قيم  $k = 1, 2, \dots, n-1$  وعلى ذلك إذا وضعنا  $k = 1, 2, \dots, n-1$  في المتباينة السابقة نحصل على المتباينات التالية:

$$v_1^2 \leq v_0 \cdot v_2$$

$$v_2^4 \leq v_1^2 \cdot v_3^2$$

$$v_3^6 \leq v_2^3 \cdot v_4^3$$

.....

$$v_{n-1}^{2(n-1)} \leq v_{n-2}^{n-1} \cdot v_n^{n-1}$$

وبضرب المتباينات السابقة في بعضها علما بأن  $v_0 = 1$  نحصل على المتباينة التالية:

$$(3.5.24): v_k^{k+1} \leq v_{k+1}^k$$

وبسرف طرفي المتباينة السابقة إلى القوة  $\frac{1}{k(k+1)}$  نصل إلى المتباينة (3.5.23)

وهذا يثبت النظرية.

هـ. ط. ث.

والعلاقة (3.5.23) يمكن كتابتها في الصورة التالية عندما يكون العزم المطلق

$v_n$  موجود:

$$(3.5.25): v_1 \leq v_2^{\frac{1}{2}} \leq v_3^{\frac{1}{3}} \leq \dots \leq v_n^{\frac{1}{n}}$$

### (3-5-4) العزوم العاملية The Factorial Moments

سنقدم الآن نوع من العزوم يسمى بالعزوم العاملية، وهي قليلة الاستخدام في النظرية الإحصائية لكنها ذات فائدة كبيرة في الحصول على العزوم العادية لبعض التوزيعات المنقطعة والتي من نوع التوزيع ذو الحدين والتوزيع البواسوني وغير ذلك من التوزيعات التي تحتوي على علامة المضروب (!) (The Factorial Sign) في صيغة دوال

### الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

توزيعها الاحتمالي. ولعند استخدام العزوم العائلية في التوزيعات المستمرة سنكتفي بتعريفها بالنسبة للتوزيعات المتقطعة فقط.

وقبل تعريف العزوم العائلية نقدم التعبير التالي:

$$(3.5.25): x^{[r]} = x(x-1)(x-2)\dots(x-r+1)$$

ونطلق على التعبير السابق لفظ "التعبير العائلي" "Factorial Expression" حيث أنه حاصل ضرب عدة عوامل. وقيم العوامل المتتالية بينها فرق ثابت يساوى الواحد الصحيح.

تعريف (3-5-4) العزم العائلي من الدرجة  $r$  حول النقطة  $(a)$ :

The  $r^{\text{th}}$  Factorial Moment About A Point  $(a)$ :

التعبير:

$$(3.5.26): \mu'_{[r]}(a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (x-a)^{[r]} P(x_j)$$

يسمى العزم العائلي من الدرجة  $r$  للمتغير العشوائي  $X$  حول النقطة  $(a)$  - حيث  $P(x_j) = Pr[X = x_j]$  هى دالة احتمال  $X$  عند نقطة الاحتمال  $x_j$  و  $a$  نقطة ثابتة و  $(x-a)^{[r]}$  معرفة بالعلاقة (3.5.25).

ويمكن استخدام تعريف العزم العائلي حول النقطة  $a$  كما فى العلاقة (3.5.26) فى إيجاد العزوم العائلية بدلالة العزوم العادية وبعملية الرجوع العكسى يمكن الحصول على العزوم العادية بدلالة العزوم العائلية - وهذا هو المهم. وفيما يلى العزوم العائلية الستة الأولى بدلالة العزوم العادية ثم العزوم العادية بدلالة العزوم العائلية.

أولاً: بالاستخدام المباشر للعلاقة (3.5.26) يمكن إيجاد العزوم العائلية حول  $a$  بدلالة العزوم العادية حول نفس النقطة  $a$ . وسنكتب العزوم  $\mu'_{[r]}(a)$  على الشكل  $\mu'_{[r]}$  وكذلك العزوم  $\mu'_r(a)$  على الشكل  $\mu'_r$  وذلك لتبسيط شكل الصيغة المستخدمة علماً بأن العلاقات التالية صحيحة لجميع قيم  $a$ . فعندما  $a = 0$  يكون  $\mu'_{[r]}$  و  $\mu'_r$  هما العزم العائلي من الدرجة  $r$  حول الصفر والعزم العائلي من الدرجة  $r$  حول الصفر وعندما  $a$  تساوى التوقع  $\mu$  تكون  $\mu'_{[r]}$  و  $\mu'_r$  هى العزوم العائلية والعائلية المركزية.

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$(3. 5. 27): \mu'_{[1]} = \mu'_1$$

$$\mu'_{[2]} = \mu'_2 - \mu'_1$$

$$\mu'_{[3]} = \mu'_3 - 3\mu'_2 + 2\mu'_1$$

$$\mu'_{[4]} = \mu'_4 - 6\mu'_3 + 11\mu'_2 - 6\mu'_1$$

$$\mu'_{[5]} = \mu'_5 - 10\mu'_4 + 35\mu'_3 - 50\mu'_2 + 24\mu'_1$$

$$\mu'_{[6]} = \mu'_6 - 15\mu'_5 + 85\mu'_4 - 225\mu'_3 + 274\mu'_2 - 120\mu'_1$$

.....

ثانياً: بعملية الرجوع العكسي في المعادلات السابقة نحصل على العزوم العادية بدلالة العزوم العاملة — وهذا هو المهم كما ذكرنا سابقاً.

$$(3. 5. 28): \mu'_1 = \mu'_{[1]}$$

$$\mu'_2 = \mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$

$$\mu'_3 = \mu'_{[3]} + 3\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$

$$\mu'_4 = \mu'_{[4]} + 6\mu'_{[3]} + 7\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$

$$\mu'_5 = \mu'_{[5]} + 10\mu'_{[4]} + 25\mu'_{[3]} + 15\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$

$$\mu'_6 = \mu'_{[6]} + 15\mu'_{[5]} + 65\mu'_{[4]} + 90\mu'_{[3]} + 31\mu'_{[2]} + \mu'_{[1]}$$

.....

وبما أن  $\mu'_{[1]} = \mu'_1$  إذن العلاقات (3. 5. 27) و (3. 5. 28) تظل صحيحة عندما تكون  $\mu = a$  ولذلك نهمل الشرطة الموضوعة على كل عزم وتعتبر كل العزوم مركزية مع الأخذ في الاعتبار أن  $\mu_{[1]} = \mu_1 = \text{صفر}$  — حيث أن العزم المركزي الأول يساوى الصفر.

مثال (3-5-5): إذا كان  $X$  متغير عشوائى متقطع له توزيع بواسونى دالة احتماله:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad ; x = 0, 1, 2, \dots$$

أوجد العزوم المركزية الأربعة الأولى لهذا للتوزيع.

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

### (الحل)

نبدأ أولاً بالحصول على العزوم حول الصفر ومنها نحصل على العزوم المركزية. ولو حاولنا الحصول على العزوم العادية حول الصفر منجد أن العملية الحسابية صعبة جداً لوجود مضروب  $x$  - لذلك نحصل أولاً على العزوم العاملة حول الصفر ومنها نحصل على العزوم العادية:

العزم العامل من الدرجة  $r$  حول الصفر هو:

$$\mu'_{[r]} = \sum_{x=0}^{\infty} x^{[r]} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \lambda^r e^{-\lambda} \sum_{x=r}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-r)}}{(x-r)!} = \lambda^r$$

إن العزوم العاملة الأربعة الأولى حول الصفر هي:

$$\mu'_{[r]} = \lambda^r \quad ; \quad r=1,2,3,4$$

$$\mu'_{[1]} = \lambda, \mu'_{[2]} = \lambda^2, \mu'_{[3]} = \lambda^3, \mu'_{[4]} = \lambda^4$$

وباستخدام العلاقات (3. 5. 28) نجد أن العزوم العادية الأربعة الأولى حول الصفر

هي:

$$\mu'_1 = \mu'_{[1]} = \lambda$$

$$\mu'_2 = \mu'_{[2]} + \mu'_{[1]} = \lambda^2 + \lambda$$

وبالمثل:

$$\mu'_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu'_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

وباستخدام العلاقات (3. 5. 16) نحصل من العزوم حول الصفر السابقة على العزوم

المركزية:

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

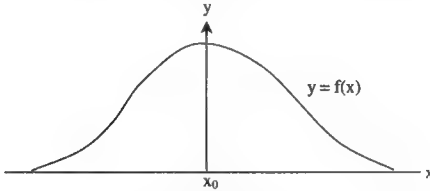
$$\begin{aligned} \mu_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu_1'^3 \\ &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda(\lambda^2 + \lambda) + 2\lambda^3 = \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu_1'^2\mu'_2 - 3\mu_1'^4 \\ &= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4\lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) + 6\lambda^2(\lambda^2 + \lambda) - 3\lambda^4 \\ &= 3\lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضوع) ولتشتت والعزوم

### (3 - 6) الالتواء The Skewness:

فى التطبيقات الإحصائية كثيراً ما نواجهنا توزيعات مستمرة وحيدة المنوال ومتماثلة Symmetric - مثل التوزيع المعتاد - الذى سنتقدمه فى الباب الثامن - وهو أهم توزيع إحصائى على الإطلاق لأهمية الدور الذى يلعبه فى الدراسات الإحصائية، وتتميز التوزيعات التى من هذا النوع بأن للتوزيع يكون وحيد المنوال ومتماثل حول نقطة المنوال. فلو رمزنا لدالة كثافة احتمال التوزيع بالرمز  $f(x)$  ولعنواله بالرمز  $x_0$  فإن الدالة  $f(x)$  تكون متماثلة حول الخط الرأسى  $x = x_0$ . والنقطة  $x = x_0$  تسمى مركز التماثل وفى هذا التوزيع يكون الوسط مساوياً للوسط مساوياً للمنوال والجميع يساوى قيمة واحدة هى مركز التماثل. والشكل التالى يبين منحنى توزيع من هذا النوع:



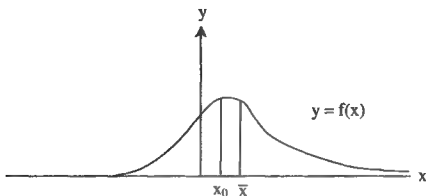
$$f(x + x_0) = f(x - x_0)$$

شكل (3 - 6)

توزيع متماثل حول المنوال  $x_0$

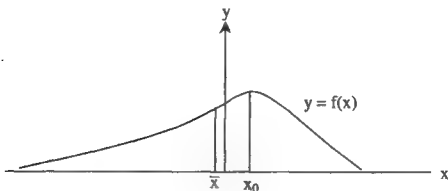
كما نواجهنا أيضاً توزيعات مستمرة وحيدة المنوال لها ذيل طويل (Long Tail) على إحدى جانبي المنوال وذيل قصير (Short Tail) على الجانب الآخر كما فى الشكل التالى:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم



شكل (3 - 6 ب)

منحنى وحيد المنوال  $x_0$  ذيله الأطول ناحية اليمين (الوسط  $\bar{x} < x_0$ )



شكل (3 - 6 ج)

منحنى وحيد المنوال ذيله الأطول ناحية اليسار (الوسط  $\bar{x} > x_0$ )

عندما يكون الذيل الأطول ناحية اليمين من المنوال نقول أن التوزيع "ملتو ناحية اليمين" أو "موجب الالتواء" كما في الشكل السابق (3 - 6 ب). وإذا كان الذيل الأطول ناحية اليسار من المنوال نقول أن التوزيع "ملتو ناحية اليسار" أو "سالب الالتواء" كما في الشكل السابق (3 - 6 ج). والتوزيعات المتماثلة تتميز بأن:

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

الوسط  $\bar{x}$  = الوسيط  $x_{\frac{1}{2}}$  = المنوال  $x_0$  ومركز التماثل هو المنوال  $x_0$  - في حين أن هذه القيم تختلف في التوزيعات غير المتماثلة (Asymmetric Distributions) - حيث أنها تتأثر بالقيم المتطرفة للمتغير Extreme Values ولكن كما نعلم أن المنوال لا يتأثر بالقيم المتطرفة في حين أن الوسيط يتأثر بموضع (أو ترتيب) هذه القيم فقط أما الوسط الحسابي فإنه يتأثر بحجم هذه القيم المتطرفة، لذلك يمكن استخدام المنوال والوسط الحسابي لقياس الالتواء مستخدمين فكرة معينة هي أن في التوزيعات المتماثلة يكون  $\bar{x} - x_0 = 0$  أما في التوزيعات اللبعيدة عن التماثل (الملتوية) يكون  $\bar{x} - x_0 \neq 0$  لذا قد يتجه التفكير إلى استخدام العلاقة  $\bar{x} - x_0$  لقياس الالتواء ولكن هذه العلاقة يواجه لها انتقادين، أولهما أن الالتواء في هذه الحالة يقاس بنفس وحدات المتغير وبالتالي لا يصلح في المقارنة بين توزيعات المتغيرات ذات وحدات القياس المختلفة، وثانيهما أن هذا المقياس يعطى دلالة مختلفة عند مقارنة توزيع صغير التشتت بتوزيع آخر أكبر منه تشتتاً، لذلك من الأفضل أن ننسب هذا المقياس إلى تشتت كل منهما لتكون المقارنة فعالة. ولهذا قدم كارل بيرسون K. Pearson مقياس للالتواء تغلب به على هذه الصعوبات - هو:

$$(3.6.1): Sk(1) = \frac{\bar{x} - x_0}{\sigma}$$

حيث  $\bar{x}$  هو الوسيط و  $x_0$  المنوال و  $\sigma$  الانحراف المعياري. ويسمى "معامل الالتواء بيرسون". والمقياس السابق مقياس نسبي ليس له وحدات قياس وإشارته تكون موجبة عندما يكون  $\bar{x} > x_0$  وفي هذه الحالة يكون الذيل الأطول في اتجاه القيم الكبرى للمتغير أى أن الذيل الأيمن أطول من الذيل الأيسر كما في الشكل السابق (3 - 6 ب) - ونقول أن التوزيع ملتو ناحية اليمين أو موجب الالتواء. وبالمثل تكون إشارة معامل الالتواء سالبة إذا كانت  $\bar{x} < x_0$  وفي هذه الحالة يكون الذيل الأيسر أطول من الذيل الأيمن كما في الشكل السابق (3 - 6 ج) ونقول أن التوزيع ملتو ناحية اليسار أو سالب الالتواء. وعلى هذا إذا كان معامل الالتواء  $Sk(1)$  موجب نقول أن التوزيع ملتو ناحية اليمين أو موجب الالتواء وإذا كان سالباً نقول أن التوزيع ملتو ناحية اليسار أو سالب الالتواء وإذا كان يساوى صفر نقول أن التوزيع متمثل حول المنوال. وكلما زادت قيمة  $Sk(1)$  كلما زادت شدة الالتواء سواء كان سالباً أو موجباً، كما أن وحدات قياسه مطلقة لا تميز لها. ولكن توجد صعوبة خطيرة في استخدام هذا المقياس وهي أننا في كثير من التوزيعات لا نستطيع الحصول على المنوال إما لعدم وجوده كما في بعض التوزيعات المقطوعة أو المستمرة عندما تكون دالة كثافة الاحتمال كمية ثابتة أو لعدم إمكانية الحصول عليه إلا بصورة تقريبية كما في التوزيعات المحددة عددياً مثل التوزيعات التكرارية. لذلك



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

يمكن استخدام العلاقة (3. 2. 32) لتقديم مقياس آخر للالتواء في حالة التوزيعات القريبة من التماثل باستخدام الوسيط  $x_{\frac{3}{2}}$  بدلاً من المنوال، هذا المقياس هو:

$$(3. 6. 2): Sk(2) = \frac{3(\bar{x} - x_{\frac{3}{2}})}{\sigma}$$

وتوجد مجموعة كبيرة من التوزيعات تسمى توزيعات بيرسون Pearson's Distributions حيث يمكن - بالنسبة لهذه التوزيعات - إثبات أن معامل التواء بيرسون  $Sk(1)$  يأخذ الصيغة التالية:

$$(3. 6. 3): Sk(1) = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

حيث  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  كما في العلاقات (3. 5. 22b).

والصيغة السابقة تقدم لنا القيمة المضبوطة Exact Value لمعامل التواء بيرسون  $Sk(1)$  بدلاً من الصيغة (3. 6. 1) التي تعتمد على المنوال والذي قد لا يمكن الحصول عليه إلا في صورة تقريبية.

وتوجد أيضاً مقاييس أخرى للالتواء مبنية على الكميات الترتيبية التي أشرنا إليها في بند (3 - 2 - 4) حيث يمكن تقديم مقياس للالتواء يعتمد على الربيعين الأدنى  $x_{\frac{1}{4}}$  والأعلى  $x_{\frac{3}{4}}$  والوسيط  $x_{\frac{2}{2}}$  ونقوم فكرة هذا المقياس على أن الربيعين  $x_{\frac{1}{4}}$  و  $x_{\frac{3}{4}}$  في التوزيع المتماثل متساويا البعد عن الوسيط أي أن:

$$(3. 6. 4): (a) \left( x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{2}{2}} \right) = \left( x_{\frac{2}{2}} - x_{\frac{1}{4}} \right)$$

$$(b) \left( x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{2}{2}} \right) - \left( x_{\frac{2}{2}} - x_{\frac{1}{4}} \right) = 0$$

وعلى هذا فإن الفرق الموجود في العلاقة السابقة (b) يساوى الصفر في المنحنيات المتماثلة وقريب من الصفر في المنحنيات القريبة من التماثل ويختلف عن الصفر في المنحنيات الملتوية وكلما زاد الفرق كلما كان الالتواء كبيراً. لذلك يمكن أن ننسب هذه الكمية إلى الفرق بين الربيعين  $(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$  الذي يعتبر مقياساً للتشتت ونستخدم هذه النسبة للحصول على مقياس مطلق للالتواء (وحدات قياسه مطلقة ليس لها تمييز) في الصورة التالية:

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$(3.6.5): Sk(3) = \frac{(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}) - (x_{\frac{1}{2}} - x_{\frac{1}{2}})}{x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}}$$

ويمكن إثبات أن:

$$(3.6.6): -1 < Sk(3) < 1$$

فإذا كان  $Sk(3)$  موجب نقول أن التوزيع موجب الالتواء وذيله الأطول ناحية اليمين وإذا كان سالب نقول أن التوزيع سالب الالتواء أى الذيل الأطول ناحية اليسار وإذا كان صفر نقول أن التوزيع متماثل. وما زال هناك عيب يمكن توجيهه لمعامل الالتواء السابق  $Sk(3)$  وهو أنه يهمل نصف قيم المتغير إذ لا يدخل فى حسابه القيم التى أقل من  $x_{\frac{1}{4}}$  والسى أكبر من  $x_{\frac{3}{4}}$  وهو نفس العيب الذى يواجه إلى أى مقياس للتشتت أو للالتواء محسوب من الإحصاءات (لو الكميات) الترتيبية.

ملاحظة (3-6 أ): فى المقياس السابق إذا استبدلنا الكميات الترتيبية  $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$  بالكميات الترتيبية  $x_p, x_{1-p}$  حيث  $0 < p < 1$  سنحصل على مقياس آخر للالتواء ونظل قيمة المقياس الجديد منحصرة بين -1، 1.

ويوجد مقياس آخر للالتواء يعتمد على العزم المركزى الثالث  $\mu_3$  والانحراف المعيارى  $\sigma$ . إذ من المعروف أن العزوم المركزية الفردية لأى توزيع متماثل جميعها تساوى الصفر (عندما تكون موجودة) لذلك فإن أى عزم مركزى فردى يختلف عن الصفر (فى حالة وجوده) يمكن أن يستخدم كمقياس للالتواء — أى لقياس درجة الانبعاد عن التماثل — وأبسط هذه العزوم هو العزم المركزى الثالث  $\mu_3$ . وحيث أن وحدات قياس  $\mu_3$  هى مكعب وحدات قياس المتغير — إذن للحصول على مقياس مطلق — وحدات قياسه أعداد مطلقة (Pure Numbers) نقسم  $\mu_3$  على مكعب الانحراف المعيارى  $\sigma^3$  (الذى يقاس أيضاً بمكعب وحدات قياس المتغير) ونستخدم النسبة  $(\mu_3/\sigma^3)$  كمقياس للالتواء فنحصل على معامل الالتواء التالى:

$$(3.6.7): Sk(4) = \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

فى التوزيعات غير المتماثلة "Asymmetric Distributions" إذا كان الذيل الأطول للتوزيع على يمين قمة المنحنى (أى على يمين المنوال) فى الجانب الموجب — كما فى الشكل (3-6 ب) — سنجد عند حساب  $\mu_3$  أن مكعبات الانحرافات الموجبة تكون —

### الفصل الثالث - مقاييس للزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

بصفة عامة - أكثر وزناً من مكعبات الانحرافات السالبة، ولهذا فإن  $\gamma_1$  تكون موجبة. إذن عندما تكون  $\gamma_1$  موجبة نقول أن التوزيع موجب الالتواء وذيله الأطول على يمين القمة. وبالمثل يكون التوزيع سالب الالتواء (وذيله الأطول على يسار القمة) عندما تكون  $\gamma_1$  سالبة وتزداد شدة الالتواء (سواء كان موجباً أو سالباً) كلما كانت القيمة العددية للكمية  $\gamma_1$  كبيرة. أما إذا كانت  $\gamma_1$  تساوى الصفر نقول أن التوزيع متماثل. وفي بعض الكتب والدراسات الإحصائية تستخدم الكمية  $\beta_1 = \gamma_1^2$  بدلا من  $\gamma_1$  ويكون معامل الالتواء في هذه الحالة هو:

$$(3.6.8): Sk(5) = \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}; (\beta_1 = \gamma_1^2)$$

والمقياس السابق دائماً موجب فهو يقيس شدة الالتواء دون تحديد اتجاهه.

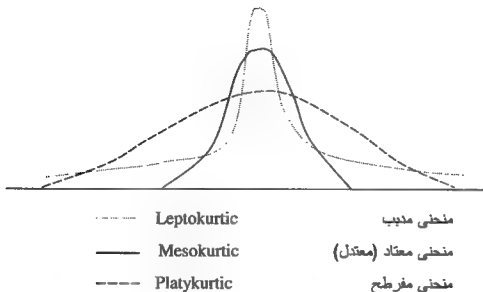
وعلى أي حال فقد قدم "أورد" (1968) "Ord" بعض التوزيعات غير المتماثلة Asymmetric Distributions والتي يمكن أن يكون لها عزوم فردية تساوى الصفر من أي درجة نحددها - وفي مثل هذه التوزيعات لا يمكن استخدام  $\beta_1$  أو  $\gamma_1$  في قياس الالتواء - لذلك يجب استخدام معامل الالتواء  $\beta_1$  أو  $\gamma_1$  بشيء من الحذر.

### (3 - 7) التفرطح (Kurtosis) والتحنّب:

باعتبار أن التوزيع الموجود في شكل (3 - 16) توزيع معتاد أو معتدل فإن أي توزيع تكون قمته أعلى ارتفاعاً وأكثر تدبياً أو تحبباً (more sharply peaked) من التوزيع المعتاد يسمى "توزيع محدب أو مدبب" (Leptokurtic) - وإذا كانت قمة التوزيع أقل ارتفاعاً وأكثر تسطحاً (more flattening) من التوزيع المعتاد فإنه يسمى "توزيع مفرطح" (Platykurtic) - فسي حين أن التوزيع المعتاد يعتبر وسطاً بين التوزيع المحدب والتوزيع المفرطح ونقول أنه "توزيع متوسط التفرطح" (mesokurtic).

والشكل التالي يوضح هذه الأنواع الثلاثة في رسم واحد.

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم



شكل (3 - 7 أ)

ونقدم فيما يلي مقياس لدرجة التفرطح (أو التسطح حول القمة) في التوزيعات الاحتمالية وحيدة المنوال. ودرجة التفرطح في التوزيع يمكن قياسها باستخدام العزم المركزي الرابع بعد تخليصه من وحدات القياس بقسمته على  $\sigma^4$ . ويمكن تعريف مقياس للتفرطح - نسميه معامل التفرطح (Coefficient of Kurtosis) - كما في العلاقة التالية:

$$(3.7.1): \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

وهو يستخدم لقياس درجة تفرطح التوزيع في جوار ما حول قمته. وفي التوزيع المعتاد - الذي نقيس التفرطح بالمقارنة له - نجد أن  $\beta_2 = 3$  كما يتضح من مثال (3 - 5 - 4) - وحيث أننا نقيس درجة التفرطح عن التوزيع المعتاد لذلك فإننا عادة نستخدم الكمية  $(\beta_2 - 3)$  لقياس التفرطح بدلا من  $\beta_2$  - ويكون معامل التفرطح هو:

$$(3.7.2): \gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

وعندما تكون  $\gamma_2$  موجبة فإن ذلك يدل على أن منحنى التوزيع أكثر تحديبا وأعلى قمة من التوزيع المعتاد في جوار ما حول المنوال (حول القمة) - أي أن منحنى التوزيع

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

أقل تفرطحاً من التوزيع المعتاد - والعكس عندما تكون  $\gamma_2$  سالبة يكون منحنى التوزيع أكثر تفرطحاً من التوزيع المعتاد. وتفسير ذلك أن الانحرافات عن الوسط عندما تكون مرفوعة إلى القوة الرابعة أو الثانية فإنها تكون موجبة في الحالتين، في حين أن القوة الرابعة تزيد الانحرافات الكبيرة بصورة أكثر تضخماً من القوة الثانية - وحيث أن السطرطح ينظر له حول المنوال (القمة) - فإذا كانت القمة مرتفعة والمنحنى عند القمة رفيع Slim ومنديب Sharply Peaked كان معنى ذلك أن مجموعة قيم المتغير الموجودة في جوار حول المنوال (حول هذه القمة) أقل (عدداً) من بقية قيم المتغير - وبالتالي تكون غالبية قيم المتغير (The Bulk) منطرفة إلى حد ما عن القمة ومنشرة عند طرفي التوزيع مما ينتج عنه تضخم النسبة  $\mu_4/\mu_2^2$ . وبناء على ذلك كلما كان التوزيع أكثر ندباً وارتفاعاً عند القمة وذيادة أكثر طولا كلما كان العزم المركزى الرابع أكثر تضخماً بالمقارنة بالعزم المركزى الثانى أى كلما كانت النسبة  $\mu_4/\mu_2^2$  كبيرة.

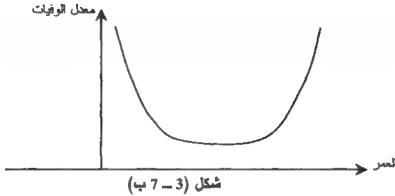
ومن الناحية النظرية قدم كارل بيرسون (K. Pearson) الكميّتان التاليتان:

$$(3.7.3): \beta_{2n} = \frac{\mu_{2n+2}}{\mu_2^{n+1}} \quad ; \quad \beta_{2n+1} = \frac{\mu_{2n+3}}{\mu_2^{n+3}}$$

بوضع  $n=0$  فى  $\beta_{2n+1}$  نحصل على  $\beta_1$  كما فى (3.6.8). وبوضع  $n=1$  فى  $\beta_{2n}$  نحصل على  $\beta_2$  كما فى (3.7.1) والكميتان  $\beta_{2n+1}$  و  $\beta_{2n}$  إن كانتا لا تستخدمان بصفة عامة إلا أنهما قد تصادفا القارئ فى بعض الدراسات الإحصائية. والكميتان  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  تربط بينهما العلاقة (3.5.22c).

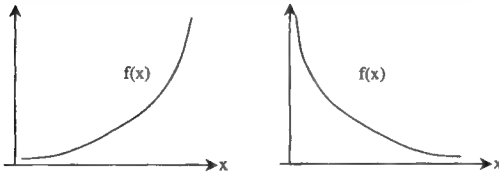
**ملاحظة (3-7 أ):** تعرفنا على المنحنيات المتماثلة فى ملاحظة (2-12-4) والشكل (3-6 أ) الذى يمثل منحنى متماثل، كما تعرفنا فى البند الحالى على المنحنيات وحيدة المنوال ذات الالتواء الموجب وذات الالتواء السالب كما فى شكل (3-6 ب) و(3-6 جـ). وتعرفنا كذلك على المنحنيات وحيدة المنوال المفرطة والمدمبة، ولكن هناك منحنيات كثيرة أخرى منها المنحنى الذى على شكل حرف U ويسمى المنحنى ذو الشكل "U" U- Shaped Curve. كما يسمى أيضاً المنحنى ذو المنوال المعكوس حيث أن له نهاية صفرى واحدة (وليس له قمة) ومن أمثلة ذلك المنحنى الذى يمثل معدل الوفيات حيث يكون مرتفعاً فى فئات العمر الصغيرة ثم يأخذ فى الانخفاض مع زيادة العمر حتى يصل نهايته الصفرى فى سن الشباب ثم يأخذ فى التزايد مرة أخرى مع زيادة العمر.

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم



منحنى ذو شكل U (U - Shaped Curve)

كما توجد منحنيات متعددة المنوال ويوجد كذلك منحنيات أخرى مثل منحنى الفرع الواحد كما في الظواهر التي تكون تكراراتها كبيرة عند القيم الصغرى للظاهرة وصغيرة عند القيم الكبرى أو العكس كما في الشكل التالي:



شكل (3 - 7 جـ)

منحنى ذو فرع واحد

ويوجد الكثير غير ذلك من المنحنيات ولكن نلفت النظر إلى أن دراستنا للتواء والتفرطح تناولت المنحنيات وحيدة المنوال فقط سواء كانت متماثلة أو بعيدة عن التماثل.

مثال (3 - 7 أ):  $X$  متغير له توزيع جاما دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = x e^{-x} \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

لوجد درجة التواء هذا للتوزيع.

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(الحل)

العزم الرأسي حول الصفر للمتغير  $X$  هو:

$$\mu'_r = \int_0^{\infty} x^{r+1} e^{-x} dx = \Gamma(r+2)$$

إذن:

$$\mu'_1 = \Gamma(3) = 2 ; \mu'_2 = 6 ; \mu'_3 = 24$$

ومنها نحصل على العزوم المركزية باستخدام العلاقة (3.5.15) حيث نجد أن:

$$\mu_2 = 2 ; \sigma = \sqrt{2} ; \mu_3 = 4$$

ومن العلاقة (3.6.7) نجد أن معامل الالتواء

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{4}{(\sqrt{2})^3} = 1.414$$

وحيث أن  $\gamma_1$  موجبة - إذن التوزيع موجب الالتواء - وهذا يدل على أن ذيله الأطول ناحية اليمين من المنوال ومنوال هذا التوزيع يمكن إثبات أنه  $x_0 = 1$ .

مسألة (3-7 ب):  $X$  متغير عشوائي له توزيع "ت" بدرجات حرية  $n = 5$  ودالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5} \beta(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})} \frac{1}{[1 + \frac{x^2}{5}]^3} ; -\infty \leq x \leq \infty$$

أوجد معامل التقعر لهذا التوزيع.

(الحل)

يمكن إثبات أن العزم الرأسي حول الصفر لهذا التوزيع هو:

$$\mu'_r = 0$$

عندما  $r$  عدد فردي أقل من 5

$$= \frac{5^{\frac{1}{2}} \beta[\frac{5-r}{2}, \frac{r+1}{2}]}{\beta(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})}$$

عندما  $r$  عدد زوجي أقل من 5

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

ولكن عندما  $r \geq 5$  فإن  $\mu'_r$  يكون غير موجود. ننظر العزم الرأسي لتوزيع "ت" في باب التوزيعات المستمرة. إذن العزوم الأربعة الأولى حول الصفر هي:

$$\mu'_1 = 0, \quad \mu'_2 = \frac{2}{3}, \quad \mu'_3 = 0, \quad \mu'_4 = 25$$

وهي نفسها العزوم المركزية لأن التوقع  $\mu'_1 = 0$ . ومن العلاقة (2. 7. 3) نجد أن معامل التفرطح

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{25}{(\frac{2}{3})^2} - 3 = 6$$

وبما أن  $\gamma_2$  موجبة إذن التوزيع أقل تفرطحاً حول المنوال (أكثر تحديباً) من التوزيع المعتاد.

### (3 - 8) عزوم المتغيرات العشوائية الثلاثية المشتركة (العزوم الثنائية المشتركة):

#### Moments of Two-dimensional Random Variables (Joint Moments):

يمكن تعميم النتائج السابقة الخاصة بالمتغير المفرد إلى حالة المتغيرات المتعددة المشتركة، ولسهولة العرض نبدأ بحالة متغيران عشوائيان مشتركان. وعزوم المتغيرات العشوائية الثنائية المشتركة تسمى بالعزوم الثنائية المشتركة، أو بالعزوم الثنائية. بفرض أن  $(X, Y)$  متغير عشوائي ثنائي مشترك دالة توزيعه الاحتمالي المشتركة  $F(x, y)$  و  $g(x, y)$  دالة وحيدة القيمة في  $x, y$  فإن توقع للمتغير  $g(X, Y)$  يعرف بأنه:

$$(3.8.1): E[g(X, Y)] = \int_{R_2} g(x, y) dF(x, y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

إذا كان  $(X, Y)$  متغير مستمر ودالة كثافة احتماله المشتركة  $f(x, y)$ .

$$= \sum_i \sum_k g(x_i, y_k) P(x_i, y_k)$$



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

إذا كان  $(X, Y)$  متغير منقطع ودالة احتماله المشتركة  $P_{ik} = P(x_i, y_k)$  عندما  $X = x_i, Y = y_k$  وذلك بشرط أن يكون التكامل (أو المجموع) السابق متقارب تقارب مطلق كما سبق بيان ذلك في حالة المتغير المفرد. وإذا وضعنا:

$$g(X, Y) = (X - a)^r (Y - b)^s$$

ففي العلاقة (3. 8. 1) فإن القيمة المتوقعة التي نحصل عليها تسمى بالعزم الثنائي المشترك من الدرجة  $r + s$  حول النقطة  $a$  للمتغير  $X$  والنقطة  $b$  للمتغير  $Y$ ، كما تسمى أيضاً "بالعزم المتقاطع" "The Product Moment" من الدرجة  $r + s$  حول النقطة  $(a, b)$  ونرمز له بالرمز  $\mu'_{rs}(a, b)$  إذن:

$$\begin{aligned} (3. 8. 2): \mu'_{rs}(a, b) &= E[(X - a)^r (Y - b)^s] \\ &= \int_{R_2} (x - a)^r (y - b)^s dF(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r (y - b)^s f(x, y) dx dy \\ &\text{إذا كان } (X, Y) \text{ متغير مستمر.} \\ &= \sum_i \sum_j (x_i - a)^r (y_j - b)^s P_{ik} \\ &\text{إذا كان } (X, Y) \text{ متغير منقطع.} \end{aligned}$$

فإذا كانت  $E(X) = a$  و  $E(Y) = b$  في العلاقة السابقة نحصل على العزم الثنائي المركزي من الدرجة  $(r + s)$  ونرمز له بالرمز  $\mu_{rs}$  (بدون وضع شرطة على الحرف  $\mu$ ) وبذلك يكون:

$$\begin{aligned} (3. 8. 3): \mu_{rs} &= E\{[X - E(X)]^r [Y - E(Y)]^s\} \\ &= \int_{R_2} [x - E(X)]^r [y - E(Y)]^s dF(x, y) \\ &= \int_x \int_y [x - E(X)]^r [y - E(Y)]^s f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

إذا كان  $(X, Y)$  متغير مستمر .

$$= \sum_i \sum_k [x_i - E(X)]^r [y_k - E(Y)]^s P_{ik}$$

إذا كان  $(X, Y)$  متغير منقطع.

والنقطة التي إحداثيها  $X = E(X) = m_1$  و  $Y = E(Y) = m_2$  أى النقطة  $[E(X), E(Y)]$  تكون هى مركز النقل للتوزيع الثنائى. والعزوم المركزية  $\mu_{rs}$  هى العزوم حول مركز النقل.

أما إذا كانت  $a=b=0$  فى العلاقة (3. 8. 2) أو  $E(X)=E(Y)=0$  فى العلاقة (3. 8. 3) فإننا نحصل على العزم الثنائى المشترك حول الصفر من الدرجة  $r+s$  ونرمز له بالرمز  $\mu'_{rs}$  (بوضع شرطة فوق الحرف  $\mu$ ) وبذلك يكون:

$$(3. 8. 4): \mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \int_{R_2} x^r y^s dF(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f(x, y) dx dy$$

إذا كان  $(X, Y)$  متغير مستمر

$$= \sum_i \sum_k x_i^r y_k^s P_{ik}$$

إذا كان  $(X, Y)$  متغير منقطع.

من (2. 21. 1)

$$= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} x_i^r y^s P_{i1}(x_i) f_{21}(y | x_i) dy$$

إذا كان  $(X, Y)$  متغير مختلط من النوع الأول

ومن (2. 21. 18a)

$$= \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} x_i^r y^s f_2(y) P_{i2}(x_i | y) dy$$

إذا كان  $(X, Y)$  متغير مختلط من النوع الثانى.

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزم

إذا كان  $(X, Y)$  متغير مشترك دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x, y)$  قد يكون مطلوب معرفة توقع مجموع المتغيرين (أو المركبتين)  $X$  و  $Y$  وكذلك توقع حاصل ضرب هذين المتغيرين وذلك إذا كان  $X$  و  $Y$  مستقلان أو غير مستقلان. فإذا فرضنا أن القيم المتوقعة  $E(X')$  و  $E(Y')$  قيم موجودة (أي محدودة)، سنحاول إيجاد توقع المتغير العشوائى  $Z = X' + Y'$  وكذلك توقع المتغير العشوائى  $U = X'Y'$  وذلك دون افتراض أن المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان.

إذن بوضع:

$$g(X, Y) = X' + Y'$$

ففى العلاقة (3. 8. 1) لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة  $s, r$  التى يكون عندها  $E(X')$  و  $E(Y')$  موجودة نحصل على:

$$\begin{aligned} (3. 8. 5): E(Z) &= E(X' + Y') = \int_x \int_y dF(x, y) + \int_y \int_x dF(x, y) \\ &= \int_x x' dF_1(x) + \int_y y' dF_2(y) = E(X') + E(Y') \end{aligned}$$

وكما نعلم تتحول علامات التكامل إلى المجموع فى حالة المتغير المنقطع.  
من العلاقة السابقة يتضح أن:

$$E(X' + Y') = E(X') + E(Y')$$

وذلك إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان أو غير مستقلان. ولكن الوضع يختلف فى حالة توقع المتغير  $U = X'Y'$ ، إذ أن توقع حاصل الضرب  $X'Y'$  ليس من الضروري أن يساوى حاصل ضرب التوقعين  $E(X')$  و  $E(Y')$  إلا إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان. فإذا كان  $X$  و  $Y$  مستقلان فيمكن إثبات أن:

$$(3. 8. 6): E(U) = E(X'Y') = E(X') \cdot E(Y')$$

وذلك بوضع:

$$g(X, Y) = X'Y'$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

في العلاقة (3. 8. 1) لجميع الأعداد الصحيحة غير السالبة  $s, r$  التي يكون عندها التوقعات  $E(X^r)$  و  $E(Y^s)$  موجودة - نحصل على:

$$E(X^r Y^s) = \iint_{x,y} x^r y^s dF(x,y)$$

فإذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان فإن  $F(x,y) = F_1(x) F_2(y)$  وبالتالي فإن العلاقة السابقة تأخذ الصورة التالية:

$$E(X^r Y^s) = \int x^r dF_1(x) \int y^s dF_2(y) = E(X^r) \cdot E(Y^s)$$

مما سبق يتضح أنه إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان فإن العزم الثاني ذو الدرجة  $r+s$  حول الصفر  $\mu'_{r+s}$  يمكن وضعه في صورة حاصل ضرب عاملين على النحو التالي:

$$(3. 8. 7): \mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = E(X^r) \cdot E(Y^s) = \mu'_{r0} \cdot \mu'_{0s}$$

حيث  $\mu'_{r0}$  هو العزم الرأسي حول الصفر للمتغير  $X$  و  $\mu'_{0s}$  هو العزم من الدرجة  $s$  حول الصفر للمتغير  $Y$ .

من العلاقة (3. 8. 4) نجد أن:

$$(3. 8. 8): \begin{cases} \mu'_{10} = E(X) = m_1 \\ \mu'_{01} = E(Y) = m_2 \end{cases}$$

وهما عزمان من الدرجة الأولى حول الصفر - ويمكن كتابتهما في الصورة  $\mu_{10}$  و  $\mu_{01}$  بشون شرطة - حيث أن العزوم المركزية التي من الدرجة الأولى المناظرة لهما تساوي الصفر كما يتضح من المعادلات (3. 8. 10) التالية - كما يستحسن أحياناً أن نكتبهما مستخدمين الرمز  $m_1$  و  $m_2$  على الترتيب كما في العلاقات (3. 8. 8) السابقة.

ومن العلاقة (3. 8. 4) أيضاً نجد أن:

$$(3. 8. 9): \begin{cases} \mu'_{20} = E(X^2) \\ \mu'_{02} = E(Y^2) \end{cases}$$

وهما عزمان من عزوم الدرجة الثانية حول الصفر.

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

ومن العلاقة (3. 8. 3) نجد أن:

$$(3. 8. 10): \begin{cases} \mu_{10} = E(X - \mu'_{10}) = 0 \\ \mu_{01} = E(Y - \mu'_{01}) = 0 \end{cases}$$

وهما عزمان مركزيان من الدرجة الأولى — كما نجد من عزوم الدرجة الثانية من العلاقة (3. 8. 3) أن:

$$(3. 8. 11): \begin{cases} \mu_{20} = E(X - \mu'_{10})^2 = \mu'_{20} - \mu_{10}^2 = \sigma_1^2 \\ \mu_{02} = E(Y - \mu'_{01})^2 = \mu'_{02} - \mu_{01}^2 = \sigma_2^2 \end{cases}$$

حيث  $\mu_{20}$  هو تباين  $X$  — أو العزم المركزي الثاني للمتغير  $X$  — وبالمثل  $\mu_{02}$  هو تباين  $Y$ . ونرمز لهما كذلك بالرمزين  $V(x)$  و  $V(y)$  على الترتيب و  $\sigma_1 = \sqrt{V(x)}$  و  $\sigma_2 = \sqrt{V(y)}$  هما الانحراف المعياري لكل من  $X$  و  $Y$ .

كما أن تباين  $X$  و  $Y$  (Covariance of  $X$  and  $Y$ ) يعتبر من العزوم المركزية من الدرجة الثانية التي يمكن الحصول عليها من العلاقة (3. 8. 3) بوضع  $r = s = 1$  فنحصل على تباين  $X$  و  $Y$  في الصورة التالية:

$$(3. 8. 12): \text{Cov}(X, Y) = \mu_{11} = E[X - E(x)][Y - E(y)] \\ = E(XY) - E(X)E(Y)$$

ومن علاقة (3. 8. 4)

$$= \mu'_{11} - \mu'_{10} \mu'_{01}$$

وأحياناً نستخدم الرمز  $V_{12}$  للإشارة إلى تباين  $X$  و  $Y$ . وباستخدام العلاقة (3. 8. 12) السابقة كتعريف للتباين نلاحظ أن:

$$(3. 8. 13): \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$V_{12} = V_{21}$$

فإذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان فترى من العلاقة (3. 8. 7) أن:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وبناء على ذلك نستنتج من العلاقة (3. 8. 12) النتيجة التالية:

إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران مستقلان فإن:

$$(3. 8. 14): \text{Cov}(X, Y) = 0$$

ملاحظة (3 - 8): العلاقة (3. 8. 14) توضح أنه إذا كان  $X$  و  $Y$  مستقلان يكون  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  ولكن العكس قد لا يكون صحيحاً إذ أن الشرط  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  لا يترتب عليه ضرورة أن يكون المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان. والمثال التالي يوضح حالة متغيران  $X$  و  $Y$  غير مستقلان بالرغم من أن تغيريهما يساوى الصفر.

مثال (3 - 8): نفرض أن  $(X, Y)$  متغير عشوائي يحقق العلاقة الدالية  $Y = X^2$  باحتمال يساوى الواحد الصحيح. فإذا كان المتغير  $X$  له توزيع احتمالي متماثل حول النقطة  $x = 0$  وعزومه الثلاثة الأولى حول هذه النقطة ( $x = 0$ ) موجودة، سنجد من ملاحظة (3 - 5 - 3 ب) أن:  $E(XY) = E(X^3) = 0$  ;  $E(X) = 0$  وبناء على ذلك نجد من (3. 8. 12) أن:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

بينما  $Y$  يمكن تحديدها تماماً من  $X$  باحتمال واحد صحيح - أي أن  $X$  و  $Y$  غير مستقلان بالرغم من أن تغيريهما يساوى الصفر.

نفرض أن  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان تباينهما موجود ولنرمز لهما بالرمزين  $V(X)$  و  $V(Y)$  والمتغير العشوائي:  $Z = X + Y$  إذن من العلاقة (3. 3. 2) نجد أن:

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(X + Y) = E(X + Y)^2 - [E(X + Y)]^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - [E(Y)]^2 - 2E(X)E(Y) \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \end{aligned}$$

إذن نصل إلى العلاقة التالية:

$$(3. 8. 15): V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

فإذا كان  $X$  و  $Y$  مستقلان نجد باستخدام العلاقة (3. 8. 14) أن:

$$(3. 8. 16): V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

وبنفس الإثبات السابق - إذا كان  $a$  و  $b$  مقداران ثابتان يمكن إثبات أن:

$$(3. 8. 17): V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

إذا كان الانحرافان المعياريان  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  للمتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  موجودان ومختلفان عن الصفر فيمكن تعريف ثابت (أو بارامتر) من أهم الثوابت التي تميز المتغير الثنائي  $(X, Y)$  هو "معامل الارتباط" "Coefficient of Correlation" بين  $X$  و  $Y$  ونرمز له بالرمز  $\rho(x, y)$  أو مجرد الحرف  $\rho$  عندما يكون من الواضح أن المتغيران هما  $X$  و  $Y$  وأحياناً نستخدم الرمز  $\rho_{xy}$  أو  $\rho_{12}$  حيث يشير الدليل 1 إلى المتغير الأول  $X$  والدليل 2 إلى المتغير الثاني  $Y$ . ويعرف معامل الارتباط  $\rho_{xy}$  بين المتغيرين  $X$  و  $Y$  بالعلاقة (3. 8. 18) التالية ويسمى بـ "معامل ارتباط بيرسون" أو "معامل الارتباط ذو العزم التوضيبي" نسبة لوجود العزم  $\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y)$  في بسط معامل الارتباط كما يلي:

$$(3. 8. 18): \rho_{xy} = \frac{E[X - m_1][Y - m_2]}{\sqrt{E(X - m_1)^2 \cdot E(Y - m_2)^2}}$$

$$= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

حيث  $E(Y) = m_2$  و  $E(X) = m_1$ .

**ملاحظة (3 - 8 ب):** إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان يكون  $\mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0$  وبالتالي يكون  $\rho = 0$  ولكن العكس غير صحيح - كما سبق بيان ذلك في ملاحظة (3 - 8 أ) - لذلك عندما يكون  $\rho = 0$  نقول أن المتغيران  $X$  و  $Y$  غير مرتبطين *Uncorrelated* (الفرق بين عدم الارتباط والاستقلال)، وهذا يوضح أن الاستقلال أقوى من عدم الارتباط. ومعامل الارتباط يحقق الخاصية الأساسية التالية:

$$(3. 8. 19): \begin{cases} -1 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \rho^2 \leq 1 \end{cases}$$

ويمكن إثبات العلاقة السابقة كما يلي:

لأي عددين حقيقيين  $t$  و  $u$  نجد أن:

$$E[t(X - m_1) + u(Y - m_2)]^2 \geq 0$$

حيث  $E(Y) = m_2$  و  $E(X) = m_1$ .

$$\therefore t^2 E(X - m_1)^2 + 2tu E(X - m_1)(Y - m_2) + u^2 E(Y - m_2)^2 \geq 0$$

$$\therefore t^2 \sigma_1^2 + 2tu \mu_{11} + u^2 \sigma_2^2 \geq 0$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وهذا يترتب عليه أن

$$(3.8.20): \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{11}^2 \geq 0$$

أو

$$-\sigma_1 \sigma_2 \leq \mu_{11} \leq \sigma_1 \sigma_2$$

أى أن:

$$-1 \leq \frac{\mu_{11}}{\sigma_1 \sigma_2} \leq 1$$

وهذا يثبت صحة المتباينة (3.8.19).

إذا كان  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  (تباينى  $X$  و  $Y$ ) موجودان وموجبان، حيث:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mu_{11} = v_{12} = v_{21}$$

$$\sigma_1^2 = V(X) = v_{11} ; \sigma_2^2 = V(Y) = v_{22}$$

إن يمكن أن نضع عزوم الدرجة الثانية للمتغير الثنائى المشترك  $(X, Y)$  فى شكل مصفوفة تسمى "مصفوفة التغاير" للمتغير الثنائى المشترك  $(X, Y)$ ، أو "مصفوفة عزوم الدرجة الثانية" للمتغير  $(X, Y)$  The Covariance Matrix or The Matrix of Second-order Moments ونرمز لها بالرمز  $V_2(X, Y)$  أو مجرد  $V_2$  - إذا كان واضحاً من سياق العرض أن مصفوفة التغاير للمتغيرين  $X, Y$  - وذلك كما يلى:

$$(3.8.21a): V_2(X, Y) = V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

وهى مصفوفة متماثلة عناصر قطرها الرئيسى تباينى  $X$  و  $Y$  وكل من العنصرين الآخرين هو تغاير  $X$  و  $Y$ . فإذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان تكون  $V_{12} = V_{21} = 0$  وتكون مصفوفة التغاير مصفوفة قطرية. ويمكن إثبات أن محدد مصفوفة التغاير دائماً يساوى كمية غير سالبة، إذ نجد من علاقة (3.8.21a) أن محدد مصفوفة التغاير هو:

$$(3.8.21b): |V_2| = v_{11} v_{22} - v_{12}^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{11}^2 \geq 0$$

وهذه كمية غير سالبة كما يتضح من العلاقة (3.8.20) ولذا نقول أن مصفوفة التغاير مصفوفة غير سالبة.



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وكما قدمنا العزوم المشتركة العادية  $\mu_n$  و  $\mu'_n$  نقدم أيضاً العزوم المشتركة المطلقة والعاملية. يعرف العزم المشترك المطلق  $v'_n(a, b)$  من الدرجة  $r+s$  حول النقطة  $(a, b)$  فى المستوى  $R_2$  بأنه:

$$(3.8.22): v'_n(a, b) = E(|X - a|^r \cdot |Y - b|^s)$$

والعزم المشترك المطلق  $v'_n$  من الدرجة  $r+s$  حول النقطة  $(0,0)$ :

$$(3.8.23): v'_n = E(|X|^r \cdot |Y|^s)$$

والعزم المشترك المركزى المطلق  $v_n$  من الدرجة  $r+s$ :

$$(3.8.24): v_n = E(|X - m_1|^r \cdot |Y - m_2|^s)$$

حيث  $E(Y) = m_2$  و  $E(X) = m_1$ .

كما أن العزم العاملى المشترك من الدرجة  $r+s$  حول النقطة  $(a, b)$  يعرف بالعلاقة:

$$(3.8.25): \mu'_{[r][s]}(a, b) = E[(X - a)^{[r]} \cdot (Y - b)^{[s]}]$$

$$; [r] = r(r-1)\dots \times 2 \times 1, \quad [s] = s(s-1)\dots \times 2 \times 1$$

والعزم المشترك العاملى من الدرجة  $r+s$  حول النقطة  $(0,0)$ :

$$(3.8.26): \mu'_{[r][s]} = E\{X^{[r]} Y^{[s]}\}$$

والعزم المركزى العاملى المشترك من الدرجة  $r+s$ :

$$(3.8.27): \mu_{[r][s]} = E\{(X - m_1)^{[r]} \cdot (Y - m_2)^{[s]}\}$$

حيث  $E(Y) = m_2$  و  $E(X) = m_1$  والقوى  $[r]$  و  $[s]$  هما  
 $[r] = r(r-1)\dots \times 2 \times 1, \quad [s] = s(s-1)\dots \times 2 \times 1$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

#### (3 - 9) عزوم المتغيرات العشوائية الشرطية (العزوم الشرطية):

#### Moments of Conditional Random Variables (Conditional Moments):

إذا كان  $(X, Y)$  متغير ثنائي مشترك دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x, y)$  فيمكن تقديم العزوم الشرطية لأحد المتغيرين  $X$  (أو  $Y$ ) عندما يأخذ المتغير الآخر قيمة ثابتة وذلك في الحالات التالية:

أولاً: إذا كان  $(X, Y)$  من النوع المنقطع.

ثانياً: إذا كان  $(X, Y)$  من النوع المستمر.

ثالثاً: إذا كان  $(X, Y)$  من النوع المختلط فيه المتغير المستقل منقطع والتابع مستمر.

رابعاً: إذا كان  $(X, Y)$  من النوع المختلط فيه المتغير المستقل مستمر والتابع منقطع.

وسنعرض كل حالة من هذه الحالات على التوالي.

أولاً: العزوم الشرطية عندما يكون  $(X, Y)$  من النوع المنقطع:

نفرض أن المتغير العشوائى الثنائى  $(X, Y)$  من النوع المنقطع، ويأخذ القيم  $(x_i, y_k)$  باحتمالات  $P_{ik}$ ، إذن من (2. 17. 2) و (3. 2. 7b) يمكن تعريف التوقع الشرطى للدالة  $g(X, Y)$  عندما  $X = x_i$  بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} (3. 9. 1): E[g(X, Y) | X = x_i] &= \sum_k g(x_i, y_k) P(y_k | x_i) \\ &= \sum_k g(x_i, y_k) \frac{P_{ik}}{P_{i.}} \end{aligned}$$

حيث  $P_{i.} = \sum_k P_{ik}$  هى احتمال أن  $X = x_i$ ، وذلك طبعاً بشرط أن يكون

المجموع السابق متقارب تقارب مطلق - (والتقارب المطلق الذى يعتبر شرط لازم لتعريف التوقع سنعتبر دائماً أنه مفترض دون الحاجة إلى ذكر ذلك) - وبوضع  $g(X, Y) = Y$  فى العلاقة (3. 9. 1) نحصل على التوقع الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$ :

$$(3. 9. 2): E[Y | X = x_i] = E(Y | x_i) = \sum_k y_k \frac{P_{ik}}{P_{i.}}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

والمتمغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  يمكن أن نرمز له بالرمز  $Y | x_i$  ويسمى بالمتغير الشرطى أو المتمغير التابع أما المتمغير  $X$  فيسمى بالمتغير المستقل. كما أن التوقع الشرطى  $E(Y | x_i)$  هو توقع التوزيع الاحتمالى الشرطى  $P(y | x_i)$  وبالتالى فهو الإحداثى الرأسى للنقطة التى تمثل مركز ثقل هذا التوزيع الاحتمالى بينما  $x_i$  هو الإحداثى الأفقى. أى أن النقطة  $[x_i ; E(Y | x_i)]$  هى مركز ثقل التوزيع الاحتمالى الشرطى  $P(y | x_i)$ . وعندما تأخذ  $X$  كل قيمها الممكنة  $x_1, x_2, \dots$  نحصل على مجموعة من النقاط  $[x_i, E(Y | x_i)]$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$  تمثل المحل الهندسى لخط فى المستوى  $R_2$  يسمى خط انحدار  $Y$  على  $X$  أو خط انحدار متوسطات  $Y$  على  $X$  وهو ما سوف نعلمه فى الباب الرابع. وبوضع  $g(X, Y) = Y^r$  فى العلاقة (3. 9. 1) حيث  $r = 1, 2, \dots$  نحصل على التوقع الشرطى للمتمغير  $Y^r$  عندما  $X = x_i$  (أى للمتمغير الشرطى  $Y^r | x_i$ ) وهو العزم الشرطى من الدرجة  $r$  وذلك فى الصورة التالية:

$$(3. 9. 3): E[Y^r | X = x_i] = E(Y^r | x_i) = \sum_k y_k^r \frac{P_{ik}}{P_i}$$

ويمكن الحصول على العزوم الشرطية حول التوقع الشرطى للمتمغير  $Y^r$  عندما  $X = x_i$  وذلك بوضع  $g(X, Y) = [Y - E(Y | x_i)]^r$  فى (3. 9. 1) فنحصل على:

$$(3. 9. 4): E\{[Y - E(Y | x_i)]^r | X = x_i\} = \sum_k [y_k - E(Y | x_i)]^r \frac{P_{ik}}{P_i}$$

وعلى ذلك فإن التباين الشرطى للمتمغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  يمكن الحصول عليه من العلاقة السابقة عندما  $r = 2$ :

$$(3. 9. 5): V(Y | x_i) = E\{[Y - E(Y | x_i)]^2 | x_i\} \\ = \sum_k [y_k - E(Y | x_i)]^2 \frac{P_{ik}}{P_i}$$

والتباين الشرطى  $V(Y | x_i)$  يسمى أحيانا بتباين الباقي للمتمغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  — أنظر الباب الرابع "الانحدار" — كما يسمى أيضاً بالعزم الثانى الشرطى حول التوقع الشرطى. وتوجد علاقة هامة بين التوقع والتباين الشرطيين نعلمهما فى الملاحظة التالية.

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

ملاحظة (3 - 9 أ): العزم الشرطي الثاني يكون أصغر ما يمكن إذا كان محسوباً حول المتوقع الشرطي. أي أن التباين الشرطي  $V(Y | x_i)$  هو النهاية الصغرى للعزم الشرطي الثاني.

ويمكن إثبات أن الملاحظة السابقة صحيحة سواء كان المتغيران  $X$  و  $Y$  من النوع المنقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه وإثبات ذلك متروك للطالب. ومما هو جدير بالذكر أن العزوم الشرطية للمتغير الشرطي  $Y | x_i$  كل منها يعتبر كمية ثابتة عندما  $X = x_i$  - فمثلاً المتوقع الشرطي  $E(Y' | x_i)$  يعتبر كمية ثابتة عندما  $X = x_i$  - وحيث أن المتغير العشوائي  $X$  يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  إذن يمكن النظر إلى الكميات الثابتة:

$$E(Y' | x_1), E(Y' | x_2), \dots$$

على أنها متغير عشوائي في  $x$  (أو كمية تتغير بتغير  $x$ ) نرمز له بالرمز  $\varphi(x) = E(Y' | x)$  وإن هذا المتغير يأخذ القيم  $\varphi(x_i) = E(Y' | x_i)$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$  باحتمالات  $P_i = P(x_i) = \Pr[X = x_i]$  فيكون توقع هذا المتغير هو:

$$E[\varphi(x)] = E[E(Y' | x)] = \sum_i [E(Y' | x_i)] P_i$$

ومن (3.9.3)

$$= \sum_i \left[ \sum_k y'_k P(y_k | x_i) \right] P_i$$

حيث  $P_i = P(x_i)$  لأن من (2.17.7)

$$= \sum_i \sum_k y'_k P(x_i, y_k) = \sum_k y'_k P(y_k) = E(Y')$$

وهذا يثبت أن توقع العزم الشرطي  $[E(Y' | x)]$  يساوى العزم العادي  $E(Y')$  ويمكن صياغة ذلك في العلاقة التالية:

$$(3.9.6): E[E(Y' | x)] = E(Y')$$

العلاقة (3.9.3) تعطي عزوم المتغير الشرطي  $Y'$  لجميع قيم  $r = 1, 2, \dots$  عندما يأخذ المتغير المستقل  $X$  قيمة ثابتة معينة  $x_i$ ، ونقدم فيما يلي صيغة لعزوم المتغير الشرطي  $Y'$  لجميع قيم  $r = 1, 2, \dots$  عندما يأخذ المتغير المستقل  $X$  أي قيمة ثابتة معينة تمثل إحدى عناصر المجموعة  $A$  (أي عندما  $X \in A$ ) حيث  $A$  مجموعة جزئية من فراغ

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

المتغير  $X$ . فإذا كانت  $A$  مجموعة جزئية من نقاط الاحتمال  $x_1, x_2, \dots$  للمتغير  $X$  فإن من (3. 9. 3) نجد أن:

$$\begin{aligned} E[Y' | X \in A] &= \sum_k y'_k \Pr[Y = y_k | X \in A] \\ &= \sum_k y'_k \frac{\Pr[Y = y_k ; X \in A]}{\Pr[X \in A]} \end{aligned}$$

ومن (2. 14. 4)

$$\begin{aligned} &= \sum_k y'_k \frac{\sum_{j: x_j \in A} P_{jk}}{\sum_{j: x_j \in A} P_j} \\ &= \sum_{i: x_i \in A} \left[ \sum_k y'_k \left( \frac{P_{ik}}{P_i} \right) \right] \cdot \left( \frac{P_i}{\sum_{j: x_j \in A} P_j} \right) \end{aligned}$$

ومن علاقة (3. 9. 3)

$$= \sum_{i: x_i \in A} [E(Y' | x_i)] \frac{P_i}{\sum_{j: x_j \in A} P_j}$$

الدالة  $\left( \frac{P_i}{\sum_{j: x_j \in A} P_j} \right)$  تعتبر دالة احتمال لتوزيع مبدور في المدى  $A$ . إذن الطرف الأيمن من العلاقة السابقة هو:

$$E[E(Y' | x) | X \in A]$$

وهذا يمكن صياغته في العلاقة التالية:

$$(3. 9. 7): E[E(Y' | x) | X \in A] = E(Y' | X \in A)$$

سبق تعريف التباين الشرطي بالعلاقة (3. 9. 5) وهو من أهم العزوم الشرطية ويمكن وضعه في الصورة التالية:

$$(3. 9. 8): V(Y | x_i) = E(Y^2 | x_i) - [E(Y | x_i)]^2$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وإذا كان  $V(Y)$  هو التباين الكلي للمتغير  $Y$  فيمكن إثبات أن:

$$(3.9.9): V(Y) = E[V(Y|x)] + V[E(Y|x)]$$

(الإثبات)

من علاقة (3.9.8) نجد أن:

$$E[V(Y|x)] = E\{E(Y^2|x) - E[E(Y|x)]^2\}$$

ومن علاقة (3.9.6)

$$= E(Y^2) - E[E(Y|x)]^2$$

إذن:

$$(3.9.9a): E[V(Y|x)] = \{E(Y^2) - [E(Y)]^2\} - \{E[E(Y|x)]^2 - [E(Y)]^2\}$$

ومن (3.9.6) نعلم أن:

$$E[E(Y|x)] = E(Y)$$

$$\therefore [E(Y)]^2 = \{E[E(Y|x)]\}^2$$

وبالتعويض عن ذلك في (3.9.9a) نجد أن

$$\begin{aligned} E[V(Y|x)] &= \{V(Y)\} - \{E[E(Y|x)]^2 - (E[E(Y|x)])^2\} \\ &= V(Y) - V[E(Y|x)] \end{aligned}$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (3.9.9).

هـ. ط. ث.

إذا كانت  $g_1(Y)$  دالة في المتغير  $Y$  و  $g_2(X)$  دالة في المتغير  $X$  فيمكن من العلاقة (3.9.9) إثبات أن:

$$(3.9.10): E[g_1(Y) + g_2(X) | X = x_i]$$

$$= E[g_1(Y) | X = x_i] + E[g_2(X) | X = x_i]$$

$$= E[g_1(Y) | X = x_i] + g_2(x_i)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وكذلك:

$$(3.9.11): E[g_1(Y)g_2(X)|X=x_i] = g_2(x_i)E[g_1(Y)|X=x_i]$$

ويمكن الحصول على الصيغ المقابلة لكل الصيغ السابقة عندما يكون  $X$  هو المتغير التابع أو الشرطي و  $Y$  هو المتغير المستقل وذلك بكتابة  $X$  بدلا من  $Y$  و  $Y$  بدلا من  $X$ .

ثانياً: العزوم الشرطية عندما يكون  $(X, Y)$  من النوع المستمر:

إذا كان المتغير العشوائى المشترك  $(X, Y)$  من النوع المستمر ودالة كثافة احتماله المشتركة  $f(x, y)$  فيمكن من (2. 17. 10a) و (3. 2. 7c) تعريف التوقع الشرطى للدالة  $g(X, Y)$  عندما  $X = x$  بالعلاقة التالية:

$$(3.9.12): E[g(X, Y)|X=x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(y|x) dy$$

$$= \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dy$$

حيث  $f_1(x) > 0$ .

عندما نضع  $g(X, Y) = Y$  فى العلاقة السابقة نحصل على التوقع الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  كما يلى:

$$(3.9.13): E(Y|X=x) = E(Y|x) = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy$$

والتوقع السابق هو الإحداثى الراسى لمركز الثقل لكمية الاحتمال الناتجة عن التوزيع الاحتمالى  $f(y|x)$  المنتشرة فى الشريط المحدد بالعلاقة  $x < X < x+h$  فى المستوى  $R_2$  عندما  $h \rightarrow 0$ ، ومركز الثقل فى هذه الحالة هو النقطة  $[x; E(Y|x)]$ ، كما أن مجموعة النقط  $[x; E(Y|x)]$  فى المستوى  $R_2$  لجميع قيم  $x$  الممكنة على كل مدى المتغير  $X$  تشكل المحل الهندسى لخط فى المستوى  $R_2$  هو خط انحدار  $Y$  على  $X$  — أو خط انحدار متوسطات  $Y$  على  $X$  — ومعادلة هذا الخط هي:

$$(3.9.14a): Y = E(Y|x)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

والتوقع  $E(Y|x)$  ما هو إلا دالة في  $x$  تسمى دالة انحدار  $Y$  على  $X$ ، فلو كانت هذه الدالة تأخذ الصورة التالية:

$$(3.9.14b): E(Y|x) = a + bx$$

يكون معنى ذلك أن دالة انحدار  $Y$  على  $X$  تمثل معادلة خط مستقيم ونقول أن انحدار  $Y$  على  $X$  انحدار خطى مستقيم والثابتان  $a$  و  $b$  يسميان ثابتى الانحدار، كما أن  $a$  يسمى ثابت الانحدار و  $b$  يسمى معامل انحدار  $Y$  على  $X$ . وبوضع  $g(X, Y) = Y'$  في معادلة (3.9.12) نحصل على العزم الشرطى من الدرجة  $r$  للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  في الصورة التالية:

$$(3.9.15): E(Y'^r | X = x) = E(Y'^r | x) = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} y'^r f(x, y) dy$$

وبأسلوب مماثل لحالة المتغير المنقطع يمكن الحصول على العزم الشرطية حول التوقع الشرطى (أى العزم الشرطية المركزية) للمتغير المستمر  $Y$  عندما  $X = x$  وذلك بوضع  $g(X, Y) = [Y - E(Y|x)]^r$  في العلاقة (3.9.12) فنحصل على:

$$(3.9.16): E[Y - E(Y|x)]^r = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} [Y - E(Y|x)]^r f(x, y) dy$$

ويكون التباين الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  هو ما نحصل عليه بوضع  $r = 2$  في العلاقة السابقة ونرمز له بالرمز  $V(Y|x)$  حيث:

$$(3.9.17): V(Y|x) = E\left\{[Y - E(Y|x)]^2 | x\right\} \\ = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y|x)]^2 f(x, y) dy$$

كما أنه بضرب طرفى العلاقة (3.9.12) في  $f_1(x)$  ومكاملة الطرفين بالنسبة للمتغير  $x$  نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E[g(X, Y) | X = x] f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

أى أن:

$$(3.9.18): E[E[g(X, Y) | X = x]] = E[g(X, Y)]$$



### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

وعندما  $g(X, Y) = Y'$  في العلاقة السابقة نحصل على العلاقة المقابلة للمعادلة (3. 9. 6) وللحصول على العلاقة المقابلة للمعادلة (3. 9. 7) نفرض أن  $A$  مجموعة جزئية بورالسيه من خط الأعداد الحقيقية  $R_1$  ( $A \subset R_1$ ) حيث  $\Pr(X \in A) > 0$  إذن بأسلوب مماثل للحصول على العلاقة (3. 9. 7) ولكن باستخدام علامة التكامل بدلا من علامة المجموع نجد أن:

$$\begin{aligned} (3. 9. 19): E[Y' | X \in A] &= \frac{1}{\Pr(X \in A)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y' \frac{f(x, y)}{f_1(x)} dy \right\} \frac{f_1(x)}{\Pr(X \in A)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y' f(y|x) dy \right\} \left[ \frac{f_1(x)}{\Pr(X \in A)} \right] dx \\ \text{الدالة } \frac{f_1(x)}{\Pr(X \in A)} &\text{ تعتبر دالة كثافة احتمال لتوزيع مبدور في المدى } A \text{ إذن:} \end{aligned}$$

$$E[Y' | X \in A] = \int_{-\infty}^{\infty} \{E(Y' | x)\} \frac{f_1(x)}{\Pr(X \in A)} dx$$

إذن:

$$(3. 9. 20): E[Y' | X \in A] = E\{E(Y' | x) | X \in A\}$$

وعندما تكون  $A = R_1$  (أو عندما تكون  $A$  هي كل فراغ المتغير  $X$ ) نحصل من العلاقة السابقة على العلاقة المقابلة للمعادلة (3. 9. 6) حيث نجد من (3. 9. 19) أن:

$$E(Y' | X \in R_1) = E(Y')$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Pr(X \in R_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y' f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y' f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y' f(y|x) dy \right\} f_1(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E(Y' | x) f_1(x) dx$$

إذن:

$$(3.9.21): E(Y') = E\{E(Y' | x)\}$$

وبالمثل يمكن الحصول على العلاقة المقابلة للمعادلة (3.9.9) في الصورة التالية:

$$(3.9.22): V(Y) = E\{V(Y|x)\} + V\{E(Y|x)\}$$

وكذلك العلاقة المقابلة للعلاقة (3.9.10) في الصورة:

$$(3.9.23): E\{[g_1(Y) + g_2(X)] | X = x\} = E[g_1(Y) | x] + g_2(x)$$

والعلاقة المقابلة للعلاقة (3.9.11) في الصورة:

$$(3.9.24): E\{g_1(Y)g_2(X) | X = x\} = g_2(x)E[g_1(Y) | x]$$

ثالثاً: العزوم الشرطية عندما يكون  $(X, Y)$  متغير مختلط من النوع الأول:

ففى هذه الحالة يكون المتغير المستقل  $X$  من النوع المنقطع والمتغير التابع  $Y$  من النوع المستمر. إذن من (2.21.1) و (3.2.7c) يمكن تعريف التوقع الشرطى للدالة  $g(X, Y)$  عندما  $X = x_i$  بالعلاقة التالية:

$$(3.9.25): E[g(X, Y) | X = x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_i, y) f_{21}(y | x_i) dy$$

وبوضع  $g(X, Y) = Y$  يمكن تعريف التوقع الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  بالعلاقة التالية:

$$(3.9.26): E(Y | X = x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{21}(y | x_i) dy$$

وبوضع  $g(X, Y) = Y'$  فى (3.9.25) نحصل على العزم الشرطى من الدرجة  $r$  للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$ :

$$(3.9.27): E[Y' | X = x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_{21}(y | x_i) dy$$

### الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

ويمكن الحصول على العزوم الشرطية حول التوقع الشرطى للمتغير  $Y^r$  عندما  $X = x_i$  وذلك بوضع  $g(X, Y) = [Y - E(Y | x_i)]^r$  فى (3. 9. 25) فنحصل على:

$$(3. 9. 28): E\left\{[Y - E(Y | x_i)]^r | X = x_i\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [Y - E(Y | x_i)]^r f_{21}(y | x_i) dy$$

ويكون التباين الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  هو:

$$(3. 9. 29): V(Y | x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y | x_i)]^2 f_{21}(y | x_i) dy$$

حيث  $E(Y | x_i)$  كما فى العلاقة (3. 9. 26).

ويعتبر المتغير العشوائى  $E(Y^r | x_i)$  دالة فى  $x$  لذلك يمكن استخدام الرمز التالى:

$$\varphi(x) = E(Y^r | x)$$

وتوقع المتغير  $\varphi(x)$  هو:

$$E[\varphi(x)] = \sum_i \varphi(x_i) P_i$$

ومن (3. 9. 27)

$$E[E(Y^r | x)] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_{21}(y | x_i) dy \right] P_i(x_i)$$

ومن (2. 21. 4b)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^r f_2(y) dy = E(Y^r)$$

إن:

$$(3. 9. 30): E[E(Y^r | x)] = E(Y^r)$$

ويمكن كذلك إثبات أن العلاقة (3. 9. 7) وكذلك العلاقة (3. 9. 20) تظل صحيحة فى حالة المتغير المختلط من النوع الأول وذلك بأسلوب مشابه لما تتبع فى الإثبات السابق

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

لكل من العلاقتين المشار إليهما مع استخدام الدالة  $f(y, x_i) = f_{21}(y | x_i) P_1(x_i)$  المعطاة بالعلاقة (2. 21. 7) بدلا من الدالة  $P_{ik}$  المعطاة بالعلاقة (2. 17. 2).

ويمكن إثبات أن العلاقات (3. 9. 9) و (3. 9. 10) و (3. 9. 11) تظل صحيحة في حالة المتغير المختلط من النوع الأول وذلك بأسلوب مماثل لما سبق اقتبأه.

رابعا: العزوم للشرطية عندما يكون  $(X, Y)$  متغير مختلط من النوع الثاني:

في هذه الحالة يكون المتغير المستقل (ليكن  $Y$ ) من النوع المستمر  $(-\infty \leq Y \leq \infty)$  والمتغير التابع (ليكن  $X$ ) من النوع المنقطع (حيث  $X = x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ ). إذن من (2. 21. 19) و (3. 2. 7b) يمكن تعريف التوقع الشرطي للمتغير  $g(X, Y)$  عندما  $Y = y$  بالعلاقة التالية:

$$(3. 9. 31): E[g(X, Y) | Y = y] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y) P_{12}(x_i | y)$$

وبأسلوب مشابه لما هو متبع في الحالة السابقة (حالة المتغير المختلط من النوع الأول) - يمكن بوضع  $g(X, Y) = X$  في العلاقة (3. 9. 31)، تعريف التوقع الشرطي للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  بالعلاقة التالية:

$$(3. 9. 32): E[X | Y = y] = \sum_i x_i P_{12}(x_i | y)$$

وبوضع  $g(X, Y) = X^r$  في العلاقة (3. 9. 31) نحصل على التوقع الشرطي للمتغير  $X^r$  عندما  $Y = y$  في الصورة التالية:

$$(3. 9. 33): E(X^r | y) = \sum_i x_i^r P_{12}(x_i | y)$$

كما يمكن الحصول على العزوم للشرطية حول التوقع الشرطي للمتغير  $X^r$  عندما  $Y = y$  بوضع  $g(X, Y) = [X - E(X | y)]^r$  في العلاقة (3. 9. 31) فنحصل على:

$$(3. 9. 34): E\{[X - E(X | y)]^r | Y = y\} = \sum_i [x_i - E(X | y)]^r P_{12}(x_i | y)$$

وعندما  $r = 2$  في العلاقة السابقة نحصل على التباين الشرطي  $V(X | y)$  للمتغير المنقطع  $X$  عندما  $Y = y$  في الصورة التالية:

### الفصل الثالث - مقاييس لتزعة المركزة (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$(3.9.35): V(X|y) = \sum_i [x_i - E(X|y)]^2 P_{12}(x_i|y)$$

حيث  $E(X|y)$  كما في العلاقة (3.9.32). كما يمكن إثبات أن:

$$(3.9.36): E[E(X'|y)] = E(X')$$

أى أن توقع التوقع الشرطى للمتغير  $X'$  عندما  $Y=y$  يساوى توقع المتغير المطلق (غير الشرطى)  $X'$  وإثبات ذلك متروك للطالب (أنظر تمرين (3-61)). كما يمكن أيضاً إثبات أن:

$$(3.9.37): E(X' | Y \in A) = E[E(X' | Y = y) | Y \in A]$$

وهي العلاقة المقابلة للعلاقة (3.9.7) — وإثبات هذه العلاقة متروك أيضاً للطالب (أنظر تمرين (3-62)).

خامساً: ملخص لأهم نتائج الحالات الأربع السابقة:

يمكن تلخيص أهم نتائج الحالات الأربع السابقة (من أولاً حتى رابعاً) فى المعادلات التالية:

من العلاقات (3.9.6) و (3.9.7) فى الحالة أولاً ومن العلاقة (3.9.30) عندما  $X=x$  وعندما  $X \in A$  فى ثالثاً نجد أن:

$$(3.9.38a): E[E(Y' | X = x_i)] = E(Y')$$

$$(3.9.38b): E[E(Y' | X = x_i) | X \in A] = E(Y' | X \in A)$$

$$(3.9.38c): V(Y) = E[V(Y|x)] + V[E(Y|x)]$$

وذلك إذا كان  $X$  متغير مستقطع يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  و  $Y$  أى متغير عشوائى مستمر أو مستقطع.

وكذلك من العلاقة (3.9.18) عندما  $g(X, Y) = Y'$  والعلاقة (3.9.20) فى البند ثانياً والعلاقين (3.9.36) و (3.9.37) فى البند رابعاً نجد أن:

$$(3.9.39a): E[E(X' | Y = y)] = E(X')$$

$$(3.9.39b): E[E(X' | Y = y) | Y \in A] = E(X' | Y \in A)$$

$$(3.9.39c): V(X) = E[V(X|y)] + V[E(X|y)]$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وذلك إذا كان  $Y$  متغير مستمر و  $X$  أى متغير عشوائى مستمر أو منقطع.

**ملاحظة (3-9 ب):** إذا كان  $(X, Y)$  متغير عشوائى ثنائى مشترك له دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة  $F(x, y)$  والدالة  $g(x, y)$  دالة وحيدة القيمة فى  $x$  و  $y$  نجد من العلاقة (3.8.1) أن:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF(x, y)$$

والتكامل السابق يمكن إيجاده بأسلوب التكامل المتتالى، أى بإجراء التكامل بالنسبة لأحد المتغيرين أولاً ثم مكاملة الناتج مرة أخرى بالنسبة للمتغير الآخر وذلك لتبسيط عملية التكامل، وفى هذه الحالة نلعب التوزيعات الشرطية (أو العزوم الشرطية) دوراً هاماً وأساسياً حيث يمكن إثبات أن:

$$(3.9.40a): E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF(x, y)$$

$$(3.9.40b): = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF(x|y) \right] dF_2(y)$$

$$(3.9.40c): = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) dF(y|x) \right] dF_1(x)$$

أى أن:

$$(3.9.40d): E_{xy}[g(X, Y)] = E_y[E_x g(X, Y)|y] = E_x[E_y g(X, Y)|x]$$

فإذا كان  $(X, Y)$  متغير ثنائى منقطع يكون التكامل الداخلى داخل القوس المربع فى العلاقة (3.9.40c) هو نفسه التوقع الموجود فى العلاقة (3.9.1)، وإذا كان  $(X, Y)$  متغير ثنائى مستمر يكون هذا التكامل هو التوقع المعطى بالعلاقة (3.9.12)، أما إذا كان  $(X, Y)$  متغير مختلط فيه  $X$  متغير منقطع و  $Y$  متغير مستمر (سواء كان مختلط من النوع الأول أو الثانى) يكون التكامل الموجود داخل القوس المربع فى العلاقة (3.9.40b) هو نفسه التوقع المعطى بالعلاقة (3.9.31) أما التكامل الموجود داخل القوس المربع فى العلاقة (3.9.40c) هو نفسه التوقع المعطى بالعلاقة (3.9.25).

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

مثال (3-9): متغير عشوائي له دالة الاحتمال المشتركة التالية:

(x, y)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
P(x, y)	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

أوجد:

$$E(XY) \quad (1)$$

$$\rho_{xy} \quad (2.c) \quad V(Y) \quad (2.b) \quad V(X) \quad (2.a) \quad (2)$$

$$V(X|y) \quad (3.b) ; E(X|y) \quad (3.a) \quad (3)$$

(4) هل تتحقق العلاقات التاليتين:

$$(4.a) E[E(X|y)] = E(X)$$

$$(4.b) V(X) = E[V(X|y)] + V[E(X|y)]$$

(الحل)

من الجدول التالي يمكن إيجاد  $E(XY)$ ,  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$  وذلك

كما يلي:

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	1	2	3	$P_1(x)$	$xP_1(x)$	$x^2P_1(x)$	$xyP(x, y)$
1	$2/15$	$4/15$	$3/15$	$9/15$	$9/15$	$9/15$	$19/15$
2	$1/15$	$1/15$	$4/15$	$6/15$	$12/15$	$24/15$	$30/15$
$P_2(y)$	$3/15$	$5/15$	$7/15$	1	$21/15$	$33/15$	
$yP_2(y)$	$3/15$	$10/15$	$21/15$	$34/15$			
$y^2P_2(y)$	$3/15$	$20/15$	$63/15$	$86/15$			
$xyP(x, y)$	$4/15$	$12/15$	$33/15$				$49/15$

(1)

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(x, y) = \frac{49}{15}$$

الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(2)

$$E(X) = \sum_x x P_1(x) = \frac{21}{15} \quad ; \quad E(X^2) = \sum_x x^2 P_1(x) = \frac{33}{15}$$

$$E(Y) = \sum_y y P_2(y) = \frac{34}{15} \quad ; \quad E(Y^2) = \sum_y y^2 P_2(y) = \frac{86}{15}$$

$$(2.a) \quad V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{33}{15} - \left(\frac{21}{15}\right)^2 = 0.24$$

$$(2.b) \quad V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{86}{15} - \left(\frac{34}{15}\right)^2 = 0.5956$$

$$\sigma_x = 0.4899 \quad ; \quad \sigma_y = 0.7718$$

$$\text{Cov}(x, y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \frac{49}{15} - \frac{21}{15} \cdot \frac{34}{15} = 0.0933$$

ومن (3. 8. 18):

$$(2.c) \quad \rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = 0.2468$$

(3) بما أن:

$$P(x | Y = i) = \frac{P(x, i)}{P_2(i)}$$

إذن يمكن تكوين الجدول التالي:

x	P(x   1)	P(x   2)	P(x   3)	xP(x   1)	xP(x   2)	xP(x   3)
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{7}$
Σ	1	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{7}$



الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

x	$x^2 P(x   1)$	$x^2 P(x   2)$	$x^2 P(x   3)$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{7}$
$\Sigma$	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{19}{7}$

$$(3.a) E(X | Y = 1) = \sum_x x P(x | 1) = \frac{4}{3}$$

وبالمثل

$$E(X | 2) = \frac{6}{5} \quad , \quad E(X | 3) = \frac{11}{7}$$

$$E(X^2 | 1) = \sum x^2 P(x | 1) = \frac{6}{3} = 2$$

وبالمثل:

$$E(X^2 | 2) = \frac{8}{5} \quad , \quad E(X^2 | 3) = \frac{19}{7}$$

إذن:

$$(3.b) V(X | 1) = E(X^2 | 1) - E^2(X | 1) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

وبالمثل:

$$V(X | 2) = \frac{4}{25} \quad , \quad V(X | 3) = \frac{12}{49}$$

(4)  $E(X | y)$  تعتبر دالة في  $y$  - يمكن أن نرمز لها بالرمز  $\phi(y)$  - حيث أنها تساوي  $\frac{4}{3}$  عندما  $Y = 1$  وتساوي  $\frac{6}{5}$  عندما  $Y = 2$  وتساوي  $\frac{11}{7}$  عندما  $Y = 3$ . إذن يمكن الحصول على:

$$E[E(X | y)] = E[\phi(y)] = \sum_y \phi(y) f_2(y)$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

بنكون الجدول التالي:

$f_2(y)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{15}$	1
$\phi(y)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{7}$	
$E[E(X y)] = \sum_y \phi(y) f_2(y)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{21}{15}$
$\sum \phi^2(y) f_2(y)$	$\frac{16}{45}$	$\frac{36}{75}$	$\frac{121}{105}$	

إن:

$$E[E(X|y)] = \sum_y \phi(y) f_2(y) = \frac{21}{15}$$

ومن (2) نعلم أن  $E(X) = \frac{21}{15}$

وهذا يثبت صحة العلاقة:

$$(4.a) \quad E[E(X|y)] = E(X)$$

ولإثبات صحة العلاقة (4.b) نجد أن:

$$(4.c) \quad E[E(X|y)]^2 = \sum_y \phi^2(y) f_2(y) = \frac{16}{45} + \frac{36}{75} + \frac{121}{105} \\ = 0.35 + 0.48 + 1.15238 = 1.98794$$

كذلك نجد من (3) أن  $V(X|y)$  تعتبر دالة في  $y$  — يمكن أن نرمز لها بالرمز

$\phi_2(y)$  — حيث أن  $V(X|y)$  تساوى  $\frac{2}{9}$  عندما  $Y=1$  وتساوى  $\frac{4}{25}$  عندما  $Y=2$  وتساوى  $\frac{12}{49}$  عندما  $Y=3$ .

$\phi_2(y) = V(X y)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{49}$
$f_2(y)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{15}$
$E[V(X y)] = \sum_y \phi_2(y) f_2(y)$	$\frac{2}{45}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{12}{105}$

الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

$$\therefore E[V(X|y)] = \frac{2}{45} + \frac{4}{75} + \frac{12}{105}$$

$$= 0.04 + 0.053 + 0.114287 = 0.21206$$

كذلك من (4.a) و (4.c) يمكن إيجاد  $V[E(X|y)]$  حيث:

$$V[E(X|y)] = E[E(X|y)]^2 + E^2[E(X|y)]$$

$$= 1.987936507 - \left[\frac{24}{15}\right]^2 = 0.0279365$$

إذن:

$$(4.b) \quad V[E(X|y)] + E[V(X|y)] = 0.0279 + 0.2121 = 0.24 = V(X)$$

مثال (3 - 9 هـ):  $(X, Y)$  متغير عشوائى مستمر دالة كثافة احتماله:

$$f(x, y) = x + y ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

أوجد:

(1)

$$(1.a) \quad E(X), \quad (1.b) \quad E(Y)$$

$$(1.c) \quad V(X), \quad (1.d) \quad V(Y)$$

(2)

$$(2.a) \quad E(XY)$$

$$(2.b) \quad \rho_{xy}$$

معامل الارتباط بين  $X$  و  $Y$ .

(3)

$$(3.a) \quad E(Y|x) \quad (3.b) \quad V(Y|x) \quad (3.c) \quad E[E(Y|x)]$$

وبين أن:  $E[E(Y|x)] = E(Y)$

الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(الحل)

(1)

$$E(Y) = E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x(x+y) dx dy = \frac{7}{12}$$

$$E(Y^2) = E(X^2) = \int_0^1 \int_0^1 x^2 (x+y) dx dy = \frac{5}{12}$$

$$V(Y) = V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

(2)

$$(2.a) E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}$$

إذن:

$$(2.b) \rho_{xy} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}}{\sqrt{\frac{11}{144}} \sqrt{\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}$$

(3)

$$(2.b') f_1(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = x + \frac{1}{2}; 0 \leq x \leq 1$$

$$(2.b'') f_{12}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{x+y}{x + \frac{1}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$$

إذن من (2.b'') نجد أن:

$$(3.a) E(Y|x) = \int_0^1 y \cdot \frac{(x+y)}{(x + \frac{1}{2})} dy = \frac{1}{(x + \frac{1}{2})} \left[ \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right] = \frac{3x+2}{6x+3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

كما أن:

$$E(Y^2 | x) = \int_0^1 y^2 \frac{(x+y)}{(x+\frac{1}{2})} dy = \frac{4x+3}{12x+6}$$

إذن:

$$\begin{aligned} (3.b) \quad V(Y | x) &= E(Y^2 | x) - E^2(Y | x) = \frac{4x+3}{12x+6} - \left( \frac{3x+2}{6x+3} \right)^2 \\ &= \frac{6x^2 + 6x + 1}{18(2x+1)^2} \end{aligned}$$

ومن (3.a) و (2.b') نجد أن:

$$(3.c) \quad E[E(Y | x)] = \int_0^1 \left( \frac{3x+2}{6x+3} \right) \left( x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{7}{12} = E(Y)$$

مثال (3 - 9 جـ): من تمرين (2 - 32) نجد أن  $(X, Y)$  متغير ثنائي مختلط فيه  $X$  متغير منقطع و  $Y$  متغير مستمر - حيث دالة احتمال  $X$  هي:

$$P_1(x) = \frac{1}{6} \quad ; \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ودالة كثافة احتمال  $Y$  عندما  $X = x$  هي:

$$f_{21}(y | x) = x \quad ; \quad 0 < y < \frac{1}{x} \quad ; \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

كما أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  هي:

$$f(x, y) = P_1(x) f_{21}(y | x) = \frac{x}{6} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad ; \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

كما أن دالة كثافة الاحتمال المطلقة للمتغير  $Y$  هي:

$$\begin{aligned} f_2(y) &= 21/6, & 0 \leq y \leq 1/6 \\ &= 15/6, & 1/6 \leq y \leq 1/5 \\ &= 10/6, & 1/5 \leq y \leq 1/4 \\ &= 6/6, & 1/4 \leq y \leq 1/3 \\ &= 3/6, & 1/3 \leq y \leq 1/2 \\ &= 1/6, & 1/2 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

ودالة احتمال  $X$  عندما  $Y = y$  هي:

$$\begin{aligned} P_{12}(x | y) &= x/21, & 0 \leq y \leq 1/6, & x \leq 6 \\ &= x/15, & 1/6 < y \leq 1/5, & x \leq 5 \\ &= x/10, & 1/5 < y \leq 1/4, & x \leq 4 \\ &= x/6, & 1/4 < y \leq 1/3, & x \leq 3 \\ &= x/3, & 1/3 < y \leq 1/2, & x \leq 2 \\ &= 1, & 1/2 < y \leq 1, & x = 1 \end{aligned}$$

(1) أوجد:

$$E(X | Y); E(X); V(X), E(Y), V(Y)$$

وأوجد معامل الارتباط:  $\rho_{xy}$

وبين أن:

$$E[E(X | y)] = E(X)$$

(2) أوجد كذلك:

$$E[Y | x]$$

وبين أن:

$$E[E(Y | x)] = E(Y)$$

الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(الحل)

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{x=1}^6 \int_{y=0}^{\frac{1}{x}} x \cdot y \cdot f(x, y) \, dy = \sum_{x=1}^6 \int_0^{\frac{1}{x}} x \cdot y \cdot \frac{x}{6} \, dy \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{x^2}{6} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{x}} = \sum_{x=1}^6 \frac{x^2}{6} \left[ \frac{1}{2x^2} \right] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x = 3.5$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{x=1}^6 x^2 = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.91\dot{6}$$

$$\sigma_x = 1.7078$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_y y f_2(y) \, dy \\ &= \frac{21}{6} \int_0^{1/6} y \, dy + \frac{15}{6} \int_{1/6}^{1/5} y \, dy + \frac{10}{6} \int_{1/5}^{1/4} y \, dy + \frac{10}{6} \int_{1/4}^{1/3} y \, dy + \frac{1}{6} \int_{1/3}^{1/2} y \, dy + \frac{1}{6} \int_{1/2}^1 y \, dy \\ &= \frac{21}{6} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{15}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right] + \frac{10}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right] + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \\ &= 0.2041\dot{6} \end{aligned}$$

الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= \int_y y f_2(y) dy \\
 &= \frac{21}{6} \int_0^{1/6} y^2 dy + \frac{15}{6} \int_{1/6}^{1/5} y^2 dy + \frac{10}{6} \int_{1/5}^{1/4} y^2 dy + \int_{1/4}^{1/3} y^2 dy \\
 &\quad + \frac{3}{6} \int_{1/3}^{1/2} y^2 dy + \frac{1}{6} \int_{1/2}^1 y^2 dy \\
 &= 0.0828549
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\
 &= 0.082854938 - (0.2041\dot{6})^2 = 0.04117091
 \end{aligned}$$

$$\sigma_y = 0.202906161$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{xy} &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0.5 - (3.5)(0.2041\dot{6})}{(1.707825127)(0.20296161)} \\
 &= -0.619068468
 \end{aligned}$$

$$E(X|y) = \sum_x x P_{12}(x|y)$$

عندما  $0 \leq Y \leq 1/6$

$$= \sum_{x=1}^6 x \cdot \frac{x}{21} = \frac{1}{21} \frac{6(7)13}{6} = \frac{13}{3}$$

وعندما  $1/6 < Y \leq 1/5$

$$= \sum_{x=1}^5 x \cdot \frac{x}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{5(6)11}{6} = \frac{11}{3}$$

وعندما  $1/5 < Y \leq 1/4$

$$= \sum_{x=1}^4 x \cdot \frac{x}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4(5)9}{6} = 3$$



الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

وعندما  $1/4 < Y \leq 1/3$

$$= \sum_{x=1}^3 x \cdot \frac{x}{6} = \frac{7}{3}$$

وعندما  $1/3 < Y \leq 1/2$

$$= \sum_{x=1}^2 x \cdot \frac{x}{3} = \frac{5}{3}$$

وعندما  $1/2 < Y \leq 1$

$$= \sum_{x=1}^1 x \cdot 1 = 1$$

وهذا يوضح أن  $E(X|y)$  يعتبر دالة في  $Y$  حيث:

$$\begin{aligned} E(X|y) &= 13/3, & 0 < y \leq 1/6 \\ &= 11/3, & 1/6 < y \leq 1/5 \\ &= 9/3, & 1/5 < y \leq 1/4 \\ &= 7/3, & 1/4 < y \leq 1/3 \\ &= 5/3, & 1/3 < y \leq 1/2 \\ &= 1, & 1/2 < y \leq 1 \end{aligned}$$

وبما أن  $E(X|y)$  يعتبر دالة في  $Y$  إذن:

$$\begin{aligned} E[E(X|y)] &= \int_0^1 E(X|y) f_2(y) dy \\ &= \int_0^{1/6} \frac{13}{3} \cdot \frac{21}{6} dy + \int_{1/6}^{1/5} \frac{11}{3} \cdot \frac{15}{6} dy + \int_{1/5}^{1/4} \frac{9}{3} \cdot \frac{10}{6} dy \\ &\quad + \int_{1/4}^{1/3} \frac{7}{3} \cdot 1 dy + \int_{1/3}^{1/2} \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{6} dy + \int_{1/2}^1 1 \cdot \frac{1}{6} dy \\ &= \frac{91}{36} + \frac{11}{3} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{1}{30} + \frac{9}{3} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{1}{20} + \frac{7}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} \\ &= \frac{126}{36} = 3.5 = E(X) \end{aligned}$$

$$\therefore E[E(X|y)] = E(X)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

(2)

$$E(Y|x) = \int_y y f_{21}(y|x) dy = \int_0^{\frac{1}{2x}} y x dy = \frac{1}{2x}$$

أى أن  $E(Y|x)$  يعتبر دالة في  $x$ :

$$E(Y|x) = \frac{1}{2x} ; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\begin{aligned} \therefore E[E(Y|x)] &= \sum_{x=1}^6 E(Y|x) P_1(x) = \sum_{x=1}^6 \left(\frac{1}{2x}\right) \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{12} \left[\frac{37.5}{30}\right] = 0.2041\dot{6} = E(Y) \end{aligned}$$

**ملاحظة (3 - 9 جـ):** نقدم فيما يلى معلومة هامة عن العلاقة بين التوقع الشرطى  $E(Y|x)$  والتباين الشرطى  $V(Y|x)$  لأى متغير مشترك  $(X, Y)$  سواء من النوع المنقطع أو المستمر أو المختلط بنوعيه هذه المعلومة هى:

إذا كان  $Y$  (أو  $Y|x$ ) متغير عشوائى شرطى - كما هو معرف فى البندين (17 - 2) و (9 - 3) - و  $\varphi(x)$  دالة حقيقية وحيدة القيمة فى  $x$  فيمكن إثبات أن العزم الشرطى من الدرجة الثانية للمتغير الشرطى  $Y|x$  حول الدالة  $\varphi(x)$  يكون نهاية صفرى عندما  $\varphi(x) = E(Y|x)$  أى أن:

$$E\left\{[Y - \varphi(x)]^2 \mid X = x\right\}$$

يكون نهاية صفرى عندما تكون:

$$\varphi(x) = E(Y|x)$$

كما أن هذه النهاية الصفرى تكون هى التباين الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  وهذا نعبّر عنه رمزياً بالعلاقة التالية:

$$(3.9.41): \min E\left\{[Y - \varphi(x)]^2 \mid x\right\} = V(Y|x) = \sigma_{Y,x}^2$$

$$= E\left\{[Y - E(Y|x)]^2 \mid x\right\}$$

انظر تمرين (3 - 63).

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

ومن المعروف من العلاقة السابقة أن  $V(Y|x) \geq 0$  فإذا كان  $V(Y|x) = 0$  عند جميع قيم  $x$  التي يكون عندها المتغير الشرطي  $Y|x$  معرّفاً يكون معنى ذلك أن المتغير الشرطي  $Y|x$  متغير مدمج degenerate وبالتالي يكون الاحتمال الكلي لتوزيع هذا المتغير الشرطي مركزاً عند نقطة واحدة هي توقعه أي عند النقطة  $Y = E(Y|x)$  — كما يتضح من ملاحظة (3 - 2 - 2 هـ) — وفي هذه الحالة يكون:

$$(3.9.42): \Pr\{[Y = E(Y|x)]|x\} = 1$$

كذلك كلما كان  $V(Y|x)$  كمية صغيرة قريبة من الصفر كلما كان الاحتمال السابق قريب من الواحد الصحيح وكلما زاد اقتراب قيمة  $V(Y|x)$  من الصفر كلما زاد اقتراب الاحتمال الموجود في الطرف الأيسر بالعلاقة (3.9.42) من الواحد الصحيح. ومعنى هذا أنه إذا كانت قيمة المتغير  $X$  معلومة (في حالة معينة) — لنكن  $X = x$  مثلاً — فإن قيمة المتغير  $Y$  (في هذه الحالة) تساوي  $E(Y|x)$  وذلك باحتمال كبير يساوى الواحد الصحيح أو قريب جداً من الواحد الصحيح وذلك تبعاً لكون التباين الشرطي  $V(Y|x)$  يساوى الصفر أو يساوى كمية صغيرة قريبة من الصفر. لذلك يمكن استخدام خط الانحدار المتمثل بالعلاقة  $Y = E(Y|x)$  لتقدير قيم المتغير  $Y$  بمعلومية قيم  $X$  وذلك باحتمال كبير أي بدرجة عالية من الثقة. وعلى ذلك يمكن اعتبار  $V(Y|x)$  مقياساً (أو مؤشراً) يوضح لنا درجة جودة استخدام  $E(Y|x)$  لتحديد قيمة  $Y$  عندما يكون معلوماً لدينا أن  $X = x$ .

### (3 - 10) المتغيرات المعتمدة على بعضها اعتماداً خطياً (حالة متغيرين):

#### Linearly Dependent Random Variables (Two Variables):

تعريف (3 - 10 أ) المتغيران المعتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً:

في المتغير المشترك  $(X, Y)$  نقول أن المتغيران  $Y$  و  $X$  معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً إذا كان هناك عدنان حقيقيان  $c_1$  و  $c_2$  أحدهما على الأقل لا يساوى الصفر بحيث يكون المتغير العشوائى  $Z = c_1X + c_2Y$  متغيراً مدمجاً Degenerate. ومن (2 - 6 - 4) نرى أن الاحتمال الكلي لتوزيع المتغير المدمج  $Z$  يكون مركزاً عند نقطة واحدة ( $c_0$  مثلاً) هي مركز النقل لهذا التوزيع ويكون:

$$(3.10.1a): \Pr[c_1X + c_2Y = c_0] = 1$$

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والثبنت والعزوم

حيث الثابت  $c_0$  عدد حقيقي هو توقع المتغير المدمج  $Z$ ، وطبعاً الحالة التي يكون فيها  $c_1 = 0$  أو  $c_2 \neq 0$  أو  $c_1 \neq 0$  و  $c_2 = 0$  تكون قليلة الأهمية لأن أحد المتغيرين (المتغير المتبقى) في هذه الحالة يكون أصلاً متغيراً مدمجاً.

تعريف (3- 10 ب) المتغيران المعتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً:

إذا كان المتغير  $Z = c_1X + c_2Y$  متغيراً مدمجاً بينما  $c_1 \neq 0$  و  $c_2 \neq 0$  نقول أن المتغيران  $X$  و  $Y$  معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً Property Linearly Dependent وهذا يعنى أن:

$$(3. 10. 1b): Pr(c_1X + c_2Y = c_0) = 1$$

حيث أن الثابت  $c_0$  عدد حقيقي (هو توقع المتغير المدمج  $Z = c_1X + c_2Y$ ) وأن الخط المستقيم  $c_1X + c_2Y = c_0$  ليس موازياً لمحور  $X$  (لأن  $c_1 \neq 0$ ) كما أنه ليس موازياً لمحور  $Y$  (لأن  $c_2 \neq 0$ ). وعندما تكون  $c_1 = 1$  و  $c_2 = -1$  و  $c_0 = 0$  يكون المتفسير  $Z = X - Y$  مدمجاً حيث:  $Pr[X - Y = 0] = 1$  أى:  $Pr[X = Y] = 1$  وفى هذه الحالة نقول أن المتغيران  $X$  و  $Y$  متطابقان (Identical)، وعلى هذا يمكن تقديم التعريف التالى:

تعريف (3- 10 جـ) المتغيرات المتطابقة Identical Variables:

نقول أن المتغيران  $X$  و  $Y$  متطابقان إذا كان:

$$(3. 10. 2): Pr[X = Y] = 1$$

وإذا كانت دالة توزيع احتمالى مشتركة لمتغيرين متطابقين  $X$  و  $Y$  فإننا نقول أن دالتي التوزيع الاحتمالى الهامشيتين  $F_1(x)$  و  $F_2(y)$  دالتان متطابقتان وفى هذه الحالة تكون:

$$(3. 10. 3): F_1(x) = F_2(y) = F(x) = F(y)$$

ولكن العكس غير صحيح، أى أنه إذا كانت الدالتان  $F_1(x)$  و  $F_2(y)$  متطابقتان فليس من الضروري أن يكون المتغيران  $X$  و  $Y$  متطابقان كذلك.

كما أن المتغيرين المشتركين  $(X_1, Y_1)$  و  $(X_2, Y_2)$  يكونا متطابقان إذا كان كل من المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  متطابقان والمتغيران  $Y_1$  و  $Y_2$  متطابقان أيضاً.

ملاحظة (3- 10 أ): العلاقة (3. 10. 1) والنسئ نكتبها فى الصورة:  
 $Pr[c_1X + c_2Y = c_0] = 1$  مضاها الآتى:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

احتمال أن المتغير المشترك  $(X, Y)$  يأخذ قسم تقع على الخط المستقيم  $c_1X + c_2Y = c_0$  فى المستوى  $R_2$  يساوى الواحد الصحيح، ومعنى هذا أن المتغير  $(X, Y)$  تقع كل قيمة على هذا الخط باحتمال واحد صحيح وطبقاً لبند (2 - 6 - 4) يكون المتغير المفرد  $Z = c_1X + c_2Y$  متغيراً مدمجاً يتركز احتماله الكلى عند النقطة  $Z = c_0$  وهى نقطة احتماله الوحيدة وطبقاً لملاحظتى (3 - 2 - 2 - هـ) و(3 - 3 - 1 ب) يكون  $E(Z) = c_0$  و  $V(Z) = 0$  أى أن "الاحتمال الكلى" لتوزيع المتغير المشترك  $(X, Y)$  يتركز على خط مستقيم (هو  $c_1X + c_2Y = c_0$ ) بينما الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير المفرد  $Z = c_1X + c_2Y$  يتركز عند نقطة واحدة هى  $Z = c_0$ .

بعد أن عرفنا المتغير المدمج يمكن الآن تقديم النظرية التالية التى توضح أن بعض خصائص التوزيع المشترك لأى متغير  $(X, Y)$  متصلة مباشرة برتبة مصفوفة تغايره  $V_2$ .

نظرية (3 - 10 أ):

إذا كان المتغير المشترك  $(X, Y)$  له مصفوفة التغاير التالية:

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & v_{12} \\ v_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

التي رتبته  $r \geq 2$  حيث:

$$\sigma_1^2 = V(X) , \quad \sigma_2^2 = V(Y) ; \quad v_{12} = v_{21} = Cov(X, Y) = \mu_{11}$$

فإن:

- (1) توزيع المتغير  $(X, Y)$  يكون مدمجاً Degenerate عند نقطة واحدة، إذا وفقط إذا كانت،  $r = 0$  - هذه النقطة هى مركز ثقل التوزيع المشترك للمتغير  $(X, Y)$  -  
أى النقطة  $(m_1, m_2)$  حيث  $m_1 = E(X) ; m_2 = E(Y)$ .
- (2) يكون التوزيع مدمجاً فى خط مستقيم - أى الاحتمال الكلى للتوزيع متركزاً على خط مستقيم فى المستوى  $R_2$  وليس فى نقطة مفردة - إذا وفقط إذا كانت  $r = 1$  -  
هذا الخط المستقيم هو:

$$(3. 10. 4): t_0(x - m_1) + u_0(y - m_2) = 0$$

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

حيث  $t_0$  و  $u_0$  عدنان حقيقيان معينان.

(3) يكون التوزيع غير منموج إذا وفقط إذا كانت  $r = 2$ .

### (الإثبات)

يكفى إثبات (1) و (2) وعليه تكون (3) نتيجة مباشرة.

(1)

(أ) شرط الكفاية: يكفى أن تكون  $r = 0$  فى هذه الحالة يكون كل محيد رئيسى للمصفوفة  $V_2$  يساوى الصفر أى أن:  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0$  وهذا معناه أن التوزيع الهامشى لكل من  $X$  و  $Y$  مركزاً عند نقطة واحدة هى مركز التوزيع الهامشى - لنظر ملاحظة (3 - 2 - 2 هـ) - فيكون توزيع  $X$  مركزاً عند النقطة  $X = m_1$  وتوزيع  $Y$  مركزاً عند النقطة  $Y = m_2$  وعلى ذلك يكون الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك للمتغير  $(X, Y)$  مركزاً عند النقطة  $(m_1, m_2)$  وهى مركز ثقل التوزيع المشترك.

(ب) شرط اللزوم: وعلى العكس من (أ) إذا كان الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك مركزاً عند نقطة واحدة يكون معنى ذلك أن المتغير  $(X, Y)$  متغيراً منموجاً ومركز ثقله عند النقطة  $(m_1, m_2)$  وهذا يترتب عليه أن  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0$  - وبما أن  $\sigma_1^2 \sigma_2^2 - v_{12}^2 \geq 0$  (كما فى (3. 8. 20)) إذن  $v_{12}^2 = 0$  أى أن  $v_{12} = 0$  وبذلك تكون جميع عناصر مصفوفة التغاير  $V_2$  أصفار وهذا يترتب عليه أن  $r = 0$ .

(2) نعلم أنه لأى عددين حقيقيين  $t, u$  تكون:

$$\begin{aligned} (3. 10. 5): Q(t, u) &= E[t(X - m_1) + u(Y - m_2)]^2 \\ &= t^2 \sigma_1^2 + 2tu v_{12} + u^2 \sigma_2^2 \\ &= (t \quad u) V_2 \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

(أ) شرط الكفاية: إذا كانت  $r = 1$  كان معنى ذلك أن مقدار الدرجة الثانية  $Q(t, u)$  مقدار غير سالب شبه محدد Positive Semi-definite وهذا يترتب عليه أنه يوجد قيمتان معينتان  $u = u_0$  ،  $t = t_0$  إحداهما على الأقل لا تساوى الصفر ويكون

### الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

عندهما:  $Q(t_0, u_0) = 0$  وهذا ممكن فقط إذا كان الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك مركزاً على الخط المستقيم

$$(3. 10. 6): t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2) = 0$$

طبقاً للملاحظة (3 - 10 أ).

(ب) شرط اللزوم: وعلى عكس شرط الكفاية - إذا كان من المعروف أن الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك مركزاً على خط مستقيم (وليس في نقطة واحدة) فإن هذا الخط لابد أن يمر بمركز ثقل التوزيع - أى بالنقطة  $(m_1, m_2)$  ومعادلته تأخذ الصيغة التالية:

$$(3. 10. 6a): t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2) = 0$$

حيث  $t_0$  و  $u_0$  عددان حقيقيان أحدهما على الأقل لا يساوى الصفر - إذن  $E[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)] = 0$  كذلك بتربيع طرفى المعادلة (3. 10. 6a) نجد أن:

$$[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)]^2 = 0$$

إذن:

$$E[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)]^2 = 0$$

أى أن مقدار الدرجة الثانية  $Q(t, u)$  الممثلة بالمعلاقة (3. 10. 5) يساوى الصفر عند القيمتان  $t = t_0$ ،  $u = u_0$  - وإحدهما على الأقل لا يساوى الصفر - وهذا معناه أن مقدار الدرجة الثانية  $Q(t, u)$  غير سالب شبه محدد Positive Semi-definite وعلى هذا فإن رتبة المصفوفة  $V_2$  تساوى الواحد الصحيح ( $r = 1$ ).

هـ. ط. ث.

نعلم أنه إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  مرتبطان يكون معامل الارتباط بينهما  $\rho \neq 0$  وتكون  $\sigma_1^2 \neq 0$  و  $\sigma_2^2 \neq 0$  وتصل  $\rho$  إلى نهايتها القصوى  $\pm 1$  (أى  $\rho^2 = 1$ ) إذا كان  $\frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{v_{12}^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = 1$  أى  $\sigma_1^2 \sigma_2^2 - v_{12}^2 = 0$  وهذا معناه أن محدد مصفوفة

التغاير  $V_2$  للمتغيران  $X$  و  $Y$  يساوى الصفر وفى هذه الحالة تكون مصفوفة التغاير  $V_2$  من الرتبة  $r \leq 1$  - ولكن بما أن  $\sigma_1^2 \neq 0$  و  $\sigma_2^2 \neq 0$  فإن  $V_2$  تكون من الرتبة  $r = 1$  وهذا يرتبط عليه حسب نظرية (3 - 10 أ) أن هذا يحدث إذا فقط إذا كان الاحتمال الكلى

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) وانتشتت والعزوم

لتوزيع المتغير المشترك  $(X, Y)$  مركزاً على خط مستقيم وبالتالي يمكن تقديم النظرية التالية.

نظرية (3 - 10 ب):

إذا كان المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  غير مدمجان non degenerate وتباين كل منهما محدود، فبهما يكونا معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً، إذا فقط إذا كان مربع معامل الارتباط بينهما يساوى الواحد الصحيح (أي  $\rho^2 = 1$ ).

(الإثبات)

(أ) شرط اللزوم: نفرض أن المتغيران  $X$  و  $Y$  معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً - إذن من تعريف (3 - 10 ب)

$$\Pr(c_1 X + c_2 Y = c_0) = 1$$

حيث  $c_1$  و  $c_2$  عدنان حقيقيان كل منهما لا يساوى الصفر و  $c_0$  عدد حقيقى. وبما أن  $c_2 \neq 0$  يمكن وضع العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$\Pr(Y + \beta_1 X = \beta_0) = 1$$

حيث  $\beta_1$  عدد حقيقى لا يساوى الصفر و  $\beta_0$  عدد حقيقى أى أن المتغير  $(Y + \beta_1 X)$  متغيراً مدمجاً - كما فى (2 - 6 - 4) - والاحتمال الكلى لتوزيع هذا المتغير مركزاً عند النقطة  $\beta_0$  التى تمثل توقعه [انظر ملاحظة (3 - 2 - 2 - 2)] كما أن تباين هذا المتغير المدمج يساوى الصفر [انظر ملاحظة (3 - 3 - 1 ب)] - إذن:

$$V(Y + \beta_1 X) = 0$$

$$\therefore V(Y) + \beta_1^2 V(X) + 2\beta_1 \text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$\sigma_2^2 + \beta_1^2 \sigma_1^2 + 2\beta_1 \rho \sigma_1 \sigma_2 = 0$$

$$\therefore \sigma_2 = -\beta_1 \rho \sigma_1 \pm \beta_1 \sigma_1 \sqrt{\rho^2 - 1}$$

نعلم من (8. 19) أن  $\rho^2 \leq 1$  لذلك لا بد أن تكون  $\rho^2 = 1$  فى العلاقة السابقة

لأن  $\sigma_2$  عدد حقيقى. إذن  $\rho = \pm 1$  وحيث أن  $\sigma_2 > 0$  إذن  $\rho = +1$  إذا كانت  $\beta_1$  سالبة و  $\rho = -1$  إذا كانت  $\beta_1$  موجبة.



### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(ب) شرط الكفاية: نفرض أن  $\rho^2 = 1$  إذن من تعريف (3. 8. 18) لمعامل الارتباط عندما  $\rho^2 = 1$  نجد أن:

$$(3. 10. 7): \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{11}^2 = 0$$

ومن العلاقة (3. 10. 5) نعلم أن:

$$(3. 10. 7a): Q = E[t(X - m_1) + u(Y - m_2)]^2 = (t \quad u) V_2 \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \geq 0$$

حيث أن  $V_2$  هي مصفوفة التغاير المعطاة بالعلاقة (3. 8. 21a) ومحددنا  $|V_2|$  المعطى بالعلاقة (3. 8. 21b) إذن عند تحقق العلاقة (3. 10. 7) السابقة يكون  $|V_2| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \mu_{11}^2 = 0$  وهذا معناه أن رتبة المصفوفة  $V_2$  أقل من 2 وحيث أن  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  كميتان محدودتان موجبتان (لأن  $\rho^2 = 1$ ) إذن رتبة هذه المصفوفة تساوى الواحد الصحيح وعلى ذلك فإن مقدار الدرجة الثانية  $Q$  فى (3. 10. 8) مقدار غير سالب شبه محدد Positive Semi-definite ومعنى هذا أنه يوجد قيمتان معينتان  $t = t_0$  و  $u = u_0$  إحداهما على الأقل لا تساوى الصفر — ليكن  $u_0 \neq 0$  — يكون عندهما:

$$(3. 10. 7b): E[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)]^2 = 0$$

إذن العلاقة (3. 10. 7b) السابقة تدل على أن تباين المتغير  $Z = t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2)$  يساوى الصفر. وهذا معناه — طبقاً لملاحظة (3 - 1 ب) — أن المتغير  $Z$  متغير مدمج والاحتمال الكلى لتوزيعه يتركز عند النقطة  $Z = 0$  التى تمثل توقعه. وعلى ذلك — طبقاً لبند (2 - 6 - 4) وللعلاقة (2. 6. 6c) — يكون:

$$\Pr[t_0(X - m_1) + u_0(Y - m_2) = 0] = 1$$

$$\Pr[t_0 X + u_0 Y = t_0 m_1 + u_0 m_2] = 1$$

وحيث أن  $u_0 \neq 0$  إذن  $X$  و  $Y$  معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً كما يتضح من تعريف (3 - 10 أ) ويكون هذا الاعتماد خطياً صحيحاً إذا كانت  $t_0 \neq 0$ . وحيث أن افتراضنا أن  $\rho^2 = 1$  يترتب عليه أن  $\sigma_1^2 > 0$  و  $\sigma_2^2 > 0$  إذن كل من المتغيرين  $X$  و  $Y$  متغير غير مدمج وبما أن  $Y$  متغير غير مدمج إذن  $t_0 \neq 0$  وحيث أن  $u_0 \neq 0$  إذن المتغيران  $X$  و  $Y$  معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً كما يتضح من تعريف (3 - 10 ب).

هـ. ط. ث.

## الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

ويمكن صياغة النظرية السابقة فى الصورة المختصرة التالية:

$$[\text{المتساوية } \rho^2 = 1 \text{ تعتبر شرطاً لازماً وكافياً لتحقيق العلاقة} \\ \Pr(c_1 X + c_2 Y = c_0) = 1 \text{ طبقاً لتعريف (3-10 ب)}].$$

وطبقاً لهذه النظرية إذا كان  $\rho^2 = 1$  يكون معنى ذلك أن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير المشترك  $(X, Y)$  يقع على خط مستقيم أى أن المتغيران يكونا معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً. ومن ناحية أخرى إذا كان المتغيران  $X$  و  $Y$  معتمدان على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً - أى أن جميع قيم  $(X, Y)$  تقع على خط مستقيم - يكون الارتباط بينهما ارتباطاً تاماً أى  $\rho^2 = 1$ .

## (3-11) عزوم المتغيرات العشوائية المتعددة المشتركة (حالة $n$ من

المتغيرات عندما  $n > 2$ ) - أو العزوم المشتركة The Joint

:Moments

(3-11-1): يمكن تعميم النتائج السابقة من (3-8) إلى (3-10) إلى حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية المشتركة وذلك بفرض أن  $g(X_1, \dots, X_n)$  دالة فى المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  وأن المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  له دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x_1, \dots, x_n)$  فإذا كانت الدالة  $g(X_1, \dots, X_n)$  دالة تكاملية Integrable بالنسبة للتوزيع  $F(x_1, \dots, x_n)$  فى الفراغ  $R_n$  فإن توقع الدالة  $g(X_1, \dots, X_n)$  يمكن تعريفه بالعلاقة التالية:

$$(3. 11. 1): E[g(X_1, \dots, X_n)] = \int_{R_n} g(x_1, \dots, x_n) dF(x_1, \dots, x_n)$$

بوضع:

$$g(x_1, \dots, x_n) = X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}$$

فى المعادلة السابقة نحصل على العزم المشترك حول الصفر  $\mu'_{r_1 \dots r_n}$  من الدرجة  $r_1 + \dots + r_n$  فى الصورة التالية:

$$(3. 11. 2): \mu'_{r_1 \dots r_n} = \int_{R_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} dF(x_1, \dots, x_n)$$

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وعزوم الدرجة الأولى (عندما  $r_1 + \dots + r_n = 1$ ) نرسم لها عادة برموز خاصة بدلاً من استخدام  $\mu_{r_1, \dots, r_n}'$  وذلك لتبسيط الكتابة إذ أنه في عزوم الدرجة الأولى تكون إحدى قيم الدليل  $r_1, \dots, r_n$  تساوى الواحد والباقي أصفار فإذا كان  $r_1$  يساوى الواحد والباقي أصفار نستخدم الرمز  $m_1$  بدلاً من  $\mu_{00, \dots, 010, 0}$  وبذلك تكون القيمة المتوقعة  $m_1$  للمتغير  $X_1$  هي:

$$(3.11.3): m_1 = \int_{R_n} x_1 dF(x_1, \dots, x_n)$$

والنقطة  $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$  التى إحداثياتها القيم المتوقعة للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  فى الفراغ  $R_n$  هى مركز النقل للتوزيع المشترك للمتغير  $(X_1, \dots, X_n)$  فى الفراغ  $R_n$ . أما العزوم المركزية  $\mu_{r_1, \dots, r_n}$  فيمكن الحصول عليها من العلاقة (3.11.2) بوضع  $(X_i - m_i)^{r_i}$  بدلاً من  $X_i^{r_i}$  فى الصورة:

$$(3.11.4): \mu_{r_1, \dots, r_n} = E[(X_1 - m_1)^{r_1} \dots (X_n - m_n)^{r_n}] \\ = \int_{R_n} (x_1 - m_1)^{r_1} \dots (x_n - m_n)^{r_n} dF(x_1, \dots, x_n).$$

والعزوم المركزية من الدرجة الثانية (عندما  $r_1 + \dots + r_n = 2$ ) تحل دوراً هاماً فى دراسة التوزيعات الاحتمالية لذلك سوف نستخدم لها ترميزاً خاصاً بدلاً من استخدام  $\mu_{r_1, \dots, r_n}$  وذلك لتبسيط الكتابة حيث أنه فى عزوم الدرجة الثانية تكون إما قيمة واحدة من قيم الدليل  $r_1, \dots, r_n$  تساوى 2 والباقي أصفار أو قيمتين كل منهما تساوى واحد والباقي أصفار. فإذا كان  $r_1 = 2$  والباقي أصفار نستخدم الرمز  $\sigma_1^2 = v_{11}$ ، كذلك إذا كان  $r_1 = 1$  و  $r_2 = 1$  ( $i \neq j$ ) نستخدم الرمز  $v_{ij}$  وواضح أن استخدام الترميز  $\mu_{r_1, \dots, r_n}$  يكون مربكاً لكثرة الرموز المنيلة للحرف  $\mu$ ، والترميز الذى سوف نستخدمه لعزوم الدرجة الثانية هو:

$$(a) \begin{cases} E(X_i - m_i)^2 = V(X_i) = \sigma_i^2 = v_{ii} \\ E(X_i - m_i)(X_k - m_k) = \text{Cov}(X_i, X_k) \\ = \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k = v_{ik} = v_{ki} \end{cases} \\ (3.11.5): (b) \quad (c)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وكما نعلم  $\rho_{ik} = \rho_{ki}$ .

أى أن  $v_{ii}$  هو تباين  $X_i$  كما أن  $\sigma_i$  هو الانحراف المعياري لـ  $X_i$  و  $v_{ik}$  هو تغاير  $X_i$  و  $X_k$ .

ومن (3. 11. 5) و (3. 8. 19) نجد أن:

$$(3. 11. 6): v_{ii}^2 \leq v_{ii} v_{jj}$$

والتغاير كما نعلم هو حاصل ضرب معامل الارتباط بين المتغيرين في الانحراف

المعياري لكل منهما. ومعامل الارتباط  $\rho_{ik} = \frac{v_{ik}}{\sigma_i \sigma_k}$  كما في علاقة (3. 8. 18) يكون

معرفاً فقط عندما تكون  $\sigma_i > 0$  و  $\sigma_k > 0$  ويترك بدون تعريف إذا كان واحد على الأقل من الانحرافين المعياريين  $\sigma_i$  و  $\sigma_k$  يساوى الصفر. كما أن  $v_{ik} = v_{ki}$  و  $\rho_{ii} = 1$  و  $\rho_{ik} = \rho_{ki}$  (حالة متغيرين) يكون:

$$(3. 11. 6'): v_{11} = \mu_{20}, v_{12} = \mu_{11}, v_{22} = \mu_{02}$$

وعزوم الدرجة الثانية للمتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  يمكن أن توضع في شكل مصفوفة متماثلة تسمى مصفوفة التغاير أو مصفوفة عزوم الدرجة الثانية للمتغير المشترك  $\underline{X}' = (X_1, \dots, X_n)$  ونرمز لها بالرمز  $V_n$  وتأخذ الشكل التالي:

$$(3. 11. 7a): V_n = V_n(\underline{X}) = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} = [v_{ik}]_n$$

حيث  $v_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$  و  $v_{ii} = v(x_i)$  عندما  $i \neq j$ .

ويمكن كتابة  $V_n$  في الصورة التالية:

$$(3. 11. 7b): V_n(\underline{X}) = E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})'] \\ = [E(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)] = [v_{ik}]_{n \times n}$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

والمصفوفة  $V_n$  مصفوفة غير سالبة non - negative matrix أى أن:

$$(3. 11. 8): |V_n| \geq 0$$

والعلاقة السابقة يمكن إثباتها كما يلي:

$$(3. 11. 9): 0 \leq E \left[ \sum_{i=1}^n t_i (X_i - m_i) \right]^2 = \sum_{i,k=1}^n t_i t_k E(X_i - m_i)(X_k - m_k) \\ = \sum_{i,k=1}^n t_i t_k v_{ik} = \underline{t}' V_n \underline{t} \geq 0$$

ومادام مقدار الدرجة الثانية  $\underline{t}' V_n \underline{t} \geq 0$  إذن المقدار  $\underline{t}' V_n \underline{t}$  يكون غير سالب محدد Non - negative definite وبالتالي يكون  $|V_n| \geq 0$  وهذا يحقق العلاقة (3. 11. 8).

(3 - 11 - 2) رتبة التوزيع Rank of The Distribution:

تُعرّف رتبة توزيع المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  فى الفراغ  $R_n$  بأنها هي نفس رتبة مصفوفة التغاير (أو مصفوفة عزوم الدرجة الثانية) للمتغير المشترك  $\underline{X}' = (X_1, \dots, X_n)$  ونرمز لرتبة المصفوفة  $V$  بالرمز  $R(V) = r$ . فإذا كانت  $r < n$  نقول أن التوزيع شاذ Singular وإذا كانت  $r = n$  نقول أن التوزيع غير شاذ Non - Singular، حيث  $n$  هي عدد المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$ .

وقد رأينا فى نظرية (3 - 10 - أ) أن رتبة المصفوفة  $V_2 - R(V_2) - 2$  ذات علاقة وثيقة بخاصية الاعتماد الخطى الصحيح فى حالة متغيرين ونحاول الآن إيجاد مقياس للاعتماد الخطى الصحيح فى حالة  $2 < n$  من المتغيرات العشوائية باستخدام مصفوفة التغاير  $V_n$ .

(3 - 11 - 3) الاعتماد الخطى الصحيح فى حالة  $n$  من المتغيرات ( $2 < n$ ):

نقدم النظرية التالية

نظرية (3 - 11 - 3 أ):

إذا كان كل من المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  غير مدمجة وتباين كل منها محدود، فإن هذه المتغيرات تكون علاقة خطية صحيحة واحدة على الأقل باحتمال

### الفصل الثالث - مقاييس للتزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

يساوى الولحد الصحيح (أى تكون معتمدة على بعضها اعتماداً خطياً صحيحاً) إذا وفقط إذا كان  $|V_n| = 0$  حيث  $V_n$  هي مصفوفة التغير للمتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$ .

(الإثبات)

(أولاً) الشرط الكافى «الشرط (إذا)»

نفرض أن  $|V_n| = 0$  وبفرض أن  $t_1, \dots, t_n$  أعداد حقيقية تختلف عن الصفر. إذن يمكن الوصول إلى العلاقة (3. 11. 9) السابقة. وبما أن  $|V_n| = 0$  إذن المقدار  $\underline{t}' V_n \underline{t}$  المعطى بالعلاقة (3. 11. 9) يكون موجب شبه محدد Positive Semi-definite وهذا يدل على أنه يمكن إيجاد مجموعة خاصة من القيم  $t_1, \dots, t_n$  تختلف كلها عن الصفر ومع ذلك يكون

$$(3. 11. 10): \underline{t}' V_n \underline{t} = 0$$

حيث  $\underline{t}' = (t_1, \dots, t_n)$ .

فإذا كان  $Z$  متغير عشوائى معطى بالعلاقة  $Z = \sum_{i=1}^n t_i x_i$  فإن:

$$\begin{aligned} v(Z) &= v\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n t_i^2 v_{ii} + \sum_{i \neq k} t_i t_k v_{ik} \\ &= \sum_{i,k=1}^n t_i t_k v_{ik} = \underline{t}' V_n \underline{t} . \end{aligned}$$

إذن

$$(3. 11. 11): \underline{t}' V_n \underline{t} = v\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)$$

من (3. 11. 10) و (3. 11. 11) يمكن أن يكون

$$(3. 11. 12): v\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) = 0$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

حيث  $t_i = 0$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$

إن المتغير العشوائى  $\sum_{i=1}^n t_i x_i$  متغير مدمج توقعه هو:

$$\sum_{i=1}^n t_i E(x_i) = C$$

ومن علاقة (2. 6. 6c) نجد أن:

$$\Pr \left[ \sum_{i=1}^n t_i x_i = C \right] = 1$$

إن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  معتمدة على بعضها اعتماداً خطياً صحيحاً.

(ثانياً) الشرط اللازم «الشرط (وقفه إذا)»

نفرض أن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  معتمدة على بعضها اعتماداً خطياً صحيحاً أى أن:

$$\Pr \left[ \sum_{i=1}^n t_i x_i = C \right] = 1$$

إن العلاقة  $\sum_{i=1}^n t_i x_i$  تمثل متغيراً عشوائياً مدمجاً أى أن تباينه يساوى الصفر.

فإذا كانت  $t_1, \dots, t_n$  أعداد حقيقية تختلف عن الصفر فإننا نجد من العلاقة (3. 11. 11) أن

$$V \left( \sum_{i=1}^n t_i x_i \right) = \underline{t}' V_n \underline{t} = 0$$

إن  $|V_n| = 0$ .

هـ. ط. ث

والنظرية السابقة توضح أنه إذا كان  $|V_n| = 0$  فإن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير

المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  يكون متركزاً على مستوى زائد hyper plane ذو أبعاد أقل من  $n$  وبناء على ذلك يمكن تقديم التعريف التالى للتوزيع المشترك المدمج.

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

تعريف (3 - 11 - 3) التوزيع المشترك المدمج:

إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  التي تمثل مركبات المتغير العشوائى المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  تحقق علاقة خطية (مستقيمة) واحدة على الأقل باحتمال واحد صحيح فإن توزيع المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  يسمى توزيعاً مدمجاً degenerate وإذا كان  $|V_n| \neq 0$  فإن التوزيع يكون غير مدمج Non - degenerate.

(3 - 11 - 4) بعض خصائص مصفوفة التغاير  $V_n$ :

(1) مصفوفة التغاير  $V_n$  متماثلة و  $|V_n| \geq 0$  — كما ذكرنا فى العلاقة (3. 11. 8) — وهذا يترتب عليه أن:

$$(3. 11. 13): |V_n| \leq \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2$$

(2) إذا كانت  $V_{ik} = 0$  لجميع قيم  $i \neq k$  تكون المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  غير مرتبطة Uncorrelated وتكون مصفوفة التغاير  $V_n$  فى هذه الحالة مصفوفة قطرية ويكون:

$$(3. 11. 14): |V_n| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2$$

عندما  $v_{ik} = 0$  لجميع قيم  $i \neq k$ .

(3) من العلاقتين (3. 11. 13) و (3. 11. 14) نرى أن قيمة المحدد  $|V_n|$  تصل نهايتها العظمى  $(\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2)$  عندما تكون المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  غير مرتبطة.

(4) من العلاقة (3. 11. 13) نرى أنه كلما صغرت  $\sigma_1^2$  — أى كلما كان التوزيع الهامشى للمتغير  $X_1$  متركزاً حول توقعه — كلما صغرت قيمة المحدد  $|V_n|$  وفى النهاية عندما تؤول واحدة من التباينات  $\sigma_i^2$  إلى الصفر فإن  $|V_n| = 0$  وبالتالي يصبح توزيع المتغير  $(X_1, \dots, X_n)$  متلاشياً degenerate كما يتضح من النظرية السابقة، أى يصبح متغيراً عشوائياً عدد مركبته أقل من  $n$ .

لكل هذه الخصائص السابقة أطلق "ولكس" "Wilks" على المحدد  $|V_n|$  تسمية خاصة إذ أسماه بـ "التباين العام" "Generalized Variance".



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزوم

(3 - 11 - 5) استخدام المصفوفات في التعبير عن توقع وتباين وتغاير متجهات المتغيرات العشوائية:

إذا كان:  $\underline{X}' = (X_1, \dots, X_n)$  ,  $\underline{Y}' = (Y_1, \dots, Y_p)$  متجهان عشوائيان فإن:

$$(3. 11. 15): (a) E(\underline{X}') = [E(X_1), \dots, E(X_n)]$$

$\underline{X}'$  هو توقع المتجه العشوائي

$$(b) V(\underline{X}') = \begin{bmatrix} v(X_1) & \dots & c(X_1, X_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ c(X_n, X_1) & \dots & v(X_n) \end{bmatrix} = [v_{ik}]_{n \times n}$$

هي مصفوفة التغاير للمتجه العشوائي  $\underline{X}'$  المعطاة بالعلاقة (3. 11. 7a)

$$(c) C(\underline{X}, \underline{Y}) = \text{Cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \begin{bmatrix} c(X_1, Y_1) & \dots & c(X_1, Y_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ c(X_n, Y_1) & \dots & c(X_n, Y_p) \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة تغاير المتجهان العشوائيان  $\underline{X}'$  و  $\underline{Y}'$ . حيث:

$$C(\underline{X}, \underline{Y}) = [C(\underline{X}, \underline{Y})]'$$

$$(d) V(\underline{L}' \underline{X}) = \underline{L}' V(\underline{X}) \underline{L} , \quad C(\underline{L}' \underline{X}, \underline{M}' \underline{Y}) = \underline{L}' C(\underline{X}, \underline{Y}) \underline{M}$$

حيث  $\underline{L}$  و  $\underline{M}$  متجهان عموديان.

إذا كان:  $\underline{L}' = (l_1, \dots, l_n)$  نجد من العلاقات (b) و (d) السابقة أن:

$$(3. 11. 16): V(\underline{L}' \underline{X}) = V\left(\sum_{i=1}^n l_i x_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n l_i^2 V(x_i) + 2 \sum_{i < j} l_i l_j \text{Cov}(x_i, x_j).$$

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وإذا كان:  $\underline{L}' = (l_1, \dots, l_n)$  ;  $\underline{M}' = (m_1, \dots, m_p)$  نجد من العلاقات (c) و (d) السابقة أن:

$$(3.11.17): \text{Cov}\left(\underline{L}' \underline{X}, \underline{M}' \underline{Y}\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n l_i x_i, \sum_{j=1}^p m_j y_j\right) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p l_i m_j \text{Cov}(x_i, y_j).$$

وعندما تكون  $p > n$  نجد أن:

$$(3.11.18): \text{Cov}\left(\underline{L}' \underline{X}, \underline{M}' \underline{X}\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n l_i x_i, \sum_{j=1}^p m_j x_j\right) \\ = \sum_{i=1}^n l_i m_i v(x_i) + \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{j=1}^p l_i m_j \text{Cov}(x_i, x_j) \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^p l_i m_j \text{Cov}(x_i, x_j).$$

لما عندما  $p = n$  فإن:

$$(3.11.19): \text{Cov}\left(\underline{L}' \underline{X}, \underline{M}' \underline{X}\right) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n l_i x_i, \sum_{j=1}^n m_j x_j\right) \\ = \sum_{i=1}^n l_i m_i v(x_i) + \sum_{i \neq j=1}^n \sum_{j=1}^n l_i m_j \text{Cov}(x_i, x_j).$$

إذا كانت  $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_p$  متجهات عشوائية حيث  $\underline{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$  و  $\underline{X}_i'$  و  $l_1, \dots, l_p$  كميات ثابتة فإن:

$$(3.11.20): V(l_1 \underline{X}_1 + \dots + l_p \underline{X}_p) = \sum l_i^2 V(\underline{X}_i) + 2 \sum_{i < j} l_i l_j C(\underline{X}_i, \underline{X}_j)$$

وإذا كانت المتغيرات  $\underline{X}_i$  غير مرتبطة

$$= \sum l_i^2 V(\underline{X}_i)$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وإذا كانت المتجهات العشوائية  $\underline{X}_i$  غير مرتبطة ولها نفس التباين

$$= (\sum I_i^2) v(\underline{X}_i)$$

وإذا كان:  $\underline{X}' = (X_1, \dots, X_n)$  متغير عشوائي متجه و  $B$  مصفوفة من الدرجة  $(m \times n)$  فإن  $B\underline{X}$  يكون متجه عشوائي عدد مركباته (متغيراته)  $m$  ويكون:

$$(3.11.21): E(B\underline{X}) = B E(\underline{X})$$

$$V(B\underline{X}) = B V(\underline{X}) B'$$

عندما تكون  $B$  متجه صفى:  $B = (I_1, \dots, I_n)$  نجد من العلاقة السابقة أن:

$$E(B\underline{X}) = E(\sum I_i x_i) = \sum I_i E(x_i)$$

والتباين  $v(B\underline{X})$  كما هو في العلاقة (3.11.16) السابقة.

(6 - 11 - 3) مصفوفة معاملات الارتباط:

نقدم فيما يلي مصفوفة شديدة الصلة بمصفوفة التباين  $V_n$  المقدمة في (3.11.7) هي مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  ونرمز لها بالرمز  $P_n = [\rho_{ik}]$  حيث  $\rho_{ik}$  هو معامل الارتباط بين المتغيرين  $X_i$  و  $X_k$  وتأخذ الشكل التالي:

$$(3.11.22): P_n = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

(حيث  $\rho_{ii} = 1$ )

والمصفوفة  $P_n$  متماثلة - لأن:  $\rho_{ik} = \rho_{ki}$  - وغير سالبة أى أن:

$$(3.11.23): |P_n| \geq 0$$

وذلك لأنه بالتعويض في المصفوفة  $V_n$  في العلاقة (3.11.7) - عن

$$: P_n \text{ نحصل على العلاقة التالية بين محدد } V_n \text{ ومحدد } P_n:$$

$$(3.11.24): |V_n| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2 |P_n|.$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

وبالتعويض في العلاقة السابقة بالعلاقة (3. 11. 13) نجد أن:

$$(3. 11. 25): |P_n| \leq 1$$

ولكن من (3. 11. 22) نرى أن  $|P_n| = 0$  عندما تكون كل معاملات الارتباط  $\rho_{ik} = 0$  أى أن قيمة المحدد  $|P_n|$  تصل نهايتها العظمى عندما تكون كل المتغيرات غير مرتبطة وفي هذه الحالة تصبح المصفوفة  $P_n$  هي مصفوفة الوحدة  $I_n$ . أما إذا كان واحد على الأقل من معاملات الارتباط  $\rho_{ik}$  يساوى الواحد الصحيح يكون معنى ذلك أن المتغير  $\underline{X}' = (X_1, \dots, X_n)$  متلاشياً - طبقاً لنظرية (3 - 11 - 3) السابقة - وفي هذه الحالة يكون  $|V_n| = 0$  وكذلك  $|P_n| = 0$  أى أن  $|P_n|$  يصل نهايته الصغرى 0 عندما يكون التوزيع متلاشياً - ومن هذا نرى أن  $|P_n|$  يصلح مقياساً لدرجة اضمحلال أو تلاشى التوزيع.

### (3 - 12) التوقع الشرطى فى حالة $n < 2$ من المتغيرات العشوائية:

إذا رمزنا لدالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $X_1$  عندما  $X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  بالرمز  $F(x_1 | x_2, \dots, x_n)$  حيث أنها دالة فى متغير واحد  $(x_1)$  والباقى ثوابت، فإن التوقع الشرطى للمتغير  $g(X_1)$  عندما  $X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  يمكن تعريفه بالعلاقة:

$$(3. 12. 1): E[g(X_1) | x_2, \dots, x_n] = \int g(x_1) dF(x_1 | x_2, \dots, x_n)$$

وبوضع  $g(x_1) = x_1$  فى العلاقة السابقة نحصل على التوقع الشرطى:

$$(3. 12. 2): E[X_1 | x_2, \dots, x_n] = \int x_1 dF(x_1 | x_2, \dots, x_n)$$

فإذا كانت المتغيرات من النوع المتقطع فإن علامات التكامل فى العلاقات السابقة

تتحول إلى علامات المجموع. كذلك بوضع:  $g(X_1) = [X_1 - E(X_1 | x_2, \dots, x_n)]^2$  فى معادلة (3. 12. 1) السابقة نحصل على التباين الشرطى للمتغير  $X_1$  عند ثبات باقى المتغيرات عند القيم  $x_2, \dots, x_n$  فى الصورة التالية:

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$$(3.12.3): V[X_1 | x_2, \dots, x_n]$$

$$= \int [X_1 - E(X_1 | x_2, \dots, x_n)]^2 dF(x_1 | x_2, \dots, x_n). \\ = E\{[X_1 - E(X_1 | x_2, \dots, x_n)]^2 | x_2, \dots, x_n\}$$

والتوقع الشرطى  $E[X_1 | x_2, \dots, x_n]$  كدالة فى  $x_2, \dots, x_n$  يسمى دالة انحدار  $X_1$  على  $x_2, \dots, x_n$  فإذا كانت هذه الدالة فى الصورة التالية:

$$(3.12.4): E(X_1 | x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

نقول أن  $X_1$  يرتبط بالمتغيرات  $x_2, \dots, x_n$  فى شكل علاقة انحدار خطى من الدرجة الأولى فى  $x_2, \dots, x_n$ . وإذا كان التباين الشرطى  $V(X_1 | x_2, \dots, x_n) = 0$  لجميع قيم  $x_2, \dots, x_n$  التى يكون عندها التوقع الشرطى  $E(X_1 | x_2, \dots, x_n)$  موجود يكون من الواضح أن:

$$\Pr\{X_1 = E[X_1 | x_2, \dots, x_n] | x_2, \dots, x_n\} = 1$$

أى أنه عند معرفة قيم  $x_2, \dots, x_n$  يمكن استخدام التوقع  $E(X_1 | x_2, \dots, x_n)$  لتقدير قيمة  $X_1$  وذلك باحتمال يساوى الواحد الصحيح أى بدرجة عالية جداً من الثقة. وبصفة عامة إذا كان  $X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_n = x_n$  فإن المتغير المشترك  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  عندما  $X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_n = x_n$  يعتبر متغيراً شرطياً ذو  $m$  مركبة وله دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n)$  ويكون توقع المتغير الشرطى  $[g(X_1, \dots, X_m) | x_{m+1}, \dots, x_n]$  معرفاً (فى حالة وجوده) بالعلاقة التالية:

$$(3.12.5): E[g(X_1, \dots, X_m) | x_{m+1}, \dots, x_n] \\ = \int_{R_m} g(x_1, \dots, x_m) dF(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n).$$

(حيث  $R_m$  هو الفراغ الاقليدى ذو  $m$  بعداً)

ويمكن باختيارات مناسبة للدالة  $g(X_1, \dots, X_m)$  أن نحصل على العزوم الشرطية المشتركة لأى عدد من المتغيرات. فمثلاً التوقع الشرطى المشترك للمتغيرين الشرطيين

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

$X_1, X_2$  عندما  $X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n$  يمكن الحصول عليه بوضع  $m = 2$  و  $g(x_1, \dots, x_m) = X_1 X_2$  ويكون التوقع الشرطي للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  هو:

$$(3. 12. 6): E[X_1 X_2 | x_3, \dots, x_n] = \int_{R_2} x_1 x_2 dF(x_1, x_2 | x_3, \dots, x_n).$$

كما أن تغاير المتغيرين الشرطيين السابقين يمكن الحصول عليه بوضع:

$$\begin{aligned} g(X_1, \dots, X_m) &= g(X_1, X_2) \\ &= [X_1 - E(X_1 | x_3, \dots, x_n)] [X_2 - E(X_1 | x_3, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

ويكون:

$$\begin{aligned} (3. 12. 7): \text{Cov}[X_1, X_2 | x_3, \dots, x_n] \\ = \int_{R_2} [X_1 - E(X_1 | x_3, \dots, x_n)] \\ [X_2 - E(X_2 | x_3, \dots, x_n)] dF(x_1, x_2 | x_3, \dots, x_n). \end{aligned}$$

وهكذا بالنسبة لباقي العزوم الشرطية لأي عدد من المتغيرات عند ثبات باقي المتغيرات.

## الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معلم الموضع) والتشتت والعزم

### تمارين الباب الثالث

(1 - 3): أوجد  $E(X)$  (توقع  $X$ ) و  $V(X)$  (تباين  $X$ ) في تمرين (1 - 2) (23).

(2 - 3): أوجد  $E(X)$  و  $V(X)$  في تمرين (2 - 2) (27).

(3 - 3): أوجد  $E(X)$  و  $V(X)$  ووسيط المتغير  $X$  في كل من التمارين التالية:

(أ) (5 - 2) (ب) (6 - 2) (ج) (7 - 2)

(4 - 3): أوجد  $E(X)$  ووسيط ومنوال المتغير  $X$  في تمرين (2 - 2) (29).

(5 - 3): أوجد العزم الرأسي  $\mu'_r = E(X^r)$  في كل من:

(أ) تمرين (1 - 2) (24) (ب) تمرين (1 - 2) (26).

(6 - 3): في تمرين (13 - 2) أوجد:

$$E(X_2 | x_1), V(X_2 | x_1).$$

(7 - 3): في تمرين (14 - 2) أوجد:

$$E(X_1 | x_2), V(X_1 | x_2)$$

(8 - 3): في تمرين (31 - 2) أوجد:

$$E(XY), E(Y|x), V(Y|x), E(Y), E[E(Y|x)], \rho_{xy}$$

(9 - 3): أوجد توقع مربع المسافة بين نقطتين مختيرتا عشوائيا داخل مربع طول ضلعه  $a$ .

(10 - 3): إذا كانت معادلة الدرجة الثانية  $a^2 - ba + x = 0$  لها جذور حقيقية. و  $x$  متغير عشوائي موجب دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{d-c}; 0 < c < x < d$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد القيمة المتوقعة لكل من جذرى معادلة الدرجة الثانية السابقة.

### الفصل الثالث - مقياس للزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

(3 - 11) إذا كان:

$$P(x, y) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{y} \binom{N - N_1 - N_2}{n - x - y}}{\binom{N}{n}}.$$

حيث  $x$  و  $y$  أعداد صحيحة موجبة تتراوح بين صفر و  $n$ ، أوجد:

$$V(x), V(y), \text{Cov}(x, y).$$

(3 - 12):  $X$  و  $Y$  متغيران مستقلان كثافة احتماليهما:

$$f_1(x) = 12x^2(1-x) \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_2(y) = 2y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1$$

أوجد توقع المقدار  $\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X^2}$ .

(3 - 13): إذا كان  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماليه:  $-1 < X < 1$  ،  $f(x) = \frac{1}{2}$

و  $Y = X^2$  بين أن  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . كذلك إذا كان  $Y = X^{2r}$  حيث  $r$  عدد صحيح موجب بين أن  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  أيضاً.

ملاحظة: هذا يوضح أن عدم الارتباط لا يعنى الاستقلال فالمتغيران  $X$  و  $Y$  غير مرتبطان بالرغم من وجود علاقة دالية بينهما  $Y = X^{2r}$ .

(3 - 14): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي  $X$  متماثلة حول قيمة معينة  $a$ ، فأثبت أن العزم الفردية حول  $a$  جميعها أصفار.

(3 - 15): لأى متغيرين  $X$  و  $Y$  أثبت أن:  $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$  ومن ثم بين أن:  $\mu_2 \leq \mu_2$  لجميع قيم  $r$  الزوجية وبالتالي:  $\mu_2 \leq \mu_4$ .

(3 - 16): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  هي:

$$f(x, y) = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{15}\right)^y$$

عندما:  $x = 1, 2, 3, 4, 5$  ;  $y = 0, 1, 2, \dots$  و يساوى صفر خلاف ذلك.



### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

أوجد:

$$E(Y) \quad (أ) \quad E(Y|x) \quad (ب) \quad E[E(Y|x)] \quad (ج)$$

(3-17): أثبت أن المقدار  $E(X-C)^2$  لأى متغير  $X$  وثابت  $C$  يكون فى نهايته الصغرى عندما  $C = E(X)$ .

(3-18): أثبت أن الانحراف المتوسط حول نقطة  $a$  يكون فى نهايته الصغرى عندما تكون النقطة  $a$  هى الوسيط. ومن ثم أثبت صحة العلاقة (9.3.3).

(3-19): إذا كان  $m$  هو التوقع و  $g$  الوسيط الهندسى و  $H$  الوسيط التوافقى و  $\sigma^2$  التباين لمتغير عشوائى  $X$ . وكانت الانحرافات عن التوقع صغيرة بالمقارنة بالتوقع نفسه بحيث أن:

$$\frac{(X-m)^r}{m^r} \rightarrow 0, \text{ for } r > 2$$

بين أن الوسيط الهندسى  $H$  يساوى تقريباً  $m(1 - \frac{1}{2}\sigma^2/m^2)$  وأن الوسيط التوافقى  $g$  يساوى تقريباً  $m(1 - \sigma^2/m^2)$ . أى أن:  $H$  يساوى تقريباً  $\frac{1}{2}(m+g)$ .

(3-20): بين أن الانحراف المتوسط  $\delta$  حول الوسيط الحسابى يحقق العلاقة  $\sigma \geq \delta$  وأن الفرق المتوسط  $\Delta$  يحقق العلاقة  $\sigma \cdot \sqrt{2} \geq \Delta$  حيث  $\sigma$  هى الانحراف المعيارى.

(3-21): فى التوزيع الأسى السالب:

$$f(x) = K e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq \infty$$

بين أن التوقع والانحراف المعيارى والفرق المتوسط كلها متساوية وتساوى  $\sigma$ . وأن المدى الربيعى يساوى  $\sigma \ln 3$ .

(3-22): فى التوزيع التالى:

$$f(x) = K e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{n-1}, \quad 0 \leq x \leq \infty$$

بين أن:

$$\text{العزم الأول حول الصفر} = \frac{\sqrt{2} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \text{العزم الثانى حول الصفر} = n.$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(3 - 23): في التوزيع المستمر عندما يكون التوقع موجود أثبت أن الفرق المتوسط  $\Delta$  للمتغير  $X$  هو:

$$\Delta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \{1 - F(x)\} dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} x \{F(x) - \frac{1}{2}\} dF(x).$$

حيث  $F(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$ .

ملاحظة: الفرق المتوسط مُعرَّف بالملاتين (12, 11, 3.3).

(3 - 24):  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{K}{x^4 + 1} ; -\infty \leq x \leq \infty$$

بين أن تباين  $X$  يساوى الواحد الصحيح.

(3 - 25): متغير يأخذ قيم غير سالبة فقط وتوقعه  $\mu$  بين أنه لأى قيمة موجبة  $x$  يكون:

$F(x) > 1 - \mu/x$  حيث  $F(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير. (هذه تسمى - أحياناً - متباينة ماركوف)

(3 - 26): في التوزيعات المنقطعة المفردة التى تأخذ متغيراتها قيم غير سالبة أثبت أن:

$$H \leq g \leq m \text{ الوسط الهنسمى } \geq \text{الوسط الحسابى}$$

(3 - 27): علماً بأن الانحراف المتوسط  $\delta$  للمتغير  $X$  هو:

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} x - \mu |dF(x)$$

حيث  $E(X) = \mu$  و  $F(x)$  دالة التوزيع الاحتمالي. أثبت أن:

$$\delta = 2 \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) dF(x) = -2 \int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) dF(x).$$

(3 - 28): إذا كانت  $f(x)$  دالة غير تزايدية فى المدى  $0 \leq x \leq \infty$  و  $E(X) = \mu$

ووسط  $m = X$  بين أن  $m \leq \mu$  وبذلك يكون:  $\mu \geq 1/\{2f(0)\}$ .

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزم

(3 - 29): أثبت أن:

$$\mu'_{[r]}(a) = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (b-a)^{[j]} \mu'_{[r-j]}(b)$$

حيث  $\mu'_{[r]}(a)$  هو العزم العاظمي من الدرجة  $r$  حول النقطة  $a$  المعطى بالعلاقة

$$(3. 5. 26) \text{ و } (b-a)^{[j]} = (b-a)(b-a-1)\dots(b-a-j+1).$$

(3 - 30): في التوزيع المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^2} x e^{-x/\lambda^{1/2}} ; x > 0, \lambda > 0$$

ويسمى بتوزيع "راي ليغ" Ray Leigh distribution "Ray Leigh" - أنظر تمرين (1 - 2) (27) - بين أن كل من التوقع والتباين موجود وأوجدتهما.

(3 - 31): في التوزيع المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda^3} \cdot x^2 e^{-x^2/\lambda} ; x > 0, \lambda > 0$$

ويسمى بتوزيع "ماكسويل" "Maxwell" distribution - أنظر تمرين (1 - 2) (28) - بين أن كل من التوقع والتباين موجود وأوجدتهما.

(3 - 32): في التوزيع المعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{1}{B\left[\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right]} (1-x^2)^{\frac{n-4}{2}} ; -1 \leq x < 1$$

والمسمى بتوزيع معامل الارتباط  $r$  - distribution  $r$  - بين أن كل من التوقع والتباين موجود وأوجدتهما.

(3 - 33):  $X$  متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{A}{|k|} [1 - |k - x|]$$

عندما:  $|k - x| \leq 1$  ,  $k = \pm 1^2, \pm 2^2, \pm 3^2, \dots$  , وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(أ) لوجد قيمة  $A$  التي تجعل  $f(x)$  دالة كثافة احتمال.

### الفصل الثالث - مقياس النزعة المركزية (معالم الموضع) والنشئنت والعزوم

(ب) لرسم الدالة  $f(x)$ .

(ج) بين أن توقع  $|x|$  غير موجود (غير محدود).

(د) بين أنه إذا عرفنا التوقع بمفهوم قيمة كوشى الرئيسية فإنه يكون موجود.

(هـ) باستخدام متغير آخر  $Y$  كمتغير مدمج، أو كمقدار ثابت  $Y = C$  بين أن توقع مجموع متغيرين عشوائيين ليس من الضروري أن يساوى مجموع توقعيهما إذا عرفنا التوقع بأنه القيمة الرئيسية لكوشى. أى باختصار أثبت صحة العلاقة (3. 2. 18).

$X$  متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = k x^{-m} e^{-x/C}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad C > 0$$

أوجد قيمة  $k$  ثم أثبت أن:

$$\mu'_r = E(X^r) = \frac{C^r}{\Gamma(m-1)} \cdot \Gamma(m-r-1)$$

عندما  $r \leq m-1$  ويكون غير موجود خلاف ذلك.

(35-3): إذا كان  $X$  متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = k \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\{C \tan^{-1}(x/a)\}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

بين أن:

$$\mu'_r = E(X^r) = k a^{r+1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-r-2}(\theta) \cdot \sin^r(\theta) e^{-C\theta} d\theta$$

ومن ثم:

$$\mu'_r = \frac{a}{2m-r-1} \{ (r-1)a\mu'_{r-2} - C\mu'_{r-1} \}.$$

(36-3): إذا كانت  $f(x)$  دالة كثافة احتمال متماثلة حول  $x=0$  للمتغير العشوائى  $X$ ,

حيث  $-a \leq X \leq a$ ، ولها وسيط وحيد عند النقطة  $x=0$ . بين أن:

$$\mu_{2r} = E(X^{2r}) < a^{2r} / (2r+1), \quad r \geq 1.$$

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) ولتشتت والعزوم

(37 - 3):  $X$  متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{k}{1+x^{2r}}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

يبين أن العزوم  $\mu'_p$  موجود لجميع قيم  $p \leq 2(r-1)$ . وبين أيضا بالنسبة للعزوم الموجودة أن:

$$\mu'_{2s-1} = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

$$\mu'_{2s} = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2r}\right) / \text{Sin}\left\{\frac{(2s+1)\pi}{2r}\right\}$$

(38 - 3): متغير  $X$  دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{B(n, m)} \cdot \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}, \quad n > 0, m > 0, 0 \leq x \leq \infty.$$

لأى قيم  $r$  يكون العزم  $\mu'_r = E(X^r)$  موجود. أوجد  $\mu'_r$  ومنه استنتج  $E(X)$  و  $V(X)$ .

(39 - 3):  $(X, Y)$  متغير عشوائى مشترك دالة كثافة احتماله:

$$f(x, y) = \frac{k}{(1+ax+by)^n} \quad ; x > 0, y > 0$$

حيث  $a$  و  $b$  و  $k$  أعداد موجبة. لأى الأعداد  $r$  ولا يكون العزم المشترك  $\mu'_{r,r} = E(X^r Y^r)$  موجود. أوجد هذا العزم ومنه استنتج التباين والتغاير للمتغيرين  $X$  و  $Y$ .

(40 - 3): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  هى:

$$f(x, y) = 2 \quad ; 0 < x < y < 1$$

بين أن:  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ .

(41 - 3): المتغير  $X$  له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  حيث  $f(x) > 0$  عندما  $x = -1, 0, 1$  وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(أ) إذا كانت  $f(0) = \frac{1}{2}$  أوجد  $E(X^2)$ .

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معلم الموضوع) والتشتت والعزوم

(ب) إذا كانت  $f(0) = \frac{1}{2}$  و  $E(X) = \frac{1}{6}$  حدد قيمة كل من  $f(1)$  و  $f(-1)$ .

(3 - 42): إذا كان تباين المتغير  $X$  محدود، بين أن:  $E(X^2) \geq [E(X)]^2$ .

(3 - 43):  $X$  متغير عشوائي مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  متماثلة حول المحور

$X = C$ . إذا كان توقع  $X$  محدود بين أن هذا التوقع يساوى  $C$ .

(3 - 44):  $X$  متغير عشوائي متقطع دالة احتماله  $P(x)$  و  $-\infty \leq x \leq \infty$ . أثبت أن

الشرط اللازم والكافى لى يكون  $E(X - b)^2 = 0$  هو أن يكون  $P(x) = 1$  عندما  $X = b$  ويساوى الصفر خلاف ذلك.

(3 - 45):  $X$  متغير عشوائى  $m$  عدد صحيح موجب. إذا كان التوقع  $E(X - b)^m$

محدود وإذا كانت العزوم الأول والثانى والثالث للتوزيع حول النقطة  $X = 7$  هى 3 و 11 و 15 على الترتيب. حدد التوقع  $\mu$  للمتغير  $X$  وكذلك العزوم الثلاثة الأولى للمتغير  $X$  حول التوقع  $\mu$ .

(3 - 46): بين أن عزوم المتغير العشوائى يمكن أن تكتب بدلالة دالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$  كما يلى:

$$\mu'_r = E(X^r) = r \left\{ \int_0^{\infty} x^{r-1} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 x^{r-1} F(x) dx \right\}$$

وذلك إذا كان العزم من الدرجة  $r$  موجود. وبالتالي إذا كان التوقع موجود يكون:

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx$$

مثل  $E(X)$  بيانياً.

(3 - 47): إذا كان  $X$  متغير عشوائى توقعه  $\mu$  والتوقع  $E(X - \mu)^{2k}$  محدود بين أن:

$$\Pr[|X - \mu| \geq C] \leq E(X - \mu)^{2k} / C^{2k}$$

حيث  $C$  ثابت موجب.

### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(48 - 3):  $X$  متغير عشوائي يحقق العلاقة  $E(X) = \mu$  و  $\Pr[X \leq 0] = 0$  كمية محدودة. بين أن:

$$\Pr[X \geq 2\mu] \leq \frac{1}{2}$$

(49 - 3):  $X$  متغير عشوائي حيث  $E(X) = 3$  و  $E(X^2) = 13$  استخدم متباينة تشيبيشيف لتحديد حد أدنى للاحتمال  $\Pr[-2 < X < 8]$ .

(50 - 3): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  هي:

$$f(x_1, x_2) = 2 \quad ; \quad 0 < x_1 < x_2 < 1.$$

أوجد:

$$E(X_1 | x_2), V(X_1 | x_2), \rho_{x_1, x_2}$$

$$\Pr(0 < X_1 < \frac{1}{2} | X_2 = \frac{3}{4}), \Pr(0 < X_1 < \frac{1}{2}).$$

(51 - 3):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان متقطعان لهما دالة الاحتمال المشتركة:

$$P(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)/18 \quad ; \quad (x_1, x_2) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2).$$

أوجد المتوقع الشرطي والتباين الشرطي للمتغير  $X_2$  عندما  $X_1 = x_1$ ,  $x_1 = 1, 2$ .

(52 - 3): إذا كان المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  لهما دالة الاحتمال المشتركة:

$$P(x, y) = \frac{1}{3} \quad ; \quad (x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 2) \quad (أ)$$

$$P(x, y) = \frac{1}{3} \quad ; \quad (x, y) = (0, 2), (1, 1), (2, 0) \quad (ب)$$

$$P(x, y) = \frac{1}{3} \quad ; \quad (x, y) = (0, 0), (1, 1), (2, 0) \quad (جـ)$$

في كل حالة من الحالات السابقة احسب معامل الارتباط  $\rho$  بين  $X$  و  $Y$ .

(53 - 3): إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان لهما دالة الاحتمال المشتركة التالية:

$(x, y)$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$P(x, y)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$

أوجد معامل الارتباط بين  $X$  و  $Y$ .

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(3 - 54): إذا كان المتغيران العشوائيان  $X$  و  $Y$  لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$f(x, y) = 1 \quad ; \quad -x < y < x, \quad 0 < x < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن لجميع قيم  $(x, y)$  التي عندها  $f(x, y) > 0$  يكون:

(أ) الخط البياني الممثل للدالة  $E(Y | x)$  خط مستقيم. حدد معادلة الخط وارسم المنحنى الممثل له.

(ب) بينما الخط البياني الممثل للدالة  $E(X | y)$  ليس خطاً مستقيماً. حدد معادلة الخط وارسم المنحنى الممثل له.

(3 - 55): أثبت أن معامل الارتباط  $\rho_{xy}$  بين المتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  يحقق العلاقة:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

(3 - 56):  $X$  متغير عشوائي متقطع له دالة الاحتمال:

$$P_k = \Pr(X = k) = \frac{6}{\pi^2 k^2} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots$$

و  $Y$  متغير عشوائي آخر مُعرف كما يلي:

$$Y = \begin{cases} x & \text{إذا كان } x \text{ عدداً فردياً} \\ -x & \text{إذا كان } x \text{ عدداً زوجياً} \end{cases}$$

هل توقع  $Y$  موجود؟ علل إجابتك.

(3 - 57): أوجد الوسيط والمنوال والتوقع للتوزيع التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

(3 - 58):  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  ثلاث متغيرات عشوائية نرمز لتوقعاتها وتبايناتها ومعاملات الارتباط بالرموز:

$\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$  ;  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$  ;  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  - حيث  $\rho_{11}$  هو معامل الارتباط بين  $X_1$  و  $X_1$ .



### الفصل الثالث- مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

فيذا كان:

$$E(X_1 - \mu_1 | x_2, x_3) = b_2(x_2 - \mu_2) + b_3(x_3 - \mu_3)$$

حيث  $b_2$  و  $b_3$  ثابتان. حدد  $b_2$  و  $b_3$  بدلالة التباينات ومعاملات الارتباط.

(3- 59): أثبت أن معالم التركيز لجينى والمعطى بالعلاقة (3. 3. 17) ينحصر بين الصفر والواحد الصحيح.

(3- 60): أثبت صحة العلاقة (3. 9. 36).

(3- 61): أثبت صحة العلاقة (3. 9. 37).

(3- 62): لى متغير عشوائى مشترك  $(X, Y)$ ، إذا كانت  $\varphi(x)$  دالة حقيقية وحيدة

القيمة فى  $x$ ، أثبت أن:  $E\{[Y - \varphi(X)]^2 | X = x\}$  يكون نهاية صغرى عندما  $\varphi(x) = E(Y | x)$ . أى أن العزم الشرطى من الدرجة الثانية للمتغير  $Y$  حول الدالة  $\varphi(x)$  عندما  $X = x$  يكون نهاية صغرى عندما تكون  $\varphi(x)$  هى التوقع الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$ .

(3- 63): إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان  $X_1$  و  $X_2$  توقعهما  $\mu_1$  و  $\mu_2$

وتباينهما  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ ، على الترتيب. بين أن توقع وتباين حاصل الضرب  $Y = X_1 X_2$  هو  $\mu_1 \mu_2$  و  $\mu_1^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2$ ، على الترتيب.

(3- 64): إذا كان  $Y$  يمثل مجموع مفردات عينة مكونة من خمسة مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك,}$$

فاوجد توقع وتباين  $Y$ .

(3- 65): إذا كان  $\bar{X}$  هو متوسط عينة عشوائية حجمها 9 مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 4x^3, \quad 0 < x < 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك,}$$

فاوجد توقع وتباين  $\bar{X}$ .

### الفصل الثالث - مقاييس النزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(3 - 66): إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان معامل الارتباط بينهما  $\rho = \frac{1}{2}$  وتوقعهما  $\mu_1 = 1$  و  $\mu_2 = 4$  وتباينيهما  $\sigma_1^2 = 4$  و  $\sigma_2^2 = 6$ ، على الترتيب. أوجد توقع  $Z = 3X - 2Y$  وتباين  $Z$ .

(3 - 67): إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان مستقلان توقعيهما  $\mu_1$  و  $\mu_2$  وتباينيهما  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ ، على الترتيب. حدد معامل الارتباط بين  $X$  و  $Z = X - Y$  بدلالة  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ .

(3 - 68):  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان توقعيهما  $\mu_1$  و  $\mu_2$  وتباينيهما  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ . ومعامل الارتباط بينهما  $\rho$ . بين أن معامل الارتباط بين:  $W = aX + b$  ( $a > 0$ ) و  $Z = cY + d$  ( $c > 0$ ) هو  $\rho$ .

(3 - 69): لعبة معينة يقوم فيها شخص بالقاء زهرة نرد ثم إلقاء قطعة عملة ثم سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة المكونة من 52 ورقة). ثم يتسلم ثلاثة جنيهات (3) عن كل نقطة تظهر على زهرة الطاولة، وعشرة جنيهات (10) عند ظهور الصورة على قطعة العملة ولا شيء عند ظهور الكتابة وجنيه واحد (1) لكل نقطة تظهر على ورقة الكوتشينة المسحوبة و 11 جنيه للشايب و 12 جنيه للبيت و 13 جنيه للولد. إذا كانت العمليات الثلاثة التي يقوم بها هذا الشخص تمثل ثلاث متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها توزيع منتظم فأوجد توقع وتباين القيمة التي يتسلمها هذا الشخص من الجنيهات.

(3 - 70):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان تباينيهما يختلفان عن الصفر. أوجد معامل الارتباط بين  $X_1$  و  $X_2$  بدلالة توقعي وتبايني  $X_1$  و  $X_2$ .

(3 - 71): إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك معالمة  $\mu_1$  و  $\mu_2$  و  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  و  $\rho$  - توقعي وتبايني  $X_1$  و  $X_2$  ومعامل الارتباط بينهما. أوجد معامل الارتباط بين الدالتين الخطيتين  $Y = a_1X_1 + a_2X_2$  و  $Z = b_1X_1 + b_2X_2$  بدلالة التوابت  $a_1$  و  $a_2$  و  $b_1$  و  $b_2$  ومعالم التوزيع المشترك.

(3 - 72): إذا كان  $X_1, \dots, X_n$  عينة عشوائية حجمها  $n$  مسحوبة من مجتمع توقعه  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$ ، فاستخدم متباينة تشيبيشيف "Chebychev's Inequality" لتبين أن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|\bar{X} - \mu| < \epsilon] = 1$  لكل قيم  $\epsilon > 0$ . (هذه صيغة أخرى لنظرية الأعداد الكبيرة التي سنتعلمها في الباب العاشر).

### الفصل الثالث - مقاييس التزعة المركزية (معالم الموضع) والتشتت والعزوم

(3 - 73): نفرض أن  $X$  متغير عشوائي مستمر توقعه  $\mu$  و  $Y = v(X)$  و  $E(Y)$  موجود و:

$$v(x) = v(\mu) + v'(\mu)(x - \mu) + \frac{1}{2} v''(\alpha)(x - \mu)^2$$

حيث  $\alpha$  تقع بين  $\mu$  و  $x$ . إذا كان  $v''(x) > 0$  لجميع قيم  $x$  بين أن  $E[v(X)] \geq v(\mu)$  وإذا كان  $v(x) \leq 0$  لجميع قيم  $x$  بين أن  $E[v(X)] \leq v(\mu)$ .

(3 - 74): نفرض أن  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  ثلاث متغيرات عشوائية متساوية التباين ومعاملات الارتباط بينها هي  $\rho_{12} = 0.3$  و  $\rho_{13} = 0.5$  و  $\rho_{23} = 0.2$ . أوجد معامل الارتباط بين الدالتين الخطيتين  $Y = X_1 + X_2$  و  $Z = X_2 + X_3$ .

(3 - 75): أوجد تباين مجموع عشرة متغيرات عشوائية كل منها تباينه 5 ومعامل الارتباط بين كل زوج منها 0.5.

(3 - 76): نفرض أن  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية توقعاتها  $\mu_1, \dots, \mu_n$  وتبايناتها  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  و  $\rho_{ij}$ ،  $i \neq j$ ، هو معامل الارتباط بين  $X_i$  و  $X_j$ . فإذا كان  $a_1, \dots, a_n$  و  $b_1, \dots, b_n$  ثوابت حقيقية فاثبت أن تغاير الدالتين الخطيتين

$$Z = \sum_{j=1}^n b_j X_j \text{ و } Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

هو:  $\rho_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$  حيث:  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ .



## الفصل الرابع

### الانحدار والارتباط والاقتران

(4 - 1) منحنيات الانحدار أو الانحدار من النوع الأول:

#### Regression Curves or Regression of the First Type:

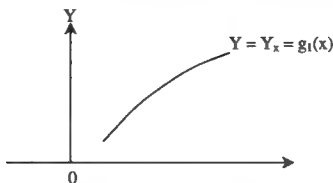
إذا كان المتغير العشوائى  $(X, Y)$  من النوع المستمر وله دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x, y)$  وكانت هذه الدالة مستمرة وتكاملية ودالة كثافة الاحتمال الهامشية  $f_1(x)$  للمتغير  $X$  مستمرة وكبير من الصفر عند النقطة  $X = x$  فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطية للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  تكون معطاة بالعلاقة

$$f_{21}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

فلو نظرنا للمتغير  $X$  على أنه متغير مستقل و  $Y$  متغير تابع سنجد أن لكل قيمة  $X = x$  من قيم المتغير  $X$  يوجد لدينا توزيع احتمالى شرطى للمتغير التابع  $Y$  له دالة كثافة الاحتمال الشرطية  $f_{21}(y | x)$  هذا التوزيع له معالم تحدد خصائصه — ومن معالم هذا التوزيع توقعه (التوقع الشرطى) ووسيطه (الوسيط الشرطى) وموالاته (الموالات الشرطى) وهكذا. وطالما أن التوزيع نفسه يعتمد على  $x$  فإن هذه المعالم بصفة عامة تعتمد على  $x$  كذلك، وحيث أن هذه المعالم تعطى فكرة عامة وملخصة ومفيدة عن توزيع المتغير الشرطى  $Y$  (عندما  $X = x$ ) لذلك يمكن التفكير فى استخدامها لتقدير قيمة  $Y$  المناظرة لقيمة معينة من قيم  $X$  — حيث أن كل منها يعتبر دالة فى  $x$ . فمثلا التوقع الشرطى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  يعتبر دالة فى  $x$  ويمكن أن نرمز له بالرمز  $Y_x = g_1(x) = E(Y | x)$  وعندما تتغير  $x$  من نقطة لأخرى تتغير معها  $Y_x$  لذا فإن  $g_1(x)$  تعتبر متغير عشوائى — لنظر علاقة (2. 9. 3) — وعلى ذلك فإن المحل الهندسى

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

النقطة  $(x, Y_x)$  لجميع قيم  $x$  المختلفة تمثل منحنى معين في المستوى  $R_2 = X \times Y$  كما في الشكل التالي:



شكل (4-1-1)

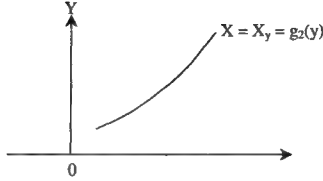
منحنى انحدار  $Y$  على  $X$

الشكل السابق يعطي قيمة الدالة (المتغير)  $Y_x$  لكل قيمة  $x$  من قيم المتغير  $X$  — وهو منحنى في المستوى  $R_2$  وقد يكون خط مستقيم أو منحنى من أى درجة أو أى نوع — أى أنه يعطي توقع  $Y$  لكل قيمة من قيم  $X$ . وأى منحنى من هذا النوع يسمى 'منحنى انحدار  $Y$  على  $X$ ' أو 'منحنى انحدار متوسطات  $Y$  على  $X$ ' ومعادلته تسمى 'معادلة انحدار  $Y$  على  $X$ ' وتكتب في الصورة التالية:

$$(4.1.1): Y = Y_x = E(Y | x)$$

وهي كما ذكرنا قد تكون معادلة خط مستقيم أو منحنى من أى درجة أو أى نوع. وبالمثل إذا اعتبرنا  $Y$  متغير مستقل و  $X$  متغير تابع — وكانت الدالة  $f_2(y)$  مستمرة وموجبة ودالة كثافة الاحتمال الشرطية  $f_{12}(x|y)$  للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  معطاة بالعلاقة  $f_{12}(x|y) = f(x,y)/f_2(y)$  فإن هذه الدالة (الشرطية) تعتمد على  $y$  بصفة عامة، وبالتالي فإن أى معلمة من معالم التوزيع الشرطي للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  تعتمد بصفة عامة على  $y$ . فمثلا التوقع الشرطي للمتغير  $X$  عندما  $Y = y$  يعتمد على  $y$  ويعتبر دالة فيها لذا نرمز له بالرمز  $X_y = g_2(y) = E(X|y)$ ، وبالتالي فإن المحل الهندسي للنقطة  $(X_y, y)$  لجميع قيم  $y$  يكون منحنى معين في المستوى  $R_2$  يسمى 'منحنى انحدار  $X$  على  $Y$ ' أو 'منحنى انحدار متوسطات  $X$  على  $Y$ ' ويمكن تمثيله بالشكل التالي:

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض



شكل (4 - 1 - 2)

"منحنى انحدار X على Y"

وهو منحنى معادلته:

$$(4.1.2): x = X_Y = E(X|y)$$

ومنحنيا الانحدار (4.1.1) و (4.1.2) ليسا متطابقان بصفة عامة، ولكنهما يكونان متطابقان إذا كان المتغيران X و Y معتمدين على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً، إذ في هذه الحالة يكون المتغيران X و Y مرتبطين بعلاقة خط مستقيم - لكن مثلاً  $Y = \alpha + \beta X$  - ففى هذه الحالة تكون كل قيم المتغير العشوائى (X, Y) واقعة على هذا الخط وبالتالي تكون كل قيم  $E(Y|x)$  و  $E(X|y)$  واقعة على نفس الخط فيكون خطى الانحدار متطابقان ويمثلهما خط واحد هو الخط المستقيم  $Y = \alpha + \beta X$ . أما إذا كان المتغيران X و Y مستقلان يكون  $E(Y|x) = E(Y) = m_2$  و  $E(X|y) = E(X) = m_1$  وبالتالي تصبح المعادلتان (4.1.1, 2) معادلتى خطين مستقيمين أولهما موازى لمحور X ويقطع محور Y عند النقطة  $Y = m_2$  والثانى موازى لمحور Y ويقطع محور X عند النقطة  $X = m_1$  ويقاطع الخطان (المتعامدان) عند النقطة  $(m_1, m_2)$  فى المستوى  $R_2$ . ومنحنى الانحدار (4.1.1) يستخدم لتقدير قيم المتغير Y بدلالة قيم المتغير X وكذلك المنحنى (4.1.2) يستخدم لتقدير قيم X بدلالة قيم Y، وحيث أننا نبحث دائماً عن المنحنى الذى يعطى أفضل تقدير ممكن سنرى أن المنحنيان (4.1.1, 2) يمتازان بميزة هامة هي أن كل منهما يعطى أفضل تقدير طبقاً لمبدأ هام يسمى مبدأ "المربعات الصغرى" "Principal of Least Squares"، وطبقاً لهذا المبدأ يكون تباين المتغير الشرطى حول خط الانحدار أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) ويمكن توضيح ذلك كما يلى: عند وجود علاقة ما بين متغيرين Y و X ونرغب فى استخدام أحدهما (X مثلاً) فى تقدير قيم المتغير الآخر فإننا نبحث من بين جميع الدوال الممكنة

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

$g(x)$  للمتغير المفرد  $X$  عن الدالة التي تقدم لنا أفضل تقدير لقيم  $Y$  بدلالة قيم  $X$ . وطبعاً أفضل دالة تحقق ذلك هي الدالة  $g(x)$  التي يتركز حول المنحنى الممثل لها قيم المتغير  $Y$ . وكلما زاد تركيز قيم  $Y$  حول منحنى الدالة  $g(x)$  كلما كانت هي أفضل دالة يمكن استخدامها لتقدير قيم  $Y$  بمعلومية  $X$ . وهذا يتحقق عندما تكون  $g(x)$  هي الدالة التي تحقق العلاقة التالية:

$$(4.1.3): E[Y - g(x)]^2 = \min$$

أي هي الدالة التي تجعل التوقع السابق أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) — ولعل ملاحظة (3-9) تلقى المزيد من الضوء حول تفهم هذا المبدأ. والتوقع السابق هو توقع لدالة في متغيرين  $X$  و  $Y$  أي أن:

$$I = E[Y - g(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Y - g(x))^2 f(x, y) dx dy$$

فإذا كانت  $f(y|x)$  موجودة و  $f_1(x) > 0$  فإن:

$$I = \int \left[ \int [y - g(x)]^2 f(y|x) dy \right] f_1(x) dx$$

والتكامل داخل القوس الهلالى بالنسبة للمتغير  $y$  هو العزم الشرطى الثانى للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  وهذا يكون أصغر ما يمكن عندما يكون مأخوذاً حول توقع المتغير  $Y$  عندما  $X = x$  أى أن قيمة  $g(x)$  التى تجعل هذا التكامل نهاية صغرى هي التوقع الشرطى  $g(x) = E(Y|x)$  كما يتضح من العلاقة (4.1.3.9).

ملاحظة (4-1-1): عندما نكتب التكامل دون ذكر حدى التكامل يكون معروفاً أن حدى التكامل هما  $\pm \infty$  وذلك لمسهولة الكتابة كما فعلنا فى التكامل السابق وسوف نستمر على هذا فى باقى الكتاب.

مما سبق يتضح أن الدالة  $y_x = g(x) = E(Y|x)$  هي أفضل دالة يمكن استخدامها لتقدير قيم  $Y$  بدلالة قيم  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، ولذا فهي تمثل أفضل منحنى انحدار للمتغير  $Y$  على المتغير  $X$  طبقاً لهذا المبدأ. وبالمثل تكون الكمية  $E[X - h(y)]^2$  أصغر ما يمكن — طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى — عندما تكون  $h(y) = E(X|y)$  أى أن الدالة  $x_y = h(y) = E(X|y)$  تمثل أفضل منحنى انحدار للمتغير  $X$  على المتغير  $Y$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى.

ملاحظة (4-1-2): عندما  $X = x$  تكون الكمية  $Y_{2,1} = Y - g(x)$  هي الباقى من قيمة المتغير  $Y$  بعد طرح القيمة  $g(x)$  وتسمى بـ "الباقى" "Residual"



## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاختران

وحيث أن  $g(x)$  تستخدم لتقدير  $Y$  عندما  $X = x$ ، فإذا كانت الدالة  $Y_x = g(x)$  هي الدالة التي تعطى لنا أفضل تقدير للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  فإن الباقي  $Y_{2,i}$  يكون أصغر ما يمكن، والباقي أو الفرق "أو الخطأ"  $Y_{2,i} = Y - g(x)$  يسمى كذلك "خطأ التقدير" حيث أنه الفرق بين قيمة  $Y$  الفعلية وقيمته المقدرة من العلاقة  $Y_x = g(x)$ . لذلك فبقنا نختار الدالة  $Y_x = g(x)$  التي تجعل توقع مربع الباقي  $Y_{2,i}$  أو توقع مربع الخطأ  $Y_{2,i}$  أصغر ما يمكن. والتوقع المعطى بالعلاقة:

$$\sigma_{2,i}^2 = E[Y - g(X)]^2$$

يسمى بـ "تباين الخطأ" أو "تباين الباقي" Residual Variance أو "تباين خطأ التقدير" والكمية:

$$(4.1.4): \sigma_{2,i} = \sqrt{E[Y - g(X)]^2}$$

تسمى بـ "الخطأ المعياري للتقدير" "Standard Deviation of Error of Estimate".

ملاحظة (4 - 1 - 3): لقد تناولنا منحنيات الاحدار مفترضين أن المتغيران  $X$  و  $Y$  من النوع المستمر وذلك لتبسيط العرض ويمكن تصميم ذلك بإيجاد منحنيات الاحدار سواء كان المتغيران  $X$  و  $Y$  من النوع المنقطع أو المختلط بنوعيه وذلك كما يلي:

(أ) منحنيات الاحدار عندما يكون للمتغيران من النوع المنقطع:

إذا كان  $X$  متغير منقطع يأخذ القيم:  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  و  $Y$  متغير منقطع آخر يأخذ القيم  $y_1, \dots, y_k, \dots$  ودالة الاحتمال المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  هي:  $P_{ik} = \Pr(X = x_i, Y = y_k)$  وعند كل قيمة  $x_i$  للمتغير  $X$  إذا كانت دالة الاحتمال الهامشية لهذا المتغير  $P_{i.} = \Pr(X = x_i)$  دالة موجبة يكون التوزيع الشرطي للمتغير  $Y$  عندما  $X = x_i$  معطى بالعلاقة  $\Pr(Y = y_k | X = x_i) = \frac{P_{ik}}{P_{i.}}$  والتوقع الشرطي

$$E(Y | X = x_i) = \frac{1}{P_{i.}} \sum_k y_k P_{ik}$$

النقط  $[x_i, E(Y | x_i)]$  تمثل انحدار  $Y$  على  $X$  وبالمثل يمكن تمثيل انحدار  $X$  على  $Y$  بمتتابعة النقط  $[E(X | y_k), y_k]$  وبتوصيل النقط المتتابة في كل حالة من الحالتين السابقتين بخطوط مستقيمة تكون المنحنيات الناتجة هي منحنيات الاحدار للتوزيع المنقطع.

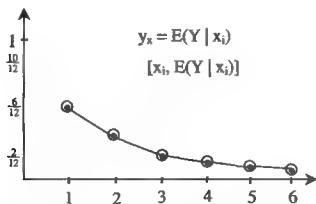
## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتران

(ب) منحنيات الانحدار عندما يكون المتغير  $(X, Y)$  من النوع المختلط:

يمكن تعميم المعالجة السابقة بتقديم الانحدار الخطى فى حالة المتغير المختلط بنوعيه. فلو كان  $X$  متغير منقطع يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots$  و  $Y$  متغير مستمر فإننا طبقاً لما قدمناه فى ملاحظة (3-9 جـ) وعلاقة (3.9.41) نجد أن منحنى الانحدار  $y_x = E(Y | x)$  هو أفضل منحنى يمكن أن يستخدم لتقدير قيم  $Y$  بمعلومية قيم  $X$  والنقطة التى يتكون منها هذا المنحنى هى متتابعة النقاط  $[x_i, E(Y | x_i)]$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots$  هذه المتتابعة من النقاط تمثل لانحدار  $Y$  على  $X$  ويوصل هذه النقاط مع بعضها بخطوط مستقيمة نحصل على منحنى انحدار  $Y$  على  $X$ . وبالمثل نجد أن منحنى الانحدار  $x_y = E(X | y)$  هو أفضل منحنى يمكن أن نستخدمه لتقدير قيم  $X$  بمعلومية قيم  $Y$  والنقطة التى تمثل انحدار  $X$  على  $Y$  هى مجموعة النقاط  $[E(X | y), y]$  لجميع قيم  $-\infty \leq y \leq \infty$ . ولتصور شكل خطى الانحدار فى حالة المتغير المختلط بنوعيه سنكتفى بتقديم حالة خاصة وذلك برسم خطى انحدار  $Y$  على  $X$  و  $X$  على  $Y$  للتوزيع الثنائى المختلط فى مثال (3-9 جـ) حيث نجد أن:

$$E(Y | x) = \frac{1}{2x} ; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

	إن خط انحدار $Y$ على $X$ يتحدد بالنقطة $[x, \frac{1}{2x}]$					
$x :$	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{2x} :$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$

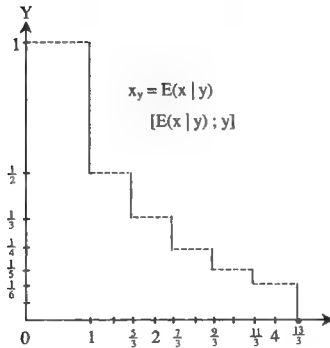


شكل (4-3)  
منحنى انحدار  $Y$  على  $X$

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والانتزاع

وبالمثل:

$$\begin{aligned}
 x_y = E(X|y) &= 13/3 ; 0 \leq y \leq \frac{1}{6} \\
 &= 11/3 ; \frac{1}{6} \leq y \leq \frac{1}{5} \\
 &= 9/3 ; \frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{4} \\
 &= 7/3 ; \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{3} \\
 &= 5/3 ; \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{2} \\
 &= 1 ; \frac{1}{2} \leq y \leq 1
 \end{aligned}$$



شكل (4-1-4)

منحنى الحدار X على Y

في الشكل السابق لو استخدمنا المحور الرأسي للمتغير X والمحور الأفقي للمتغير Y فإن المنحنى يغطي محور Y في الفترة  $0 \leq Y \leq 1$  في شكل دالة درجية (قفزة).

ويمكن تقديم نفس المعالجة السابقة عندما يكون X هو المتغير المستمر و Y هو المتغير المتقطع وذلك بكتابة Y بدلا من X و X بدلا من Y.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

ومما هو جدير بالذكر أن الانحدار الذي قفمناه حتى الآن وعرفناه بأنه انحدار من النوع الأول المقصود به أن منحني الانحدار هو مجرد منحني معرف تعريف عام واسع فقد يكون كثيرة حدود من درجة معينة وقد يكون أى نوع آخر من المنحنيات. وفي الحالة الخاصة الستي يكون فيها انحدار أحد المتغيرين على الآخر خطأ مستقيماً نقول أن هذا انحدار من النوع الثاني واختلاف التسمية بين النوعين يساعد على سهولة الإشارة إلى كل نوع على حده. وعند ذكر كلمة انحدار بدون تخصيص يكون المقصود بذلك هو "الانحدار من النوع الأول" أى الحالة العامة.

### (4 - 2) الانحدار الخطي (المستقيم) أو الانحدار من النوع الثاني:

#### Linear Regression or Regression of The Second Type:

قدمنا في البند (4 - 1) معادلتى الانحدار (2, 1, 4). وأثبتنا أن هاتين المعادلتين تمثلان أفضل منحني انحدار للمتغير  $Y$  على  $X$  و  $X$  على  $Y$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، وطبقاً لهذا المبدأ كان الأسلوب المستخدم فى الحصول على المعادلة  $Y = Y_x = E(Y|X)$  هو البحث عن دالة  $g(x)$  من بين كل الدوال الممكنة التى تعطى لنا أفضل تقدير للمتغير  $Y$  بدلالة  $X$  هذه الدالة هى التى تجعل توقع الكمية المربعة  $[Y - g(X)]^2$  أصغر ما يمكن وفى هذه الحالة تكون الدالة  $g(x)$  أقرب ما يمكن إلى  $Y$  وتكون هى أفضل دالة يمكن أن تستخدم لتمثيل  $Y$  بدلالة  $X$ . ونفس الشيء بالنسبة للحصول على المعادلة  $X = X_y = E(X|y)$  ولكن بدلا من البحث بين كل الدوال الممكنة يمكن أن نقيد أنفسنا بنوع معين من الدوال مثل الدوال الخطية (الخطوط المستقيمة) أو كثيرات الحدود من درجة معينة أو دالة من العائلة الأسية أو غير ذلك من الدوال، وفى هذه الحالة يمكن استخدام مبدأ المربعات الصغرى لإيجاد دالة  $g(x)$  من النوع الذى تقيننا به لتمثل  $Y$  بدلالة  $X$  أفضل تمثيل. ومنحنيات الانحدار التى نحصل عليها بهذه الطريقة تسمى "منحنيات انحدار المربعات الصغرى" mean square regression curves (m. sq. regression curves) فإذا تقيننا بالبحث بين الدوال الخطية المستقيمة Linear functions التى من النوع  $g(x) = \alpha + \beta x$  والتى تجعل توقع الكمية المربعة  $[Y - g(X)]^2$  أصغر ما يمكن فإن الدالة الخطية  $y = g(x)$  التى نحصل عليها بهذه الطريقة تسمى "معادلة الانحدار الخطي للمستقيم" وهى تمثل خط مستقيم وليس منحني كما سبق أن ذكرنا فى البند السابق.

إذا فرضنا أن معادلة الانحدار الخطي للمتغير  $Y$  على المتغير  $X$  هى معادلة خط مستقيم فى الصورة التالية:

$$(4.2.1): y = y_x = g(x) = \alpha + \beta x$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

وإذا كان  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  تباينى  $X$  و  $Y$  على الترتيب وافترضنا أنهما موجبان ( $\sigma_i^2 > 0$ ) ومحدودان ( $\sigma_i^2 < \infty$ )،  $i = 1, 2$ ، فيمكن إيجاد قيمتى  $\alpha$ ،  $\beta$  اللتان تجعلان معادلة (4. 2. 1) تعطى أفضل تقدير للمتغير  $Y$  بدلالة  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، أى قيمتى  $\alpha$ ،  $\beta$  اللتان تجعلان متوسط مربعات انحرافات قيم  $Y$  عن الخط المستقيم (4. 2. 1) أصغر ما يمكن وذلك بمفاضلة الكمية:

$$(4. 2. 2): Q(\alpha, \beta) = E[Y - \alpha - \beta X]^2$$

بالنسبة لـ  $\alpha$  ثم بالنسبة لـ  $\beta$  ومساواة التفاضل فى كل حالة بالصفر:

$$(4. 2. 3): \frac{\partial Q(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0 ; \frac{\partial Q(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

وبعملية حسابية بسيطة نجد أن المعادلتين (4. 2. 3) لهما حل وحيد هو:

$$(4. 2. 4): \begin{cases} (a) \left\{ \beta = \beta_{21} = \frac{v_{12}}{\sigma_1^2} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2} = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right. \\ (b) \left\{ \alpha = m_2 - \beta_{21} m_1 = m_2 - \rho(\sigma_2/\sigma_1) m_1 \right. \end{cases}$$

حيث  $\mu_{11} = v_{12}$  هى  $Cov(X, Y)$  تباير  $X$  و  $Y$ ،  $\rho$  معامل الارتباط بين  $X$  و  $Y$ ،  $m_1$  و  $m_2$  توقع كل من  $X$  و  $Y$  على الترتيب. انظر تمرين (4 - 1) (i).

ومن معادلة (4. 2. 1) يكون "خط انحدار المربعات الصغرى" للمتغير  $Y$  على المتغير  $X$  هو الخط المستقيم الذى معادلته:

$$(4. 2. 5a): y = y_x = \alpha_2 + \beta_{21} x = m_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1).$$

حيث

$$(4. 2. 5b): \alpha_2 = m_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1 ; \beta_{21} = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_1^2}$$

والمعادلة السابقة تسمى معادلة "انحدار  $Y$  على  $X$ " و  $\alpha_2 = m_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1$

تسمى ثابت الانحدار و  $\beta_{21} = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  تسمى معامل انحدار  $Y$  على  $X$  وبما أن  $\sigma_1 > 0$  و  $\sigma_2 > 0$  إذن  $\beta_{21}$  لها نفس إشارة  $\rho$ .

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

وفي المعادلة السابقة عندما  $X = m_1$  نجد أن  $Y = m_2$  أى أن خط الانحدار يمر بالنقطة  $(m_1, m_2)$  وهى مركز ثقل توزيع المتغير  $(X, Y)$  ويمكن كتابة المعادلة السابقة فى الصورة التالية:

$$(4.2.6): \frac{y - m_2}{\sigma_2} = \rho \left( \frac{x - m_1}{\sigma_1} \right).$$

نلاحظ أننا فى إثبات العلاقات السابقة لم نفترض أن المتغيران  $X$  و  $Y$  من النوع المستمر أو المنقطع أو المختلط لذلك فإن خط الانحدار (4.2.5, 6) معرف لأى توزيع من أى نوع بشرط واحد أن يكون تباينى المتغيرين محدودان وموجبان أى  $0 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < \infty$ .

العلاقة (4.2.2) تعطى متوسط (توقع) مربعات انحرافات قيم المتغير  $Y$  عن خط الانحدار  $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$  وبالتالى كلما كان هذا المتوسط قريباً من الصفر كلما كانت قسيم  $Y$  قريبة من القيم المناظرة على الخط  $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$  وعندما يكون هذا المتوسط أصغر ما يمكن يكون هذا الخط هو أفضل خط يمكن توقيفه لتقدير قيم  $Y$  بمعلومية قيم  $X$  والعلاقة (4.2.2) يمكن اعتبارها العزم الثانى للمتغير  $Y$  حول الخط المستقيم  $y = \alpha + \beta x$  والكمية  $Q(\alpha, \beta) = E[Y - \alpha - \beta X]^2$  تسمى تباين الباقي أو تباين خطأ التقدير - كما سبق الإشارة إلى ذلك فى ملاحظة (4-1-2) - وحيث أن  $Q(\alpha, \beta)$  تكون أصغر ما يمكن (نهاية صغرى) عندما يكون الخط المستقيم  $y = \alpha + \beta x$  هو أجود خط يمكن توقيفه لتقدير  $Y$  بدلالة  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى إذن بالتعويض عن قيمتى  $\alpha, \beta$  المعطيتان بالعلاقة (4.2.4) فى الكمية  $Q(\alpha, \beta)$  نحصل على النهاية الصغرى لهذه الكمية - ونعبر عن ذلك كما يلى:

$$(4.2.7): Q_{min} = E_{min}[Y - \alpha - \beta X]^2 = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 \\ = E \left[ Y - \left( m_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1 \right) - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} X \right]^2 = \sigma_2^2 (1 - \rho^2) = \sigma_{21}^2$$

انظر تمرين (4-1) (ب).

وحيث أن  $Y_{21} = Y - \alpha_2 - \beta_{21}X$  هى الباقي من قيمة المتغير  $Y$  بعد طرح قيمة  $Y$  التى يمكن تعبيرها من خط الانحدار  $y_x = \alpha_2 - \beta_{21}x$  وتوقع هذا الباقي يساوى الصفر إذن الكمية:

$$Q_{min} = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 = \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

هى تبين الباقي، أى لن:

$$\sigma_{21}^2 = V(Y_{21}) = \sigma_2^2(1 - \rho^2).$$

وبأسلوب مماثل يمكن إيجاد خط انحدار المربعات الصغرى للمتغير  $X$  على المتغير  $Y$  وذلك بإيجاد قيمتي  $\alpha, \beta$  اللتان تجعلان الكمية:

$$(4.2.8): Q'_{\min}(\alpha, \beta) = E[X - \alpha - \beta Y]^2$$

نهاية صغرى، فيكون أفضل خط يمكن توقيفه لانحدار  $X$  على  $Y$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى هو:

$$(4.2.9): x = x_y = \alpha_1 + \beta_{12}y = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$$

أو فى صورة مرادفة

$$(4.2.10): \frac{y - m_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{x - m_1}{\sigma_1} \right).$$

وهذا الخط يمر بمركز ثقل التوزيع أى بالنقطة  $(m_1, m_2)$ ، ويكون ثابت الانحدار  $\alpha_1$  ومعامل الانحدار  $\beta_{12}$  لخط انحدار  $X$  على  $Y$  هما:

$$(4.2.11): \begin{cases} \alpha_1 = m_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} m_2 \\ \beta_{12} = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \text{Cov}(X, Y) / \sigma_2^2 \end{cases}$$

(بما أن  $\sigma_2 > 0$ ،  $\sigma_1 > 0$ ، إذن  $\beta_{12}$  لها نفس إشارة  $\rho$ ) والنهاية الصغرى للعزم الثاني للمتغير  $X$  حول خط الانحدار  $x = \alpha_1 + \beta_{12}y$  (أو تبين الباقي  $x_{12} = X - \alpha_1 - \beta_{12}Y$  هو:

$$(4.2.12): Q'_{\min} = E_{\min}[X - \alpha - \beta Y]^2 = \sigma_1^2(1 - \rho^2) = \sigma_{12}^2$$

وخطى الانحدار (4.2.5) و (4.2.9) يمران بمركز ثقل التوزيع المشترك  $(X, Y)$  أى بالنقطة  $(m_1, m_2)$  لذا فهما يتقاطعان فى هذه النقطة وهما بصفة عامة غير متطابقان إلا إذا كانت  $\rho = \pm 1$  إذ فى هذه الحالة يكون التوزيع المشترك للمتغير  $(X, Y)$  كله

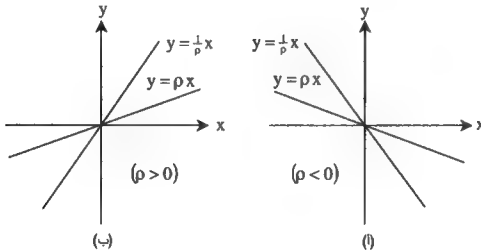
## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

مركزاً (منمجا) على خط مستقيم — كما يتضح من نظرية (3 - 10 ب) — وبالتالي يكون الخطان متطابقان مع هذا الخط المستقيم. أما إذا كانت  $\rho = 0$  (أي  $X$  و  $Y$  غير مرتبطان) فإن خطى الانحدار (4. 2. 5a) و (4. 2. 9) يأخذان الصورة  $x = m_1$  و  $y = m_2$  أى يكونا خطان متعامدان أحدهما موازى لمحور  $X$  والآخر موازى لمحور  $Y$  ومقاطعان عند النقطة  $(m_1, m_2)$  التى تمثل مركز ثقل التوزيع. وإذا نقلنا محاور  $X$  و  $Y$  بحيث تنطبق نقطة الأصل  $(0, 0)$  على مركز الثقل  $(m_1, m_2)$  واستخدمنا  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  كوحدة قياس لقيم  $X$  و  $Y$  على الترتيب فإن معادلتى الانحدار (4. 2. 6) و (4. 2. 10) تأخذان الصورة:

$$(4. 2. 13): y = \rho x$$

$$(4. 2. 14): x = \frac{1}{\rho} y$$

ويمكن تمثيلهما بالشكل التالى:



شكل (4 - 2 - 1)

خطى انحدار المربعات الصغرى  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ،  $m = m_2 = 0$

ملاحظة (4 - 2 - 1): الكمية:  $Q = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X]^2 = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$  المعطاة بالعلاقة (4. 2. 7) تسمى تباين الباقي أو تباين خطأ التقدير. وتبرير هذه التسمية هو أن خط الانحدار  $g(x) = \alpha_2 + \beta_{21}x$  الذى يحقق العلاقة السابقة هو أفضل خط لانحدار  $Y$  على  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى وبالتالي فهو أفضل خط يمكن استخدامه



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

لتقدير قيم  $Y$  بدلالة قيم  $X$  وبالتالي يكون الفرق  $Y_{2,1} = (Y - \alpha_2 - \beta_{2,1}x)$  هو الفرق بين قيمة  $Y$  الفعلية وقيمتها المقدرة من خط الانحدار وكلما كان هذا الفرق صغيراً كلما كانت قيم  $Y$  الفعلية قريبة من قيم  $Y$  المقدرة من خط الانحدار. وعندما  $\rho^2 = 0$  أي  $E[Y - \alpha_2 - \beta_{2,1}X]^2 = \sigma_2^2$  أي أن تباين  $Y$  حول خط الانحدار هو نفسه تباين  $Y$ ، أي أن تباين المتغير  $Y_{2,1} = Y - \alpha_2 - \beta_{2,1}X$  هو نفسه تباين  $Y$  مما يدل على عدم وجود ارتباط بين المتغيرين  $X$ ،  $Y$ . أما إذا كانت  $\rho \neq 0$  فإن تباين الباقي  $Y_{2,1}$  يقل دائماً عن تباين  $Y$  بمقدار  $\sigma_2^2 \rho^2$ ، أي أن طرح دالة خطية في  $X$  من المتغير  $Y$  يؤدي إلى تخفيض تباينه بمقدار  $\sigma_2^2 \rho^2$  وذلك لوجود ارتباط بين المتغيرين  $X$  و  $Y$ . وعندما تصل  $\rho$  إلى قيمتها القصوى  $\rho = \pm 1$  فإن  $E[Y - \alpha_2 - \beta_{2,1}X]^2 = 0$  وفي هذه الحالة يكون المتغيران  $X$  و  $Y$  معتمداً على بعضهما اعتماداً خطياً صحيحاً - كما يتضح من العلاقة (4. 2. 6). عندما  $\rho = \pm 1$  طبقاً لتعريف (3 - 10 ب) - وفي هذه الحالة يكون خطي انحدار  $Y$  على  $X$  و  $X$  على  $Y$  المعطيان بالعلاقين (4. 2. 6) و (4. 2. 10) متطابقان ويمثلان خط مستقيم واحد هو  $\frac{y - m_2}{\sigma_2} = \pm \left( \frac{x - m_1}{\sigma_1} \right)$  ويكون التوزيع الاحتمالي للمتغير المشترك  $(X, Y)$  مركزاً على هذا الخط باحتمال واحد صحيح أي أن:

$$\Pr \left[ \frac{y - m_2}{\sigma_2} = \pm \left( \frac{x - m_1}{\sigma_1} \right) \right] = 1$$

أي أن المتغيران  $X$  و  $Y$  يتغيران معاً (في شكل علاقة خطية صحيحة) في نفس الاتجاه إذا كانت  $\rho = 1$  وفي اتجاهين متضادين إذا كانت  $\rho = -1$ .  
سبق تعريف معامل الارتباط  $\rho$  بالعلاقة (3. 8. 18) بأنه:

$$(4. 2. 15): \rho = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{v_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

ويتضح من هذه العلاقة أن  $\rho$  دالة متماثلة في  $X$  و  $Y$  ويساوى الصفر عندما  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  ونجد من معادلتى (4. 2. 5b) و (4. 2. 11) أن:

$$(4. 2. 16): \rho^2 = \beta_{12} \beta_{21}$$

أي أن مربع معامل الارتباط يساوى حاصل ضرب معامل انحدار  $X$  على  $Y$  في معامل انحدار  $Y$  على  $X$ . وكما يتضح من (4. 2. 15) و (4. 2. 5b) و (4. 2. 11) أن

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاختزان

المعاملات  $\rho$  و  $\beta_{12}$  و  $\beta_{21}$  لها نفس الإشارة حيث أن بسط كل منها  $\text{Cov}(X, Y)$  والمقام كمية موجبة. إذن:

$$(4.2.17): |\rho| = \sqrt{\beta_{12} \beta_{21}}$$

أي أن القيمة الموجبة لمعامل الارتباط  $\rho$  هي الجذر التربيعي لحاصل ضرب معاملي الانحدار  $\beta_{12}$  في  $\beta_{21}$  أما إشارة  $\rho$  فهي نفس إشارة كل منهما. وعندما  $\sigma_1 = \sigma_2$  تكون  $\rho = \beta_{12} = \beta_{21}$ .

ملاحظة (4-2-2): من (4.2.5b) و (4.2.11) يمكن إثبات أن:

$$(4.2.18): \rho^2 = \frac{V[\alpha_2 + \beta_{21}X]}{\sigma_2^2} = V[\alpha_1 + \beta_{12}Y]/\sigma_1^2.$$

ملاحظة (4-2-3): عندما يكون التوقع الشرطي  $E(Y|x)$  أو  $E(X|y)$  في شكل خطي، أي عندما تكون المعادلة  $y = E(Y|x)$  أو  $x = E(X|y)$  معادلة خط مستقيم تكون قيم  $\alpha$  و  $\beta$  التي تحقق العلاقة (4.1.3) هي نفس قيم  $\alpha$  و  $\beta$  التي تحقق العلاقة (4.2.2) وبالتالي يكون الانحدار من النوع الأول هو نفسه الانحدار من النوع الثاني بين المتغيرين  $X$  و  $Y$ .

## (4-3) الانحدار غير المستقيم Non - Linear Regression

يمكن تعميم خطوط انحدار المربعات الصغرى للحصول على منحنيات على شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية فما فوق. فعند تحديد معادلة انحدار  $Y$  على  $X$  مثلاً في صورة كثيرة حدود من الدرجة الثانية بدلاً من الخط المستقيم تكون معادلة الانحدار هي:

$$(4.3.1): y = g_2(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

ثم نحدد قيم  $\alpha, \beta, \gamma$  التي تجعل

$$(4.3.2): Q = E[Y - \alpha - \beta x - \gamma x^2]^2 = \min$$

أي أصغر ما يمكن (نهاية صغرى).

وتكون قيم  $\alpha, \beta, \gamma$  التي تجعل (4.3.2) نهاية صغرى طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى هي حل المعادلات:

$$(4.3.3): \frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0, \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = 0$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاختزال

ومن (4. 3. 3) نجد أن:

$$(4. 3. 4): \begin{cases} E(Y) = \alpha + \beta E(X) + E(X^2) \\ E(XY) = \alpha E(X) + \beta E(X^2) + E(X^3) \\ E(X^2Y) = \alpha E(X^2) + \beta E(X^3) + E(X^4) \end{cases}$$

ويمكن حل المعادلات السابقة بطريقة المحددات أو بأى طريقة أخرى للحصول على قيم  $\alpha, \beta, \gamma$  التي تسمى تقديرات المربعات الصغرى لثوابت منحنى الانحدار من الدرجة الثانية. فإذا كانت هذه القيم هي  $\alpha_2, \beta_{21}, \gamma_{21}$  يكون المنحنى:

$$(4. 3. 5): Y = \alpha_2 + \beta_{21}X + \gamma_{21}X^2$$

هو أفضل منحنى انحدار يمكن توقيفه لانحدار  $Y$  على  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. ويكون تباين الباقي أو تباين خطأ التقدير هو:

$$(4. 3. 6): Q_{\min} = E_{\min} [Y - \alpha - \beta X - \gamma X^2]^2 \\ = E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X - \gamma_{21}X^2]^2$$

وبصفة عامة يمكن تحديد كثيرة حدود:

$$(4. 3. 7): g_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

(حيث  $\alpha_n \neq 0$ ) تجعل:

$$(4. 3. 8): Q = E[Y - g_n(X)]^2 = \min$$

وقسم  $\alpha_s$  التي تحقق العلاقة السابقة هي التي تجعل المنحنى (4. 3. 7) أفضل منحنى يمكن توقيفه لمعادلة انحدار  $Y$  على  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى - ونكون قيم الثوابت  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  التي تحقق العلاقة (4. 3. 8) هي حل المعادلات:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = E\{x^i [g_n(x) - Y]\} = \sum_{j=0}^n \alpha_j E(x^{i+j}) - E(x^i Y) = 0$$

أي أن قيم  $\alpha_s$  التي تجعل المنحنى (4. 3. 7) أفضل منحنى يمكن توقيفه طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى لانحدار  $Y$  على  $X$  هي حل المعادلات الآتية:

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاقتران

$$(4.3.9): \sum_{j=0}^n \mu_{i+j,0} = \mu_{i,1}$$

لجميع قيم  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  حيث  $\mu_{i,1} = E(X^i Y')$  وذلك بشرط وجود هذه العزوم، فنحصل بذلك على  $(n+1)$  معادلة في  $(n+1)$  مجهول هي  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  وبالتالي يكون لدينا حل وحيد لهذه المعادلات فإذا كان المتغير  $X$  متمائل حول توقعه فيمكن تبسيط العمل الحسابي في حل المعادلات (4.3.9) بأخذ المتغير  $X$  مقياساً من مركزه (توقعه) أي بإحلال  $X$  بدلاً من  $X - m_1$  حيث  $m_1$  هو توقع  $X$  وهذا يترتب عليه أن تكون كل العزوم الفردية أصفار مما يسهل حل المعادلات، كما يمكن استخدام كثيرات الحدود المتعامدة لتبسيط العمل الحسابي.

### (4 - 4) نسبة الارتباط :Correlation Ratio

فسي أي مجتمع ثنائي  $(X, Y)$  نتحدد قيمة أي مفردة بمركبتين إحداهما قيمة  $X$  والثانية قيمة  $Y$ . وعادة نرغب في تقدير قيمة إحدى المركبتين عند معرفة الأخرى، وكذلك في معرفة مدى دقة هذا التقدير. فمثلاً عند معرفة أن قيمة  $X$  بالنسبة لمفردة ما هي  $X = x$  فإننا نرغب في الحصول على أفضل دالة في  $x$  يمكن استخدامها لتقدير قيمة  $Y$  وكذلك معرفة مدى دقة هذا التقدير. فإذا كانت  $g(x)$  دالة في  $x$  فإن  $g(x)$  تكون أفضل دالة لتقدير قيمة  $Y$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى عندما تجعل للكمية  $E_{xy}[Y - g(X)]^2$  أصغر ما يمكن (أي نهاية صغرى). والكمية  $[Y - g(X)]$  تسمى "الباقى" The Residual ونرمز لها بالرمز  $Y_{2,1}$  وهي الفرق بين قيمة  $Y$  الفعلية وقيمتها المقدرة من الدالة  $g(x)$ ، أي الباقي من قيمة  $Y$  الفعلية بعد أن نطرح منها قيمة  $Y$  المقدرة بدلالة  $X$  من الدالة  $g(x)$ . فإذا كانت  $g(x)$  دالة حقيقية وحيدة القيمة في  $x$  و  $m_2(x) = E(Y | x)$  هي التوقع الشرطي للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  وهي أيضاً دالة في  $x$ ، فيمكن إثبات أن:  $E_{xy}[Y - g(X)]^2$  تكون نهاية صغرى عندما  $g(x) = m_2(x)$  ونعبر عن ذلك كما يلي:

$$(4.4.1): E_{mn}[Y - g(X)]^2 = E_{xy}[Y - m_2(X)]^2 = V(Y | x) = \sigma_{Y|x}^2$$

و  $\sigma_{Y|x}^2$  هو التباين الشرطي للمتغير  $Y$  عندما  $X = x$  كما تسمى بـ تباين الباقي  $Y_{2,1}$ . ويمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كما يلي:

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

$$E_{xy}[Y - g(X)]^2 = E_{xy}[Y - m_2(X) + m_2(X) - g(X)]^2$$

حيث  $m_2(X) = E(Y | x)$ .

$$= E_{xy}[Y - m_2(X)]^2 + E_{xy}[m_2(X) - g(X)]^2$$

$$+ 2E_{xy}[Y - m_2(X)][m_2(X) - g(X)]$$

والحد الأخير في الطرف الأيمن يساوى الصفر إذن:

$$E_{xy}[Y - g(X)]^2 = E[Y - m_2(X)]^2 + E[m_2(X) - g(X)]^2$$

$$\geq E[Y - m_2(X)]^2$$

أى أن الحد الأدنى للتوقع  $E[Y - g(x)]^2$  نحصل عليه عندما تكون  $g(x) = m_2(x) = E(Y | x)$  وبذلك يكون أفضل اختيار للدالة  $g(x)$  لى تحقق العلاقة (4. 4. 1) هو  $g(x) = m_2(x) = E(Y | x)$ .

والتباين الشرطى  $\sigma_{Y,x}^2$  هو ذلك المقياس الذى نحكم به على مدى دقة استخدام الدالة  $g(x)$  فى تقدير قيمة  $Y$  بدلالة  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، فعندما  $\sigma_{Y,x}^2 = 0$  يمكن تحديد قيمة  $Y$  بدلالة  $X$  من الدالة  $g(x)$  تحديداً تاماً باحتمال يساوى الواحد الصحيح، حيث أن  $\sigma_{Y,x}^2$  هو تباين الباقي  $Y_{2i} = Y - m_2(X)$  ومادام تباين المتغير  $Y_{2i}$  (الباقي) يساوى الصفر إذن المتغير  $Y_{2i}$  يكون متغيراً منمجاً وتوزيعه الكلى مركزاً عند توقعه الذى يساوى للصفر ومن تعريف (3 - 10ب) يكون:

$$\Pr[Y_{2i} = 0] = 1$$

$$\Pr[Y - m_2(X) = 0] = 1$$

$$\Pr[Y = m_2(X)] = 1$$

والدالة  $m_2(x) = E(Y | x)$  التى تعتبر أفضل دالة لتقدير  $Y$  بدلالة  $X$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى تتميز بميزة هامة وهى أن معامل الارتباط بينها وبين  $Y$  أكبر من معامل الارتباط بين  $Y$  وأى دالة أخرى فى  $X$  - أى أن  $\rho[Y, g(x)]$  يكون نهاية عظمى عندما  $g(x) = m_2(x) = E(Y | x)$  حيث يمكن إثبات أن:

$$(4. 4. 2): \rho[Y, m_2(X)] \geq 0$$

$$(4. 4. 3): \rho[Y, m_2(X)] \geq |\rho[Y, g(X)]|$$

#### الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

لاى دالة  $g(X)$  فى المتغير  $X$ .

حيث انه لاى دالة  $g(x)$  يكون:

$$\text{Cov}[Y, g(X)] = E_{xy} \{ [g(X) - E g(X)] [Y - E(Y)] \}$$

ومن (3. 9. 40d)

$$\begin{aligned} &= E_x \{ [g(X) - E g(X)] E_y \{ Y - E(Y) | x \} \} \\ &= E_x \{ [g(X) - E g(X)] [m_2(x) - E m_2(x)] \} \\ &= \text{Cov}[g(X), m_2(X)] \end{aligned}$$

إذن:

$$(4. 4. 4): \text{Cov}[Y, g(X)] = \text{Cov}[g(X), m_2(X)]$$

ومن العلاقة السابقة عندما  $g(x) = m_2(x)$  نجد أن:

$$(4. 4. 5): \text{Cov}[Y, m_2(X)] = \text{Cov}[m_2(X), m_2(X)] = V[m_2(X)] = \sigma_{m_2}^2$$

إذن عندما  $0 < \sigma_y, \sigma_{m_2} < \infty$  يكون:

$$(4. 4. 6): \rho[Y, m_2(X)] = \frac{\text{Cov}[Y, m_2(X)]}{\sigma_y \sigma_{m_2}}$$

ومن (4. 4. 5)

$$\approx \frac{\sigma_{m_2}}{\sigma_y} \geq 0$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (4. 4. 2). وحيث أن:

$$\rho^2(Y, g) = \frac{[\text{Cov}(Y, g)]^2}{\sigma_y^2 \sigma_g^2}$$

إذن من (4. 4. 4)

$$= \frac{[\text{Cov}[g, m_2]]^2}{\sigma_g^2 \sigma_{m_2}^2} \cdot \frac{\sigma_{m_2}^2}{\sigma_y^2}$$

ومن (4. 4. 6)

$$(4. 4. 7a): \rho^2(Y, g) = \rho^2(g, m_2) \rho^2(Y, m_2)$$

إذن:

$$(4. 4. 7b): \rho^2(Y, g) \leq \rho^2(Y, m_2)$$

وحيث أن  $\rho(Y, m_2) \geq 0$  كما فى (4. 4. 6) إذن  $|\rho(Y, g)| \leq \rho(Y, m_2)$  وهذا

يُثبت صحة (4. 4. 3).

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

و  $\rho(Y, g)$  تصل حددا الأعلى عندما  $\rho(g, m_2) = 1$  كما يتضح من (4. 4. 7a) وهذا يتطلب أن تكون  $g(X)$  دالة خطية في  $m_2(X)$  — كما في تعريف (3 - 10 ب) — وهذا يوصلنا مرة أخرى إلى أن  $g = m_2$  هي الدالة التي تجعل  $\rho(Y, g)$  أكبر ما يمكن وبذلك تكون النهاية العظمى لمعامل الارتباط  $\rho(Y, g)$  هي  $\sigma_{m_2}/\sigma_Y$  — كما يتضح من (4. 4. 6) — ومربع هذه النهاية العظمى (عندما  $\sigma_Y > 0$ ) تسمى مربع نسبة ارتباط  $Y$  على  $X$  "Correlation Ratio of  $Y$  on  $X$ " ونرمز لها بالرمز  $\xi_{YX}^2$  ويتضح من التعريف أن  $0 \leq \xi_{YX}^2 \leq 1$  حيث أنها مربع معامل الارتباط بين  $Y$  و  $m_2(X)$  (كما سنثبت ذلك جبريا بالعلاقة (4. 4. 9b) التالية) وعلى هذا يمكن تقديم التعريف التالي:

تعريف (4 - 4) نسبة ارتباط  $Y$  على  $X$  تعرف بأنها  $\xi_{YX}^2$  حيث:

$$(4. 4. 8): \xi_{YX}^2 = \frac{V[m_2(X)]}{V(Y)} = \frac{V[E(Y | x)]}{V(Y)}$$

حيث:  $0 \leq \xi_{YX}^2 \leq 1$  , ,  $0 < V(Y) < \infty$ .

ولمزيد من الإيضاح في تعريف نسبة الارتباط يمكن تجزئ التباين الكلي للمتغير  $Y$  إلى مجموع مركبتين مستقلتين إحداهما تباين  $Y$  حول خط الانحدار  $m_2(x) = E(Y | x)$  والثانية تباين  $m_2(X)$  حول متوسطها الذي هو نفسه متوسط  $Y$  فإذا رمزنا إلى  $E(X) = m_1$  ,  $E(Y) = m_2$  وكان:

$$0 < V(X) = \sigma_1^2 < \infty , 0 < V(Y) = \sigma_2^2 < \infty$$

و

$$E(Y | x) = m_2(X) , V(Y | x) = \sigma_{Y|x}^2 > 0$$

$$E(X | y) = m_1(y) , V(X | y) = \sigma_{X|y}^2 > 0$$

فإن:

$$(4. 4. 9a): \begin{cases} E(Y - m_2)^2 = E[Y - m_2(X)]^2 + E[m_2(X) - m_2]^2 \\ \sigma_Y^2 = \sigma_{Y|x}^2 + \sigma_{m_2}^2 \end{cases}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاقر

وبقسمة طرفي العلاقة السابقة على  $\sigma_Y^2$  نجد أن:  $1 = \xi^2 + \frac{\sigma_{Y.X}^2}{\sigma_Y^2}$

وحيث أن  $\frac{\sigma_{Y.X}^2}{\sigma_Y^2} \geq 0$  إذن:

$$(4.4.9b): 0 \leq \xi^2 \leq 1$$

العلاقة السابقة توضح أن:

التشتت الكلي  $\sigma_Y^2$  للمتغير  $Y$  مقسم إلى مركبتين:

(1) المركبة الأولى  $\sigma_{Y.X}^2$  هي تشتت  $Y$  حول منحنى الانحدار  $m_2(x)$  — أي تشتت قيم  $Y$  الفعلية عن قيم  $Y$  المقدرة من منحنى الانحدار  $m_2(x)$  — وطبعا كلما كان هذا التشتت صغيرا كلما كان منحنى الانحدار أكثر جودة في تقدير قيم  $Y$  بدلالة  $X$ ، لأن  $\sigma_{Y.X}^2$  تمثل متوسط (توقع) مربع الفرق (أو الخطأ) بين قيم  $Y$  الفعلية وقيم  $Y$  المقدرة من معادلة الانحدار (أو خط الانحدار)  $m_2(x)$  لذلك نسمى  $\sigma_{Y.X}^2$  — "تباين خطأ التقدير" و  $\sigma_{Y.X}$  — "الخطأ المعياري للتقدير" "Standard Error of Estimate".

(2) المركبة الثانية ( $\sigma_m^2$ ) من التشتت الكلي ( $\sigma_Y^2$ ) هي تشتت تقديرات قيم  $Y$  عن متوسطها (متوسط  $Y$ ) — أي تباين  $m_2(X)$  — وكلما اقتربت  $\sigma_m^2$  من التشتت الكلي  $\sigma_Y^2$  كلما اقتربت قيم  $Y$  المقدرة من قيم  $Y$  الفعلية مما يدل على زيادة تركيز قيم  $Y$  الفعلية حول منحنى الانحدار  $m_2(x)$  ومما يدل أيضا على أن الارتباط بين المتغيرين  $Y$ ،  $X$  كبيراً. وبالتالي عندما تؤول  $\sigma_{Y.X}^2$  إلى الصفر تؤول  $\sigma_m^2$  إلى  $\sigma_Y^2$  وفي هذه الحالة (الحدية) تكون كل قيم  $Y$  الفعلية منطبقة على منحنى انحدار  $Y$  على  $X$  وهذا يعني أن الارتباط بين  $Y$  و  $X$  يكون تاماً (موجباً أو سالباً) أي أن معامل الارتباط  $\rho = \pm 1$  لذلك فإن النسبة  $\sigma_m^2 / \sigma_Y^2$  تستخدم كمقياس للارتباط بين  $X$  و  $Y$  وتسمى معامل التحديد Determination Coefficient ونرمز له بالرمز  $D_{Y.X}^2$  ويعرف معامل التحديد بأنه:

$$(4.4.10): D_{Y.X}^2 = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_Y^2} = \frac{V[E(Y|x)]}{V(Y)}$$

حيث  $m_2(x) = E(Y|x)$



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

وبمقارنة (4. 4. 8) بالعلاقة السابقة يتضح أن معامل التحديد  $D_{YX}^2$  هو نفسه مربع نسبة الارتباط  $\xi_{YX}^2$  ومن العلاقات (4. 4. 6, 8, 9, 10) نجد أن معامل التحديد (أو مربع نسبة الارتباط)

$$(4. 4. 11): \xi_{YX}^2 = D_{YX}^2 = \rho^2[Y, m_2(X)] = 1 - \frac{\sigma_{YX}^2}{\sigma_Y^2}$$

فإذا كان انحدار  $Y$  على  $X$  خطياً (أي خط مستقيم) يكون معامل التحديد  $D_{YX}^2$  مساوياً معامل الارتباط  $\rho^2(Y, X)$  بين  $Y$  و  $X$  أي أن:

$$(4. 4. 12): \xi_{YX}^2 = D_{YX}^2 = \rho^2(Y, X)$$

وذلك عندما يكون انحدار  $Y$  على  $X$  خط مستقيم. انظر تمرين (4 - 1) (ج-). وعلى ذلك عندما يكون انحدار  $Y$  على  $X$  خط مستقيم يكون  $\xi_{YX}^2 = D_{YX}^2 = \rho_{YX}^2$  ومن (4. 4. 11) يكون معامل الارتباط:

$$(4. 4. 13): \rho_{YX}^2 = 1 - \frac{\sigma_{YX}^2}{\sigma_Y^2}.$$

وتكون إشارة  $\rho$  هي نفس إشارة معامل الانحدار  $\beta$ .

لذلك فإن الجذر التربيعي للعلاقة (4. 4. 11) يستخدم كمقياس للارتباط بين  $Y$  و  $X$  وهنا نفرق بين ثلاث حالات:

**الحالة الأولى:** عندما يكون انحدار  $Y$  على  $X$  خط مستقيم يكون معامل التحديد  $D^2$  هو نفسه مربع معامل الارتباط  $\rho^2$  وبالتالي يكون معامل الارتباط بين  $Y$  و  $X$  هو:

$$(4. 4. 14): \rho = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{YX}^2}{\sigma_Y^2}}$$

وتكون إشارة  $\rho$  هي نفس إشارة معامل الانحدار  $\beta_{21}$ . ويمكن إثبات أن صيغة  $\rho$  في العلاقة السابقة تساوى تماماً صيغة  $\rho$  في العلاقة (4. 2. 15). انظر تمرين (4 - 2).

**الحالة الثانية:** عندما يكون انحدار  $Y$  على  $X$  غير خطي Non - Linear - ولكنه في شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية فما فوق يقاس الارتباط بالعلاقة (4. 4. 11) ولنميز حالة الانحدار عندما تكون معادلة الانحدار كثيرة حدود من الدرجة  $2 \leq n$  عن غيرها

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

من حالات الانحدار الأخرى تسمى الجذر التربيعي لمعامل التحديد في هذه الحالة بـ "دليل الارتباط" "Index of Correlation" ونرمز له برمز خاص هو "d" وبالتالي يكون "دليل الارتباط" هو:

$$(4.4.15): d = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{Y.X}^2}{\sigma_Y^2}}$$

وتؤخذ d بدون إشارة إذ أن خط الانحدار في هذه الحالة يكون منحنى من الدرجة  $2 \leq n$  وبالتالي لا يكون له ميل ثابت. فإذا كان منحنى انحدار Y على X من الدرجة الثانية:

$$Y = m_2(x) = \alpha_2 + \beta_{21} X + \gamma_{21} x^2$$

فإن الارتباط بين X و Y يقاس بدليل الارتباط

$$d = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{Y.X}^2}{\sigma_Y^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{m_2}^2}{\sigma_Y^2}}$$

$$d^2 = \frac{1}{\sigma_Y^2} E[m_2(X) - m_2]^2$$

**الحالة الثالثة:** عندما يكون منحنى انحدار Y على X ليس خطياً وليس كثيرة حدود من الدرجة  $2 \leq n$  وإنما يدل شكل انتشار البيانات على أنه غير خطي. في هذه الحالة يمكن قياس الارتباط بين X و Y باستخدام نسبة الارتباط. وفي هذه الحالة يمكن تعريف نسبة الارتباط كما يلي:

**تعريف (4-4-2):** عندما يكون منحنى انحدار Y على X —  $m_2(x) = E(Y | x)$  — ليس خطاً مستقيماً فإن النسبة المعطاة بالعلاقة (4.4.8) أو (4.4.10) أو (4.4.11) تسمى نسبة ارتباط Y على X ونرمز لها بالرمز  $\xi_{Y.X}$  حيث:

$$(4.4.16): \xi_{Y.X}^2 = \frac{\sigma_{m_2}^2}{\sigma_Y^2} = \frac{E[m_2(X) - m_2]^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_{Y.X}^2}{\sigma_Y^2}$$

حيث  $m_2(x) = E(Y | x)$  ,  $m_2 = E(Y)$

ودائماً في التطبيقات نحتاج إلى المربع  $\xi^2$  وليس الجذر التربيعي  $\xi$  لذلك فإننا عند كتابة  $\xi$  نكتبها بدون إشارة وهذا لا يؤدي إلى نقص في عمومية تعريف نسبة الارتباط حيث أن  $\xi_{Y.X}^2$  تقيس درجة الارتباط بين Y و X عندما تكون معادلة انحدار Y

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

على  $X$  ليست خط مستقيم وإنما منحنى، قد تكون العلاقة بين  $Y$  و  $X$  طردية (موجبة) على جزء منه وعكسية (سالبة) على جزء آخر، لذلك فإن  $\xi^2$  تقيس درجة الارتباط دون تحديد اتجاهه. وبما أن  $\xi^2_{YX} = 1 - \sigma^2_{YX} / \sigma^2_Y$  إذن فهي تنحصر بين الصفر والواحد الصحيح ( $0 \leq \xi^2 \leq 1$ ) كما يتضح من (4. 4. 9b)، كما أن  $\xi^2$  تقترب من الواحد الصحيح عندما يقترب خطأ التقدير  $\sigma^2_{YX}$  من الصفر. ففي هذه الحالة — كما أوضحنا بعد تقديم معادلة (4. 4. 1) — تكون العلاقة بين  $X$  و  $Y$  علاقة دالية حيث أن  $\Pr[Y = m_2(x)] = 1$  وبالتالي يكون الارتباط بين  $X$  و  $Y$  تاماً. كذلك تقترب  $\xi^2$  من الصفر عندما تقترب  $\sigma^2_{YX}$  من  $\sigma^2_Y$  أى عندما لا يؤدي استخدام  $Y$  في تقدير  $X$  إلى تخفيض كمية الخطأ. لذلك فإن  $\xi^2_{YX}$  تعتبر مقياس لدرجة التلازم أو الارتباط بين  $X$  و  $Y$  كما أنها تعتبر مقياس لدقة تقدير  $Y$  بدلالة  $X$  "A measure of accuracy of prediction" وعندما يكون منحنى انحدار  $Y$  على  $X$  كثيرة حدود من الدرجة  $2 \leq n$  تكون نسبة الارتباط هي نفسها دليل الارتباط أى أن  $\xi^2_{YX} = d^2_{YX}$  وعندما يكون الانحدار خطاً مستقيماً تكون  $\xi^2_{YX} = \rho^2_{YX}$ . إذا كان منحنى انحدار  $Y$  على  $X$  غير خطى Non-Linear ومعادلة الانحدار  $y = m_2(x) = E(Y | x)$  وحاولنا توفير خط مستقيم لهذا الانحدار وكان أفضل خط مستقيم طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى هو:  $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$  حيث  $\alpha_2$ ،  $\beta_{21}$  كما في (4. 2. 5b) فيمكن كتابة  $\xi^2_{YX}$  من (4. 4. 16) و (4. 4. 9) في الصورة التالية:

$$(4. 4. 17): \xi^2_{YX} = 1 - \frac{1}{\sigma^2_Y} E[Y - m_2(X)]^2$$

فإذا كان أفضل خط انحدار مستقيم لـ  $Y$  على  $X$  هو المعطى بالعلاقة (4. 2. 5a) فيمكن إثبات أن:

$$(4. 4. 18): E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 = E[Y - m_2(X)]^2 + E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$$

حيث  $m_2(x) = E(Y | x)$  هي منحنى انحدار  $Y$  على  $X$ . فنظر تمرين (4 - 3). من (4. 4. 17) و (4. 4. 18) نجد أن:

$$(4. 4. 19): \xi^2_{YX} = 1 - \frac{1}{\sigma^2_Y} E[Y - \alpha_2 - \beta_{21}X]^2 + \frac{1}{\sigma^2_Y} E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانتزان

حيث  $\beta_{21}$ ،  $\alpha_2$  هي تقديرات المربعات الصغرى لثوابت خط انحدار  $Y$  على  $X$  كما في (4. 2. 5b) إذن بالتعويض عن  $\beta_{21}$ ،  $\alpha_2$  كما في (4. 2. 5b) يمكن كتابة (4. 4. 19) في الصورة التالية:

$$\xi_{Yx}^2 = 1 - \frac{1}{\sigma_y^2} \sigma_y^2 (1 - \rho^2) + \frac{1}{\sigma_y^2} E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$$

أى أن:

$$(4. 4. 20): \xi_{Yx}^2 = \rho^2 + \frac{1}{\sigma_y^2} E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$$

إذن:

$$(4. 4. 21): 0 \leq \rho^2 \leq \xi^2 \leq 1$$

والعلاقة السابقة توضح أنه في حالة الانحدار غير الخطى تكون  $\rho_{Yx}^2 \leq \xi_{Yx}^2$  حيث تزيد  $\xi_{Yx}^2$  عن  $\rho^2$  بكمية غير سالبة هي:  $\frac{1}{\sigma_y^2} E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21}X)]^2$  هذه الكمية تقيس انحرافات منحنى الانحدار  $y = m_2(x)$  عن أفضل خط مستقيم  $y = \alpha_2 + \beta_{21}x$  يمكن توقيفه لهذا الانحدار طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، لهذا عندما يكون الانحدار خطياً، أى عندما  $m_2(x) = \alpha_2 + \beta_{21}x$  تكون  $\xi^2 = \rho^2$  وفي هذه الحالة يمكن الاكتفاء بحساب معامل الارتباط  $\rho$  لقياس الارتباط بين  $X$  و  $Y$  لأن حساب  $\xi$  لن يضيف أى معلومات جديدة.

وأخيراً يمكن إيجاد نسبة ارتباط  $X$  على  $Y$  ( $\xi_{XY}^2$ ) بأسلوب مماثل مع كتابة  $X$  بدلاً من  $Y$  و  $Y$  بدلاً من  $X$  في العلاقات السابقة وكتابة المنحنى  $x = m_1(y)$  بدلاً من  $y = m_2(x)$ .

ملاحظة (4 - 4 - 1): يمكن تلخيص أهم النتائج المتعلقة بالعلاقة بين نسبة الارتباط  $\xi$  ومعامل الارتباط  $\rho$  بين متغيرين  $X$  و  $Y$  كما يلي: (السهولة الكتابة سوف نستخدم الترميز التالي:  $\rho_{Yx} = \rho_{xY} = \rho$ ،  $\xi_{xY}^2 = \xi_{Yx}^2 = \xi^2$ ،  $\xi_{Yx}^2 = \xi_{xY}^2 = \xi^2$ )

(1) الشرط اللازم - ولكنه ليس كافي - لكي يكون المتغيران  $X$  و  $Y$  مستقلان هو:

$$\rho^2 = \xi^2 = \xi^2 = 0$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

فى هذه الحالة يكون:

$$E(Y | x) = E(Y) = m_2$$

$$E(X | y) = E(X) = m_1$$

ويكون خطى الانحدار (4. 1. 1) و (4. 1. 2) متعامدان والأول منهما موازى لمحور  $X$  ويقطع محور  $Y$  عند النقطة  $y = m_2$  والثانى موازى لمحور  $Y$  ويقطع محور  $X$  عند النقطة  $x = m_1$ .

(2) الشرط الكافى واللازم لى يكون المتغيران  $X$  و  $Y$  فى علاقة دالية تمثل خط مستقيم هو:

$$\rho^2 = \xi_1^2 = \xi_2^2 = 1$$

(3) الشرط الكافى واللازم لى يكون المتغيران  $X$  و  $Y$  فى علاقة دالية غير خطية Non Linear - هو:

$$\rho^2 < \xi_1^2 = 1$$

فى حالة انحدار  $X$  على  $Y$  أو

$$\rho^2 < \xi_2^2 = 1$$

فى حالة انحدار  $Y$  على  $X$ .

(4) للعلاقة:  $\rho^2 < \xi_1^2 < 1$  تتضمن المعنى التالى: أن المتغيران  $X$  و  $Y$  قد لا توجد بينهما علاقة دالية معروفة - ولكن توفيق منحنى غير خطى لانحدار  $Y$  على  $X$  يكون الفضل من توفيق خط مستقيم وذلك لأن (4. 2. 18) و (4. 4. 8) فى هذه الحالة تتضمن أن:

$$V[m_2(X)] = V[E(Y | x)] > V[\alpha_2 + \beta_{21} X]$$

أى أن متوسطات  $Y$  أكثر تشتتاً عن تلك المتوسطات المقدرة من الفضل خط مستقيم يمكن توفيقه لانحدار  $Y$  على  $X$ .

(5)  $\rho^2 = \xi_2^2 < 1$  إذا وفقط إذا كان انحدار  $Y$  على  $X$  خطياً مضبوطاً Exactly Linear فى حين أنه لا توجد علاقة دالية معروفة خطية أو غير خطية بين  $X$  و  $Y$ . ومثال ذلك حالة المجتمع المعتمد التالى  $(X, Y)$  يكون انحدار  $Y$  على  $X$  خطياً مضبوطاً. انظر  $E(Y | x)$  لتوزيع المعتمد التالى فى الباب التاسع حيث نجد أنها تمثل علاقة خط مستقيم فى حين أن العلاقة بين  $X$  و  $Y$  قد لا تكون معروفة.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

### (4 - 5) الانحدار الخطي التقريبي Approximate Linear Regression:

عندما نفترض أن معادلة انحدار  $Y$  على  $X$  (أو  $X$  على  $Y$ ) معادلة خط مستقيم مضبوط (Exact) يكون هذا مجرد افتراض نظري لا يتحقق إلا من الناحية النظرية إذ من النادر في الواقع العملي أن يكون الانحدار بين المتغيرين على شكل خط مستقيم تماماً Exactly Linear ولكنه قد يكون قريباً جداً من الخط المستقيم بدرجة تجعلنا نستعمل الخط المستقيم كتقريب لخط الانحدار وذلك عندما نرى من شكل انتشار البيانات أنه يمكننا بدرجة عالية من الجودة توفير خط مستقيم لانحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر بالرغم من عدم وقوع جميع نقاط الانتشار على هذا الخط المستقيم. فافتراض أن خط انحدار  $Y$  على  $X$  مثلاً هو خط مستقيم تماماً معناه أن جميع القيم أو النقاط  $(X, Y)$  في المجتمع تقع تماماً على هذا الخط المستقيم وهذا شيء نادر الحدوث في الواقع العملي وإن كان ممكناً من الناحية النظرية. فمثلاً عندما نفترض أن  $X$  و  $Y$  متغيران لهما توزيع معناد ثنائي يمكن إثبات أن الانحدار بين  $Y$  و  $X$  انحدار خطي (مستقيم) تماماً حيث نجد أن:

$$E(Y | x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (X - \mu_1)$$

و

$$E(X | y) = \mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (Y - \mu_2)$$

حيث  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$  هي توقع وتباين  $X$  و  $Y$  على الترتيب — كما يتضح فيما بعد — انظر  $E(Y | x)$  و  $E(X | y)$  في التوزيع المعناد الثنائي في الباب التاسع.

وكل من المعادلتين السابقتين معادلة خط مستقيم تماماً. إذن في "المجتمعات النظرية" "Theoretical Populations" أو في "التوزيعات النظرية" يمكن أن يتحقق هذا ولكن في "المجتمعات المشاهدة" "Observed Populations" يكون من النادر أن نجد علاقة انحدار بين متغيرين في شكل خطي تام منضبط. والمجتمع المشاهد هو مجتمع (أو مجموعة) من المشاهدات تكون فيه كل مشاهدات المجتمع متاحة لدينا في حين توزيعه النظري (أو الاحتمالي) غير معروف بالضبط. ولتوفير خط مستقيم لانحدار  $Y$  على  $X$  في أي مجتمع مشاهد باستخدام مبدأ المربعات الصغرى يكون أفضل خط مستقيم هو ذلك الخط الذي يجعل مجموع مربعات انحرافات  $Y$  عنه (عن الخط المستقيم) أقل ما يمكن، أي الذي يحقق العلاقة (3. 1. 4). عندما تكون  $g(x)$  تمثل معادلة خط مستقيم. فإذا افترضنا — في حالة مجتمع مشاهد ثنائي معين  $(X, Y)$  — أن أفضل خط يمكن توفيره لانحدار  $Y$  على  $X$  هو:

$$(4. 5. 1): Y = \alpha_2 + \beta_{21} X$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحراف

وكانت مشاهدات المجتمع عددها  $n$  فإننا نختار ثوابت خط الانحدار  $\alpha_2$  و  $\beta_{21}$  التي تجعل مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن خط الانحدار المستقيم الموفق لهذه المشاهدات أقل ما يمكن — أى التي تجعل:

$$(4.5.2): S = \sum_{i=1}^n \{Y_i - (\alpha_2 + \beta_{21} X_i)\}^2 \equiv \text{minimum}$$

وقسمة  $\alpha_2$  و  $\beta_{21}$  التي نحدد على هذا الأساس (بأن تجعل  $S$  نهاية صغرى) نحصل عليها بحل المعادلتين التاليتين:

$$(4.5.3): \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta_{21}} = 0$$

ويحللها لتحديد قيمة المعلمتين  $\alpha_2$  و  $\beta_{21}$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى، والمعادلتان السابقتان هما:

$$(4.5.4): \sum_{i=1}^n \{Y_i - (\alpha_2 + \beta_{21} X_i)\} = 0$$

$$(4.5.5): \sum_{i=1}^n X_i \{Y_i - (\alpha_2 + \beta_{21} X_i)\} = 0$$

ويمكن وضع المعادلتين معاً في الصورة المصفوفية التالية:

$$(4.5.6): \begin{bmatrix} 1 & : & X \end{bmatrix}' \begin{pmatrix} Y_{n \times 1} \\ - \begin{bmatrix} 1 & : & X \end{bmatrix}_{n \times 2} \theta_{2 \times 1} \end{pmatrix} = \underline{0}_{2 \times 1}$$

حيث

$$\begin{bmatrix} 1 & : & X \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1 & \dots & X_n \end{bmatrix}_{2 \times n}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_{21} \end{pmatrix}, \quad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y' = (Y_1 \dots Y_n)$$

إن:

$$(4.5.7): \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_{21} \end{pmatrix} = \theta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & : & X \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1 & : & X \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & : & X \end{bmatrix}' Y$$

$$= \left( \begin{matrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{matrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y \\ \sum XY \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \begin{pmatrix} \sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY \\ n \sum XY - \sum X \sum Y \end{pmatrix}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

إذن:

$$(4.5.8): \beta_{21} = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_1^2}$$

وهي نفس النتيجة (4.2.4) لحالة الانحدار الخطي المضبوط  
Regression بينما:

$$(4.5.9a): \alpha_2 = \frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

والعلاقة السابقة يمكن تبسيطها وكتابتها في الصورة التالية:

$$(4.5.9b): \alpha_2 = m_2 - \beta_{21} m_1$$

حيث  $m_1$  و  $m_2$  هما توقع  $X$  و  $Y$  على الترتيب.

والنتيجة السابقة هي نفس النتيجة (4.2.4) لحالة الانحدار الخطي المضبوط.

وبهذا يمكن كتابة معادلة انحدار  $Y$  على  $X$  كما في (4.5.1) في الصورة التالية:

$$(4.5.10): Y - m_2 = \beta_{21}(X - m_1)$$

وهي نفس المعادلة (4.2.5a). إذن نصل إلى نتيجة هامة وهي أنه عند حساب خط انحدار تقريبي بطريقة المربعات الصغرى نصل إلى نفس النتائج الصحيحة التي نحصل عليها في حالة الانحدار الخطي المضبوط. ويمكن التعبير عن العلاقة (4.5.10) لجميع المشاهدات في الصورة التالية:

$$(4.5.11): \underline{Y}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{X} \end{bmatrix}_{(n \times 2)} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_{21} \end{pmatrix}_{(2 \times 1)}.$$

**ملاحظة (4-5-1):** بما أن العينة العشوائية تعتبر صورة مصغرة للمجتمع الذي سحبت منه لذلك فإن مشاهدات العينة المسحوبة من مجتمع معين تشبه إلى حد كبير مشاهدات هذا المجتمع وعلى هذا فإن الصيغ المستخدمة لإيجاد معالم المجتمع تكون هي نفس الصيغ المستخدمة لحساب إحصاءات العينة المقابلة لهذه المعالم. فالصيغة المستخدمة لإيجاد معلمة معينة من معالم مجتمع مشاهد تستخدم كما هي لتقدير هذه المعلمة من مشاهدات العينة والتعبير الوحيد هو استخدام مشاهدات العينة بدلاً من مشاهدات المجتمع. والقيمة المحسوبة لأي معلمة من معالم مجتمع معين من مشاهدات عينة عشوائية مسحوبة منه تسمى "تقدير" Estimate لهذه المعلمة باستخدام بيانات العينة. ومعالم المجتمعات مثل



## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

العزوم ومعاملات الارتباط والاحتمال والافتراض والتفرطح وغيرها ما هي إلا مقادير ثابتة في حين أن التقديرات التي تحسب لها من عينة عشوائية تمثل متغيرات عشوائية، فمثلاً الوسط الحسابي  $\bar{x}$  المحسوب من العينة (كتقدير لتوقع المجتمع) يتغير من عينة لأخرى طبقاً لتقلبات العينات العشوائية في حين أن توقع المجتمع يعتبر قيمة ثابتة لا تتغير. وعادة نسمى معالم المجتمع "بارامترات" "Parameters" والقيم المناظرة لها في العينة للعشوائية "إحصاءات" "Statistics". وسنعود إلى إلقاء الضوء على هذه المفاهيم فيما بعد عند دراسة توزيعات المعاينة. وأهم ما نود إبرازه في هذه الملاحظة هو أننا نعتبر توزيع المجتمع المشاهد مثل للتوزيع التجريبي للعينة الذي قمناه في البنود (2 - 22 - 1 و 2 و 3) وذلك كما يلي:

### (1) المجتمع المشاهد المفرد:

إذا كانت القيم المشاهدة لمجتمع مفرد هي  $x_1, x_2, \dots, x_n$  فيمكن تعريف "التوزيع الاحتمالي المشاهد" "Observed Probability Distribution" للمجتمع بأنه التوزيع الاحتمالي الذي نحصل عليه بتخصيص احتمال يساوي  $\frac{1}{n}$  لكل قيمة من القيم المشاهدة وهو توزيع متقطع يمكن تمثيله بدالة الاحتمال:

$$(4.5.12): P(x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

فإذا كانت بعض القيم مكررة -  $x_i$  مثلاً مكررة  $C_i$  مرة حيث  $\sum_{i=1}^k C_i = n$

فإن "التوزيع الاحتمالي المشاهد" للمجتمع يمكن تمثيله بدالة الاحتمال:

$$(4.5.13): P(x_i) = \frac{C_i}{n}; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (k \leq n)$$

كما أن "دالة التوزيع الاحتمالي المشاهد" تأخذ الصورة:

$$(4.5.14): F(x) = \frac{C(x)}{n}$$

حيث  $C(x)$  هي عدد مشاهدات المجتمع التي تكون أقل من أو تساوي  $x$ .

والعزم الرائي المركزي للمجتمع يأخذ الصورة:

$$(4.5.15): \mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2; \quad \mu = E(X).$$

كما أن باقي معالم المجتمع يتم حسابها بنفس الأسلوب.

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاقتران

### (2) المجتمع المشاهد الثنائي:

إذا كان لدينا مجتمع مشاهد ثنائي يمثلته المتغير  $(X, Y)$  وقيمه المشاهد هي  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  وعدد مشاهداته  $n$  مشاهدة، فيمكن قياساً على ما قدمناه في حالة التوزيع التجريبي للعينة بسند  $(2 - 22 - 3)$  تعريف "دالة الاحتمال" للمتغير الثنائي  $(X, Y)$  في الصورة التالية:

$$(4.5.16): P(x_i, y_j) = \frac{1}{n}$$

عندما  $i = j = 1, 2, \dots, n$  وتساوى صفر عندما  $i \neq j$  أو في صورة مرادفة

$$(4.5.17): P(x_i, y_i) = \frac{1}{n} ; i = 1, 2, \dots, n$$

فإذا كان عدد القيم  $(x_i, y_i)$  كبيراً فيمكن تبويب المشاهدات في جدول مزدوج بحيث تكون قيم  $(X, Y)$  داخل الجدول المزدوج في الصورة التالية:

$$(x_i, y_j) ; i = 1, 2, \dots, k ; j = 1, 2, \dots, s.$$

فإذا كانت القيمة  $(x_i, y_j)$  مكررة مراراً عددها  $C_{ij}$  فإن "دالة الاحتمال المشتركة" للمتغير الثنائي  $(X, Y)$  تأخذ الصورة:

$$(4.5.18): P(x_i, y_j) = \frac{C_{ij}}{n} ; i = 1, 2, \dots, k ; j = 1, 2, \dots, s$$

ودالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X$ :

$$(4.5.19): P_1(x_i) = \frac{C_i}{n} ; i = 1, 2, \dots, k$$

$$. C_i = \sum_{j=1}^s C_{ij} \text{ حيث:}$$

ودالة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y$ :

$$(4.5.20): P_2(y_j) = \frac{C_j}{n} ; j = 1, 2, \dots, s$$

$$. C_j = \sum_{i=1}^k C_{ij} \text{ حيث}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

وإذا كانت  $C(x, y)$  هو عدد المشاهدات  $(x_i, y_i)$  في المجتمع التي تحقق العلاقة:  $x_i \leq x, y_i \leq Y$  لجميع قيم  $i, j$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمجتمع الثنائي المشاهد تأخذ الصورة:

$$(4.5.21): F(x, Y) = \frac{C(x, y)}{n}$$

ومن هذه الدوال يمكن إيجاد العزوم وبقية المعالم الأخرى للمجتمع المشاهد. ويمكن كذلك تصميم ذلك إلى حالة المجتمع المشاهد  $(X_1, \dots, X_p)$  المكون من  $p$  من المتغيرات العشوائية المشتركة. فمثلاً العزم المركزي المشترك من الدرجة  $r + t$  للمجتمع المشاهد  $(X, Y)$  هو:

$$(4.5.22): \mu_{rt} = E(X - m_1)^r (Y - m_2)^t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - m_1)^r (y_j - m_2)^t$$

حيث:  $m_1 = E(X), m_2 = E(Y)$

ومعامل ارتباط بيرسون لهذا المجتمع هو:

$$(4.5.23): \rho_{xy} = \text{Cov}(X, Y) / \sigma_1 \sigma_2 = \frac{\sum (x_i - m_1)(y_i - m_2)}{\sqrt{\sum (x_i - m_1)^2 \sum (y_i - m_2)^2}}$$

وبالنسبة لصيغة معامل انحدار  $Y$  على  $X$  في حالة افتراض أن انحدار  $Y$  على  $X$  انحداراً خطياً "مضبوطاً" محدد بالعلاقة:

$$Y = \alpha_2 + \beta_{21} X$$

يكون معامل انحدار  $Y$  على  $X$  هو:

$$(4.5.24): \beta_{21} = \text{Cov}(X, Y) / \sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - m_1)(y_i - m_2)}{\sum (x_i - m_1)^2}$$

$$= \frac{n \sum x y - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

وهي نفس الصيغة المستخدمة عند تقدير هذه المعالم من العينات العشوائية.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

**ملاحظة (4 - 5 - 2):** إذا اعتبرنا أن منحنى انحدار  $Y$  على  $X$  في المجتمع المشاهد  $(X, Y)$  غير خطي Non - Linear وممثل بالعلاقة  $Y = m_2(X)$  فتكون الصيغة المستخدمة لإيجاد الخطأ المعياري  $\sigma_{Y-X}$  هي:

$$(4.5.25): \sigma_{Y-X} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum [y - m_2(X)]^2}$$

حيث  $n$  هي عدد مفردات المجتمع.

ومعامل التحديد  $D^2 = \rho^2$  هو:

$$(4.5.26): \rho^2 = 1 - \frac{\sigma_{Y-X}^2}{\sigma_2^2}$$

وتباين  $Y$  هو:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n} \sum (y - m_2)^2$$

ودليل الارتباط  $d$  هو:

$$(4.5.27): d = \sqrt{\rho^2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{Y-X}^2}{\sigma_2^2}}$$

فإذا أمكن تفرغ بيانات المجتمع في جدول تكرارى مزدوج أصنفته تمثل تكرارات  $X$  المناظرة لمراكز فئات  $Y$  وكانت مراكز فئات  $Y$  هي  $Y_1, \dots, Y_k$  ومراكز فئات  $X$  هي  $X_1, \dots, X_i$  وعدد المشاهدات التي تنتمي إلى الفئة التي مركزها  $X_i$  هو  $n_i$  وعدد المشاهدات التي تنتمي إلى الفئة التي مركزها  $Y_j$  هو  $n_j$  وعدد المشاهدات التي تنتمي إلى الفئتين ذات المركزين  $(X_i, Y_j)$  معا هي  $n_{ij}$  وعدد المشاهدات الكلية  $n$  فإن نسبة ارتباط  $X$  على  $Y$  المحسوبة من هذا الجدول تكون معطاة بالعلاقة (4. 4. 8) في الصورة التالية:

$$(4.5.28): E_{ij}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k n_{ij} (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^i n_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{j=1}^k n_{ij} (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^i \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحراف

حيث:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 = V(X) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_{ij}} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_{ij}} n_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_{i.} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_{i.} \bar{x}_i^2 - \bar{x}^2\end{aligned}$$

و

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^I n_{i.} x_i$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n_{.j}} \sum_{i=1}^I n_{ij} x_i = E(X | y_j) = m_1(Y_j)$$

وباسلوب مماثل يمكن الحصول على  $\bar{y}_2^2 = \bar{y}_x^2$ . ويمكن الحصول على إحصاءات العينة المقابلة للمعالم  $\sigma_{yx}$ ،  $\rho^2$ ،  $d$ ، بنسب الصيغ المتقدمة المستخدمة في المجتمع ولكن باستخدام مشاهدات العينة بدلاً من مشاهدات المجتمع.

### (4 - 6) سطوح الانحدار:

#### (4 - 6 - 1) سطوح الانحدار من النوع الأول:

##### Regression Surfaces of The First Type:

درمنا في البنود السابقة من هذا الباب العلاقة بين متغيرين وكيفية تحديد شكل هذه العلاقة بمعادلة انحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر سواء بمعادلة خط مستقيم أو منحني من أي درجة وكذلك تحديد درجة العلاقة بين المتغيرين بحساب معامل الارتباط فسي الحالة السلي تكون فيها العلاقة بين المتغيرين مستقيمة أو بدليل الارتباط أو نسبة الارتباط عندما تكون العلاقة بين المتغيرين غير مستقيمة. وسنتناول الآن حالة أعم وذلك عندما تكون العلاقة بين متغير ما وبين متغيرين آخرين أو أكثر من متغيرين. ومثال ذلك العلاقة بين بعض الظواهر الاقتصادية مثل السعر والعرض والطلب حيث نعلم أن سعر سلعة معينة يرتبط بالكمية المعروضة من هذه السلعة وكذلك بحجم الطلب عليها - وهنا العلاقة بين متغير اقتصادي هو السعر (ونسميه بالمتغير المستقل) وبين متغيرين آخرين هما الكمية المعروضة والكمية المطلوبة (ونسميهما بالمتغيران التابعان)، وقد يوجد متغير تابع ثالث أو أكثر، فقد يتأثر السعر بالمستوى الاقتصادي للأفراد في الدولة وبذلك يمكن اعتبار المستوى الاقتصادي متغير ثالث وقد يكون هناك متغير تابع رابع وخامس ..

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاقتران

وهكذا. فلو رمزنا للمتغير المستقل (السعر) بالرمز  $X_1$  وللمتغيرين التابعين (العرض والطلب) بالرمزين  $X_2$  و  $X_3$  فيمكن تصور العلاقة بين السعر وكل من العرض والطلب متمثلة في المعادلة التالية:

$$X_1 = a + bX_2 + cX_3$$

ويكون هدفنا هو تحديد الثوابت  $a, b, c$ . فلو كان الثابت  $b$  يختلف عن الصفر كان معنى ذلك وجود علاقة بين المتغير المستقل  $X_1$  (السعر) وبين المتغير التابع  $X_2$  (الكمية المعروضة)، كذلك لو كان الثابت  $c$  يختلف عن الصفر كان معنى ذلك وجود علاقة بين المتغير المستقل  $X_1$  (السعر) وبين المتغير التابع الثانى  $X_3$  (حجم الطلب). والمعادلة السابقة تسمى معادلة انحدار  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$  - والثابت  $b$  يسمى معامل انحدار  $X_1$  على  $X_2$  وكذلك  $c$  يسمى معامل انحدار  $X_1$  على  $X_3$ . ولتحديد الثابت  $b$  نتبع أسلوب مشابه تماماً لحالة المتغيرين وذلك بفرض أن المتغير الثالث  $X_3$  مقدارا ثابتاً وبذلك تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالى:

$$X_1 = a' + bX_2$$

حيث  $a'$  تمثل مقدار ثابت هو  $a' = a + cX_3$ . ويمكن كتابة المعادلة السابقة فى صورة عكسية كما يلى:

$$X_2 = a'' + b'X_1$$

وهذه المعادلة هى معادلة انحدار  $X_2$  على  $X_1$  وبذلك يكون  $b'$  هو معامل انحدار  $X_2$  على  $X_1$ ، وقياساً على العلاقة بين معامل الارتباط  $\rho$  ومعاملى انحدار  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_2$  على  $X_1$  يمكن تعميم ذلك وتعريف معامل الارتباط بين  $X_2$  و  $X_1$  مع افتراض ثبات  $X_3$  على أنه يساوى  $\sqrt{bb'}$  ونرمز لذلك بالرمز التالى:

$$\rho_{123} = \sqrt{bb'}$$

حيث  $\rho_{123}$  نرمز به لمعامل الارتباط بين المتغيرين  $X_2$  و  $X_1$  مع افتراض ثبات المتغير الثالث  $X_3$  والدليل (12.3) الملحق بالحرف  $\rho$  مكون من العددين 1، 2 ثم نقطة ثم العدد 3. وهذا تعبير يقصد به معامل الارتباط بين المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  مع افتراض ثبات  $X_3$ . وافتراض ثبات الكمية المطلوبة  $X_3$  عند تغير الكمية المعروضة  $X_2$  هو افتراض نظرى قد لا يكون واقعياً لأن الظواهر الاقتصادية يصعب التحكم فيها بهذا الشكل فتغير الكمية المعروضة قد يؤدي إلى تغير فى السعر أى أن التغير فى السعر

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحدار

يكون راجعاً في جزء منه إلى تغير العرض وفي جزء آخر إلى تغير الطلب وبذلك يكون من الصعب حساب الارتباط بين الطلب والسعر على حدة وبين العرض والسعر على حدة مادم كل من المتغيرات الثلاثة يؤثر ويتأثر بالمتغيرين الآخرين مما يترتب عليه وضع متسلبك يحتاج إلى معالجة تختلف إلى حد ما عن معالجة العلاقة في حالة متغيرين اثنين فقط. لذلك سنقدم في هذا البند تعميم لمنحنيات الانحدار التي سبق تقديمها في حالة متغيرين في الجزء السابق من هذا الباب إلى حالة  $2 < n$  من المتغيرات. وسنقتصر على حالة المتغيرات المستمرة أو المنقطعة فقط دون المتغيرات المختلطة وذلك لسهولة عرض الموضوع من ناحية ولعدم أهمية الانحدار في المتغيرات المختلطة من الناحية التطبيقية بالنسبة لدراستنا الحالية.

ونسبداً الآن بافتراض وجود  $2 < n$  من المتغيرات العشوائية نرمز لها بالرموز  $X_1, \dots, X_n$  هذه المتغيرات لها توزيع مشترك من النوع المستمر بدالة كثافة احتمال  $f(x_1, \dots, x_n)$ . وكما نعلم من علاقة (2. 12. 3) أن التوقع الشرطي للمتغير  $X_1$  عندما  $X_i = x_i$  لجميع قيم  $i = 2, \dots, n$  هو

$$(4. 6. 1a): E(X_1 | x_2, \dots, x_n) = \int x_1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 / \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \\ = m_1(x_2, \dots, x_n)$$

تعريف (4 - 6 - 1) المتغير المستقل التابع:

المحل الهندسي للنقطة  $(m_1, x_2, \dots, x_n)$  في الفراغ  $R_n$  لجميع القيم الممكنة للمتغيرات  $X_2, \dots, X_n$  يسمى بـ "المتغير المستقل التابع" لمتوسط المتغير العشوائي  $X_1$  على المتغيرات العشوائية  $X_2, \dots, X_n$  والذي نعر عنه بالمعادلة:

$$(4. 6. 1b): X_1 = m_1(x_2, \dots, x_n).$$

وبأسلوب مماثل يمكن تعريف أسطح الانحدار من النوع الأول لباقي المتغيرات العشوائية — أي أن عدد أسطح الانحدار التي يمكن تعريفها هي  $n$  سطحاً. وسطح الانحدار من النوع الأول — في حالة  $2 < n$  — يتميز بخاصية مشابهة للخاصية (4. 1. 3) حيث يمكن إثبات أن:

$$(4. 6. 1c): E\{[X_1 - m_1(x_2, \dots, x_n)]^2\} = \text{minimum}$$

حيث  $m_1(x_2, \dots, x_n)$  كما في (4. 6. 1a).

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

أى أن متوسط مربعات انحرافات  $X_1$  عن أى دالة  $u(x_2, \dots, x_n)$  تكون فى نهايتها الصغرى عندما  $u(x_2, \dots, x_n) = m_1(x_2, \dots, x_n)$  وذلك باحتمال واحد صحيح. انظر تمرين (4-4).

(4-6-2) مستويات انحدار المربعات الصغرى أو مستويات الانحدار من النوع الثانى:

**Linear Mean Square Regression or Regression Planes of the Second Type:**

نفرض أن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  لها توزيع احتمالى ما (أى توزيع) وأن العزوم المشتركة من الدرجة الثانية لهذا التوزيع محدودة كما نفترض (دون نقص فى العمومية) أن المتغيرات مقاسة من مركزها — أى أن  $E(X_i^2) = v_{ii}$  و  $E(X_i X_j) = v_{ij}$  حيث  $v_{ij}$  و  $v_{ji}$  هما تبليان  $X_i$  و  $X_j$  وتغاير  $X_i$  و  $X_j$  على الترتيب وهى عزوم محدودة لجميع قيم  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . ويمكن تسميم مفهوم خط الانحدار من النوع الثانى من حالة متغيرين إلى حالة  $n > 2$  من المتغيرات العشوائية المشتركة وذلك لأن أسطح الانحدار من النوع الأول المعرفة بالعلاقين (4.6.1a, 1b) ليست دائما مستوى زائد.

تعريف (4-6-2) المستوى الزائد للانحدار من النوع الثانى:

المستوى الزائد The Hyper Plane المعرفة بالعلاقة:

$$(4.6.2): X_1 = \beta_{1234 \dots n} X_2 + \beta_{13245 \dots n} X_3 + \dots + \beta_{1n23 \dots (n-1)} X_n$$

والذى يحقق الشرط التالى:

$$(4.6.3): E[X_1 - \beta_{1234 \dots n} X_2 - \dots - \beta_{1n23 \dots (n-1)} X_n]^2 = S_{1,23 \dots n}^2 = \text{minimum}$$

أصغر ما يمكن.

يسمى — "المستوى الزائد للانحدار" من النوع الثانى للمتغير  $X_1$  على المتغيرات  $X_2, \dots, X_n$ .

ملاحظة (4-6-2 أ): والتميز المستخدم فى التعريف السابق للتوابت  $\beta$  هو الترميز الذى قدمه "يول" (1907) "Yule" حيث أن كل حرف  $\beta$  له دليلين أساسيين Primary Subscripts بعدهما نضع نقطة ثم يتبع ذلك  $(n-2)$  من الكلمة الثانوية Secondary Subscripts والدليل الأول من الكلمة الأساسية يشير إلى المتغير التابع والثانى يشير إلى المتغير المستقل المناظر لمعامل الانحدار  $\beta$  المرافق. لذلك فإن



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحراف

الترتيب في الأدلة الأساسية مهم للدليل الأساسي يمثل زوج مرتب من الأعداد الصحيحة الموجبة. أما الدليل الثانوي فإنه يشير إلى باقي المتغيرات المستقلة (غير الموجودة في الدليل الأساسي) وهنا الترتيب غير مهم - فمثلاً  $\beta_{12,34,\dots,n}$  هو معامل الانحدار الجزئي للمتغير  $X_1$  على  $X_2$  مع ثبات  $X_3, \dots, X_n$ ، ويمكن كتابة معامل الانحدار الجزئي للمتغير  $X_1$  على  $X_2$  في الصورة  $\beta_{11,23,\dots,(i-1)(i+1)\dots,n}$  حيث  $q(i)$  تشير إلى باقي المتغيرات التي لا توجد في الدليل الأساسي  $(Ii)$ . وعندما لا يوجد خوفاً من سوء الفهم يمكن إهمال الدليل لثانوي. والثابت  $\beta$  ما هي إلا معاملات انحدار حيث  $\beta_{12,34,\dots,n}$  تمثل متوسط الزيادة في  $X_1$  نتيجة لزيادة تعادل للوحدة في  $X_2$  ولما كان التغير في  $X_1$  ما هو إلا نتيجة مباشرة لتغيرات في  $X_2$  و  $X_3, \dots, X_n$  فإن  $\beta_{12,34,\dots,n}$  تعبر عن متوسط التغير في  $X_1$  الناتج عن تغير يعادل الوحدة في  $X_2$  فقط أى مع استبعاد أثر تغيرات باقي المتغيرات  $(X_3, \dots, X_n)$  على  $X_1$ . وهذا ما نسميه بـ "معامل الانحدار الجزئي" Partial Regression Coefficient للمتغير  $X_1$  على  $X_2$  مع استبعاد (أو بفرض ثبات) تأثير باقي المتغيرات أو يسمى بـ "معامل الانحدار الجزئي لـ  $X_1$  على  $X_2$  بالنسبة لـ  $X_3, \dots, X_n$ " ونقول أنه معامل انحدار جزئي من الدرجة  $(n-2)$  حيث  $(n-2)$  هي عدد أرقام الدليل الثانوي أى عدد المتغيرات المثبتة أو المستبعد أثرها - وهذا الترميز الخاص قدمه "يول" (1907) "Yule" لتمييز معاملات الانحدار في حالة  $n > 2$  عن معاملات الانحدار في حالة متغيرين والتي عادة نطلق عليها اسم "معاملات الانحدار الكلية" Total Regression Coefficients.

والعلاقة (4. 6. 2) تمثل أفضل (أو أجد) تقدير خطي للمتغير  $X_1$  بدلالة  $X_2, \dots, X_n$  والجودة هنا بمعنى أن متوسط مجموع مربعات انحرافات قيم  $X_1$  الفعلية عن قيمها المقدرة من العلاقة (4. 6. 2) تكون نهاية صغرى طبقاً للعلاقة (4. 6. 3)، أى أقل من متوسط مجموع مربعات الانحرافات عن أى مستوى خطي آخر. لذلك فالمستوى (4. 6. 2) هو أفضل المستويات بصفة عامة طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى المعبر عنه بالعلاقة (4. 6. 3). وهذا يوضح أن تركيز قيم المتغيرات حول المستوى (4. 6. 2) أقوى من تركيزها حول أى مستوى آخر. لذلك فإننا نعتبر أن  $X_2, \dots, X_n$  متغيرات مستقلة وأن  $X_1$  متغير تابع يمكن تقديره من  $X_2, \dots, X_n$  بالعلاقة الخطية (4. 6. 2).

ولتحديد معاملات الانحدار  $\beta$  - طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى - نفاضل العلاقة (4. 6. 3) بالنسبة لكل من المعاملات المجهولة  $\beta$  التي عددها  $(n-1)$  ونسوى التفاضل في كل مرة بالصفر فنحصل على  $(n-1)$  من المعادلات هي:

#### الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتقار

$$(4.6.4a): E\left\{x_i \left[ x_i - \sum_{j=2}^n \beta_{ij,q(i)} x_j \right] \right\} = 0 \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

وبالمثل يمكن إثبات أنه عندما يكون المتغير التابع هو  $X_k$  وباقي المتغيرات مستقلة فإن:

$$(4.6.4b): E\left\{x_i \left[ x_k - \sum_{j=2}^n \beta_{k,j,q(k)} x_j \right] \right\} = 0 \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

وبالتعويض في (4.6.4a) عن  $i = 2, 3, \dots, n$  نحصل على المعادلات التالية:

$$(4.6.5): v_{22} \beta_{12,q(12)} + v_{23} \beta_{13,q(13)} + \dots + v_{2n} \beta_{1n,q(1n)} = v_{21}$$

$$v_{32} \beta_{12,q(12)} + v_{33} \beta_{13,q(13)} + \dots + v_{3n} \beta_{1n,q(1n)} = v_{31}$$

.....

$$v_{n2} \beta_{12,q(12)} + v_{n3} \beta_{13,q(13)} + \dots + v_{nn} \beta_{1n,q(1n)} = v_{n1}$$

حيث  $\beta_{1k,q(1k)}$  كما هي معرفة في ملاحظة (4 - 6 - 1) والمعادلات السابقة عددها  $(n-1)$  معادلة في  $(n-1)$  من المجاهيل  $\beta^{**}$  لذلك فلها حل وحيد بشرط أن يكون المحدد الأساسي للمعادلات أكبر من الصفر. ومنرى أن حل هذه المعادلات سيكون بدلالة محدد مصفوفة التغاير  $V_n$  المقدمة في العلاقة (3.11.7a) ومرافقات بعض عناصر هذه المصفوفة. لذلك سنرمز لمرافق العنصر  $v_{ij}$  في المصفوفة  $V_n$  بالرمز  $c(V_n^{11})$  أى أن مرافق العنصر  $v_{11}$  هو المحدد التالى:

$$(4.6.6): c(V_n^{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} v_{22} & v_{23} & \dots & v_{2n} \\ v_{32} & v_{33} & \dots & v_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n2} & v_{n3} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلات (4.6.5) السابقة في صورة مصفوفية كما يلي:

$$(4.6.7): c(V_n^{11}) \underline{\beta}_1 = \underline{v}_1$$

حيث  $c(V_n^{11})$  هو مرافق العنصر  $v_{11}$  في محدد المصفوفة  $V_n$  كما في (4.6.6) و

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والاختران

$$(4. 6. 8a): \underline{\beta}'_I = [\beta_{12q}, \dots, \beta_{ln,q}] , 12.q \equiv 12.q(12) , ln.q \equiv ln.q(ln).$$

و

$$(4. 6. 8b): \underline{v}'_{-I} = [v_{21}, \dots, v_{n1}]$$

وبذلك يمكن إيجاد المجاهيل  $\underline{\beta}_I$  بحل المعادلات (4. 6. 7) بطريقة المحددات وذلك بشرط أن يكون  $c(V_n^{II}) > 0$  حيث نجد أن قيم المجاهيل  $\beta$  يمكن الحصول عليها من أى من العلاقات التالية:

$$(a) \quad \begin{cases} -c(V_n^{ik})/c(V_n^{II}) & \text{لو} \\ (4. 6. 9): (b) \beta_{lk,q(ik)} = -v^{ik}/v^{II} & \text{لو} \\ (c) \quad -\sigma_1 c(P_n^{ik})/\sigma_k c(P_n^{II}) ; (k=2,3,\dots,n) \end{cases}$$

حيث:  $c(V_n^{II})$  هو مرافق العنصر  $v_{11}$  أى مرافق العنصر الذى ترتيبه (1,1) فى مصفوفة التغاير  $V_n$  كما سبق تعريفه فى (4. 6. 7) و  $c(P_n^{II})$  هو مرافق العنصر الموجود فى الصف الأول والعمود الأول أى الذى ترتيبه (1,1) من مصفوفة معاملات الارتباط  $P_n$  المعطاة بالعلاقة (3. 11. 22). و  $c(V_n^{ik})$  و  $c(P_n^{ik})$  هما مرافقى العنصر الموجود فى الصف الأول والعمود  $k$  أى مرافق العنصر الذى ترتيبه  $(1, k)$  فى كل من المصفوفتين  $V_n$  و  $P_n$  على الترتيب، أما  $v^{ik}$  هو العنصر الذى ترتيبه  $(i, k)$  فى مقلوب المصفوفة  $V_n$  و  $\sigma_k = \sqrt{v_{kk}}$  و  $\sigma_1 = \sqrt{v_{11}}$ . أنظر تمرين (4-5). وباستخدام الدليل  $i$  بدلا من 1 يمكن إثبات أن:

$$(a) \quad \begin{cases} -c(V_n^{ik})/c(V_n^{II}) & \text{لو} \\ (4. 6. 10): (b) \beta_{ik,q(ik)} = -v^{ik}/v^{II} & \text{لو} \\ (c) \quad -\sigma_i c(P_n^{ik})/\sigma_k c(P_n^{II}) \end{cases}$$

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والاقتربان

حيث  $\beta_{ikq(n)}$  هو معامل الاتحاد الجزئى فى مستوى الاتحاد للمتغير التابع  $X_i$  على المتغير المستقل  $X_k$  ( $k \neq i$ ) عند ثبات باقى المتغيرات المستقلة. ويمكن الاستغناء عن العلاقة السابقة والاكتفاء بالعلاقة (9. 6. 4). وذلك بأن نعتبر أن المتغير التابع  $X_i$  هو دائما المتغير الأول حيث أن ترتيب المتغيرات يعتبر فرضا اختياريا Arbitrary. وفى التوزيعات المشتركة لمتغيرات عددها  $n$  عندما يكون  $|V_n| > 0$  (أى للتوزيع غير شاذ Non - Singular) يكون كذلك  $|V_n^{(1)}| > 0$  وبالتالي يوجد  $n$  من المستويات كل منها محدد تحديداً وحيداً وكل مستوى يمثل اتحاد متغير معين بالنسبة لباقى المتغيرات. وفى الحالة الخاصة عندما تكون المتغيرات غير مرتبطة (أى تكون  $v_{ik} = 0$  لجميع قيم  $i \neq k$ ) ويكون  $c(V_n^{(k)}) = 0$  وبالتالي تكون كل معاملات الاتحاد الجزئية مساوية للصفر طبقاً للعلاقة (10. 6. 4). أما إذا كان التوزيع المشترك للمتغير  $(X_1, \dots, X_n)$  من النوع الشاذ Singular - حيث تكون رتبة  $V_n$  أقل من  $n$  - فى هذه الحالة قد يكون المحدد  $|V_n| = 0$  وفى هذه الحالة تكون بعض معاملات الاتحاد الجزئية غير محددة Undetermined أو غير محدودة Infinite. مثال ذلك عندما  $n = 3$  إذا كانت رتبة  $V_3$  تساوى 2 فإن  $|V_3| = 0$  والاحتمال الكلى لتوزيع المتغير  $(X_1, X_2, X_3)$  يكون منمجاً فى مستوى معين Certain plane فإذا كان هذا المستوى غير مواز لأحد محاور المتغيرات الثلاثة تكون مستويات الاتحاد الثلاثة متطابقة مع هذا المستوى وعلى هذا تكون كل معاملات الاتحاد الجزئية محدودة ومحددة تحديداً تاماً وحيداً. ولكن إذا كان هذا المستوى مواز لأحد محاور المتغيرات الثلاثة - ليكن مواز لمحور  $X_1$  مثلاً - فى هذه الحالة يكون الاحتمال الكلى (كثافة التوزيع) للتوزيع الهامشى للمتغير المشترك  $(X_2, X_3)$  متركزة فى شكل خط مستقيم - وذلك لأن مصفوفة التغاير للتوزيع الهامشى للمتغير  $(X_2, X_3)$  هى  $V_3^{(1)} -$  (أى المصفوفة التى نحصل عليها من  $V_3$  بحذف الصف الأول والعمود الأول) والمحدد  $|V_3^{(1)}| = |V_3| = 0$  مادام  $|V_3| = 0$  طبقاً لنظرية (3 - 10) - وحيث أن مستوى الاتحاد مواز لمحور  $X_1$  لذلك يكون واحد على الأقل من معاملات الاتحاد الجزئية  $\beta_{123}$  أو  $\beta_{132}$  غير محدود Infinite. أما إذا كانت رتبة  $V_3$  تساوى 1 أو 0 فإن الاحتمال الكلى لتوزيع المتغير  $(X_1, X_2, X_3)$  يقع على خط مستقيم أو نقطة معينة وبالتالي فإن كل مستوى من مستويات الاتحاد الثلاثة يجب أن يقع على هذا الخط أو هذه النقطة وخلاف ذلك يكون غير محدود. أما إذا اعتبرنا مجموعة جزئية عددها  $h$  ( $h > n$ ) من المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  لتكن مثلاً  $X_{i_1}, \dots, X_{i_h}$  فإن التوزيع الهامشى للمتغيرات  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_h})$  يكون له مصفوفة تغاير  $V_n^*$  يمكن الحصول عليها

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

من المصفوفة  $V_n$  بعد حذف جميع الصفوف ماعدا الصفوف  $i_1, \dots, i_k$  وحذف جميع الأعمدة ماعدا الأعمدة  $i_1, \dots, i_k$ . ويمكن تكوين مستوى الانحدار الخطي للمتغير  $X_{i_k}$  على المتغيرات  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  وتحديد معاملات الانحدار الجزئية بصيغة مماثلة للصيغة (4. 6. 10) ولكن باستخدام المصفوفة  $V_n^*$  بدلا من المصفوفة  $V_n$ . وعلى سبيل المثال عندما نأخذ في الاعتبار المجموعة الجزئية المكونة من  $(n-1)$  متغير هي  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n$  نجد أن:

$$(4. 6. 11): \beta_{k|q}(ik) = -\frac{c(V_{n-k}^{j|k})}{c(V_{n-k}^{j|j})}$$

حيث  $q(i|k)$  هي الأعداد  $1, 2, \dots, n$  ما عدا  $i, k, j$  والعنصر الموجود في الصف  $i$  والعمود  $k$  من المصفوفة  $V_{n-k}^{j|k}$  التي نحصل عليها من مصفوفة المتغيرات  $V_n$  بعد حذف الصف رقم  $j$  والعمود رقم  $k$ . ومستوى الانحدار في العلاقة (4. 6. 2) الذي نحصل عليه طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى الذي نبر عنه بالعلاقة (4. 6. 3) هو أفضل مستوى يمكن توقيفه لسطح الانحدار  $X_1 = m_1(X_2, \dots, X_n)$  المعطى بالعلاقة (4. 6. 1b) وذلك لجميع التوزيعات التي يكون سطح الانحدار (4. 6. 1a) موجود بالنسبة لها، أي عندما يكون التوقع  $E(X_1 | x_2, \dots, x_n)$  موجود. وذلك لأن:

$$E\left[X_1 - \sum_{j=2}^n \beta_{j|q} X_j\right]^2 = E[X_1 - m_1(x_2, \dots, x_n)]^2 + E\left[m_1(x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=2}^n \beta_{j|q} X_j\right]^2$$

الحد الأول من الطرف الأيمن لا يعتمد على  $\beta$  إذن الحد الثاني من الطرف الأيمن يكون في نهايته الصغرى عند نفس قيم  $\beta$  التي تجعل الحد الموجود في الطرف الأيسر في نهايته الصغرى وهي قيم  $\beta$  المعطاة بالعلاقة (4. 6. 9) أو (4. 6. 10) وبهذا يكون المستوى (4. 6. 2) هو أفضل مستوى يمكن توقيفه للسطح (4. 6. 1b) طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. وعلى ذلك إذا كان من المعروف أن سطح الانحدار يمثل مستوى فإن هذا المستوى يكون هو مستوى الانحدار الذي نحصل عليه طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. وسطح الانحدار من الدرجة الأولى - في حالة  $n < 2$  - يتميز بخاصية مشابهة للخاصية (4. 1. 3) حيث:

$$(4. 6. 11a): E\left\{[X_1 - m_1(x_2, \dots, x_n)]^2\right\} = \min.$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

أى أن متوسط مربعات انحرافات  $X_1$  عن أى دالة  $u(x_2, \dots, x_n)$  تكون نهاية صغرى عندما:

$$u(x_2, \dots, x_n) = m_1(x_2, \dots, x_n).$$

وذلك باحتمال واحد صحيح.

(4 - 6 - 3) البواقي Residuals:

عندما تكون معاملات الانحدار الجزئية  $\beta$  المعطاة بالمعادلة (4. 6. 9) محدودة فيمكن تعريف الفرق:

$$(4. 6. 12): Y_{1,23\dots n} = Y_{1,q(l)} = X_1 - \sum_{j=2}^n \beta_{1j,q(l)} X_j$$

بأنه ذلك الجزء الذى يتبقى من المتغير  $X_1$  بعد أن نطرح منه أفضل تقدير خطى للمتغير  $X_1$  بدلالة  $X_2, \dots, X_n$  طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. والفرق السابق  $Y_{1,2\dots n}$  يسمى بـ "الباقى" "Residual" أو "الخطأ" "Error" أو "انحراف المتغير  $X_1$  عن أفضل تقدير له من باقى المتغيرات طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى" كما يمكن تسميته بانحراف  $X_1$  عن مستوى انحدار  $X_1$  على باقى المتغيرات.

وبالتعويض فى (4. 6. 12) عن  $\beta_{1k,q(lk)}$  من المعادلة (4. 6. 9) نحصل على:

$$(4. 6. 13): Y_{1,23\dots n} = Y_{1,q(l)} = X_1 + \frac{1}{c(V_n^{11})} \sum_{j=2}^n c(V_n^{1j}) X_j$$

$$= \frac{1}{c(V_n^{11})} \sum_{j=1}^n c(V_n^{1j}) X_j$$

وحيث أن  $E(X_1) = 0$  لأن  $X_1$  متغيرات مقيسة من مركزها — إذن:

$$(4. 6. 14): E(Y_{1,23\dots n}) = 0$$

ومن (4. 6. 13) نجد أن:

$$E(Y_{1,23\dots n} X_k) = E(Y_{1,q(l)} X_k) = E \left[ \frac{1}{c(V_n^{11})} \sum_{j=1}^n c(V_n^{1j}) X_j X_k \right]$$

$$= \frac{1}{c(V_n^{11})} \sum_{j=1}^n v_{jk} c(V_n^{1j})$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاختزال

أى أن:

$$\begin{aligned} (4.6.15): E(Y_{1,23..n} X_k) &= |V_n|/c(V_n^{11}) : k=1 && \text{عندما} \\ &= 0 : k=2,3,...,n && \text{عندما} \end{aligned}$$

أى أن الانحراف أو الباقي  $Y_{1,23..n}$  غير مرتبط بأى من المتغيرات العشوائية  $X_2, X_3, \dots, X_n$  كما أن من (4.6.13) و (4.6.14) نجد أن:

$$V(Y_{1,q(i)}) = E(Y_{1,q(i)}^2) = E\left(Y_{1,q(i)} X_1 + \frac{1}{c(V_n^{11})} \sum_{j=2}^n c(V_n^{1j}) Y_{1,q(i)} X_j\right)$$

وبما أن  $E(Y_{1,q(i)} X_j) = 0$  عندما  $j \neq 1$  كما يتضح من (4.6.15) إذن:

$$\begin{aligned} (4.6.16): \sigma_{1,23..n}^2 &= V(Y_{1,23..n}) = E(Y_{1,23..n}^2) = E(Y_{1,23..n} X_1) \\ &= |V_n|/c(V_n^{11}) = 1/v^{11} = \sigma_1^2 |P_n|/c(P_n^{11}) \end{aligned}$$

حيث  $V_n$  هي مصفوفة التغاير للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  المعطاة بالعلاقة (3.11.7) و  $P_n$  هي مصفوفة معاملات الارتباط لنفس المتغيرات المعطاة بالعلاقة (3.11.22) و  $v^{11}$  هو العنصر الموجود في الصف الأول والعمود الأول من مقلوب المصفوفة  $V_n$ .

والتباين السابق  $\sigma_{1,23..n}^2$  يسمى بـ "تباين الباقي" Residual Variance ونقول أن  $\sigma_{1,23..n}^2$  تباين من الدرجة  $(n-1)$  حيث  $(n-1)$  هي عدد أرقام الدليل الثانوى فى  $\sigma_{1,23..n}^2$ . وبأسلوب مماثل يمكن استخدام العلاقة (4.6.10) لإثبات أن الانحراف (أو الباقي)  $Y_{1,q(i)}$  غير مرتبط بأى من المتغيرات العشوائية  $X_k$  لجميع قيم  $k \neq i$  وأن تباين هذا الباقي هو:

$$\begin{aligned} (4.6.17): \sigma_{1,23..(i-1)(i+1)..n}^2 &= \sigma_{1,q(i)}^2 = V(Y_{1,q(i)}) = |V_n|/c(V_n^{ii}) = 1/v^{ii} \\ &= \sigma_i^2 |P_n|/c(P_n^{ii}) \end{aligned}$$

حيث  $v^{ii}$  هي العنصر الموجود في الصف  $i$  والعمود  $i$  من مقلوب المصفوفة  $V_n$  و  $P_n$  هي مصفوفة معاملات الارتباط.

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

وتباين الباقي  $\sigma_{123...n}^2$  يمكن اعتباره مقياس لدرجة جودة التوفيق عند توفيق مستوى (أو معادلة خطية) للمتغير  $X_1$  بدلالة  $X_2, \dots, X_n$  حيث أن  $\sigma_{12...n}^2$  يعبر عن متوسط مربعات انحرافات قيم  $X_1$  الفعلية عن المستوى  $X_1 = \sum_{j=2}^n \beta_{1j,q(1j)} X_j$  وبالتالي فهو يعتبر مقياس لدرجة دقة تقدير  $X_1$  من باقي المتغيرات، فكلما كانت  $\sigma_{12...n}^2$  كبيرة كلما دل ذلك على عدم دقة التقدير لذلك نسمى الجذر الموجب  $\sigma_{12...n}$  بـ "خطأ التقدير" Error of Estimate وعندما  $n = 2$  نجد أن العلاقة (4. 6. 16) تختزل إلى:

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 (1 - \rho^2)$$

من علاقة (4. 6. 4a) يتضح أن:

$$(4. 6. 18): E(X_1 Y_{123...n}) = 0$$

إذا كانت  $i$  هي أحد أرقام الدليل الثانوي لـ  $Y$  أى أحد الأرقام  $2, 3, \dots, n$

ومن العلاقتين (4. 6. 12) و (4. 6. 13) نجد أن:

$$(4. 6. 19a): E(Y_{134...n} Y_{234...n}) = E(Y_{134...n} X_2)$$

وبالمثل:

$$(4. 6. 19b): E(Y_{134...n} Y_{234...n}) = E(Y_{234...n} X_1)$$

كذلك يمكن إثبات أن:

$$(4. 6. 20a): E(Y_{134...n} Y_{234...(n-1)}) = E(Y_{134...n} X_2)$$

وبالمثل:

$$(4. 6. 20b): E(Y_{134...n} Y_{234...n}) = E(Y_{234...n} Y_{134...(n-1)}) = E(Y_{234...n} X_1).$$

ومن العلاقات (4. 6. 18) حتى (4. 6. 20b) نجد بصفة عامة أن:

$$(4. 6. 21): E(Y_{134...n} Y_{234...(n-1)}) = E(Y_{134...(n-1)} Y_{234...n}) ; i = 1, 2, \dots, (n-3)$$

$$= E(X_1 Y_{234...n})$$

$$= E(Y_{134...n} Y_{234...(n-1)}) ; i = 1, 2, \dots, (n-3)$$

$$= E(Y_{134...n} X_2).$$



## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتراض

ملاحظة (4 - 6 - 3): من العلاقات (4. 6. 18) حتى (4. 6. 21) يتضح أن:

(1) أى انحراف (أو باقى)  $Y_{i,q(i)}$  يكون غير مرتبط بأى متغير  $X_j$  إذا كانت  $J$  أحد أرقام  $q(i)$  أى إذا كانت  $J \in q(i)$  كما يتضح من (4. 6. 18).

(2) فى الانحرافين  $Y_{i,q(i)}$  و  $Y_{j,q(j)}$  إذا كانت كل أرقام الدليل الثانوى لأحد الانحرافين تمثل مجموعة جزئية من الدليل الثانوى للانحراف الثانى فإن:

(2 - أ)  $E(Y_{i,q(i)} Y_{j,q(j)})$  لا يتغير إذا أهملنا رقم أو أكثر أو حتى كل عناصر الدليل الثانوى الذى تمثله المجموعة الجزئية الصغيرة، فإذا كانت  $q(i) \subset q(j)$  فإن:

$$E(Y_{i,q(i)} Y_{j,q(j)}) = E(Y_{i,q'(i)} Y_{j,q(j)}) = E(X_i Y_{j,q(j)})$$

حيث  $q'(i) \subset q(i)$  كما يتضح من (4. 6. 21).

(2 - ب)  $E(Y_{i,q(i)} Y_{j,q(j)})$  لا يتغير إذا أضفنا عنصراً أو أكثر أو حتى كل العناصر الزائدة فى الدليل الثانوى الذى تمثله المجموعة الكبيرة إلى عناصر الدليل الثانوى الذى تمثله المجموعة الجزئية الصغيرة فإذا كانت  $q(i) \subset q(j)$  فإن:

$$E(Y_{i,q(i)} Y_{j,q(j)}) = E(Y_{i,q''(i)} Y_{j,q(j)}) = E(Y_{i,q(j)} Y_{j,q(j)})$$

حيث:  $q(i) \subset q''(i) \subset q(j)$  كما يتضح من (4. 6. 21).

(3) كما أن الانحرافين  $Y_{i,q(i)}$  و  $Y_{j,q(j)}$  يكونا غير مرتبطين أى:

$$(4. 6. 22): E(Y_{i,q(i)} Y_{j,q(j)}) = 0$$

إذا كن:

$$\begin{cases} i \in q(j) \text{ و } q(i) \subset q(j) \\ \text{أو} \\ J \in q(i) \text{ و } q(j) \subset q(i) \end{cases}$$

حيث  $q(i)$  و  $q(j)$  مجموعتان من الألفة الثانوية. أى أن الانحرافين يكونا غير مرتبطين إذا كان الدليل الأساسى والدليل الثانوى لأحدهما يقع ضمن الدليل الثانوى للانحراف الآخر.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

### (4 - 7) الارتباط الجزئي Partial Correlation:

ففى حالة التوزيعات الثنائية  $(X_1, X_2)$  نعرف أن العلاقة بين المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  تقاس بمعامل الارتباط  $\rho_{12}$ . ونعرف كذلك فى حالة التوزيعات المتعددة المتغيرات، عندما يكون عدد المتغيرات أكثر من اثنين، أن العلاقة بين أى متغيرين تكون متأثرة بالعلاقة بين كل من هذين المتغيرين وباقى المتغيرات. فالعلاقة بين المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  تكون فى جزء منها راجعة إلى تأثير كل منهما على الآخر وفى جزء آخر تكون هذه العلاقة راجعة إلى تأثير باقى المتغيرات على كل من  $X_1$  و  $X_2$ . وهى تختلف إلى حد ما عن العلاقة فى حالة التوزيعات ذات المتغيرين، لذلك نميز بينهما فى التسمية وكذلك فى الرموز المستخدمة، ففى حالة التوزيعات ذات المتغيرين  $(X_1, X_2)$  يسمى معامل الارتباط بين  $X_1$  و  $X_2$  بـ "معامل الارتباط الكلى" "Total Correlation Coefficient" أو معامل الارتباط من الدرجة صفر (0) ونرمز له بالرمز  $\rho_{12}$ . وفى حالة التوزيعات ذات  $n$  ( $2 < n$ ) متغيراً  $X_1, \dots, X_n$  يسمى معامل الارتباط بين المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  بـ "معامل الارتباط الجزئى" "Partial Correlation Coefficient" بين  $X_1$  و  $X_2$  ونرمز له بالرمز  $\rho_{12.q(i)}$  حيث  $q(i)$  تمثل مجموعة الأعداد من 1 إلى  $n$  مع استبعاد العددين  $i, j$ ، ونقول أنه معامل ارتباط جزئى من الدرجة  $(n-2)$  حيث  $(n-2)$  هى عدد أرقام الدليل الثانوى  $q(i, j)$ . ونعلم كذلك من العلاقة (12. 6. 4) أن الباقي (أو الانحراف)  $Y_{i,34\dots n}$  ( $i = 1, 2$ ) يمثل ذلك الجزء من المتغير  $X_i$  الذى يتبقى بعد أن نطرح منه أفضل تقدير طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى للمتغير  $X_i$  بدلالة المتغيرات  $X_3, X_4, \dots, X_n$ . إذن يمكن اعتبار أن معامل الارتباط (الكلى) بين الانحرافين  $Y_{1,34\dots n}$  و  $Y_{2,34\dots n}$  يمثل مقياس للارتباط بين  $X_1$  و  $X_2$  بعد استبعاد تأثير باقى المتغيرات  $X_3, \dots, X_n$  على كل من  $X_1$  و  $X_2$  وهذا ما نسميه كما ذكرنا بـ "معامل الارتباط الجزئى" للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  بالنسبة لـ  $X_3, X_4, \dots, X_n$  والذى نرمز له بالرمز  $\rho_{12.q(i)}$  أو باختصار  $\rho_{12.q(i)}$  حيث أن الدليل الثانوى  $q(i, j)$  يمثل أدلة كل المتغيرات ماعدا الدليلين 1, 2 أى أن  $q(i, j) = 34\dots n$ . ومن تعريف معامل الارتباط نجد من الطبيعى أن الترتيب فى كل من الدليل الأساسى (1, 2) وكذلك الدليل الثانوى  $q(i, j)$  غير مهم أى أن  $\rho_{12.q(i, j)} = \rho_{21.q(j, i)}$  وذلك على خلاف  $\beta_{12.q(i, j)}$  حيث يكون الترتيب مهم فى الدليل الأساسى ولكنه غير مهم فى الدليل الثانوى. وعلى ذلك نجد من تعريف معامل الارتباط بالعلاقة (18. 3. 8) أن:

#### الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والاختزال

$$\begin{aligned}
 (4.7.1): \rho_{12,q(n)} = \rho_{12,q(12)} &= \frac{E(Y_{1,q(12)} Y_{2,q(12)})}{\sqrt{E(Y_{1,q(12)}^2) \cdot E(Y_{2,q(12)}^2)}} \\
 &= \frac{\text{Cov}(Y_{1,q(12)}, Y_{2,q(12)})}{\sigma_{1,q(12)} \cdot \sigma_{2,q(12)}} \\
 &= E(Y_{1,q(12)} \cdot Y_{2,q(12)}) / \sigma_{1,q(12)} \cdot \sigma_{2,q(12)}
 \end{aligned}$$

وهذا معامل ارتباط عادى بين متغيرين عشوائيين هما  $Y_{1,q(12)}$  و  $Y_{2,q(12)}$ ، إذن فهو يحقق العلاقة:

$$(4.7.2): -1 \leq \rho_{12,q(12)} \leq 1$$

ويمكن كتابة الانحرافين (البواقي)  $Y_{1,q(12)}$  و  $Y_{2,q(12)}$  فى صيغة مشابهة للعلاقة (4.6.13) ثم نستخدم العلاقة (4.6.11) لمعاملات الاتحاد فى مجموعة (جزئية) مكونة من  $(n-1)$  متغير عشوائى لنحصل على العلاقتين التاليتين المشابهتين للعلاقة (4.6.16):

$$(4.7.3): E(Y_{1,34..n}^2) = E(Y_{1,34} \cdot X_1) = \sigma_{1,34..n}^2$$

وتسمى بتباين الباقي  $Y_{1,34..n}$

$$= \frac{c(V_n^{22})}{c(V_n^{22,11})} = \frac{v^{22}}{v^{11} v^{22} - (v^{12})^2}$$

حيث  $c(V_n^{22})$  هو مرافق العنصر  $v^{22}$  فى المصفوفة  $V_n$  و  $c(V_n^{22,11})$  هو مرافق العنصر الموجود فى الصف الأول والعمود الأول من المصفوفة  $V_n^{22}$  التى نحصل عليها من المصفوفة  $V_n$  بعد حذف الصف الثانى والعمود الثانى و  $v^{ik}$  هو العنصر الموجود فى الصف  $i$  والعمود  $k$  من مقلوب المصفوفة  $V_n$  وعلى القارئ إثبات العلاقة (4.7.3) السابقة - أنظر تمرين رقم (4-6).

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\begin{aligned}
 (4.7.4): E(Y_{2,34..n}^2) &= E(Y_{2,34..n} \cdot X_2) = c(V_n^{11}) / c(V_n^{11,22}) \\
 &= v^{11} / [v^{11} v^{22} - (v^{12})^2]
 \end{aligned}$$

## الفصل الرابع - الاحترار والارتباط والاختزال

ومن العلاقة (4. 6. 20b) نجد أن:

$$(4. 7. 5): E(Y_{1,34..n} Y_{2,34..n}) = E(X_1 Y_{2,34..n})$$

حيث يمكن إثبات أنها:

$$= \sum_{j=2}^n c(V_n^{11,2j}) \cdot v_{1j} / c(V_n^{11,22}) = -c(V_n^{12}) / c(V_n^{11,22})$$

حيث  $c(V_n^{12})$  هو مرافق العنصر  $v_{12}$  في المصفوفة  $V_n$  و  $c(V_n^{11,22})$  مرافق العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة  $V_n^{11}$  التي نحصل عليها من المصفوفة  $V_n$  بعد حذف الصف الأول والعمود الأول.

والعلاقة السابقة (4. 7. 5) يمكن إثباتها كما يلي:

من العلاقة (4. 6. 12) نجد أن:

$$E(X_1 Y_{2,34..n}) = v_{12} - \sum_{j=3}^n \beta_{2j} q(12j) v_{1j}$$

ومن العلاقة (4. 6. 11):

$$\begin{aligned} &= v_{12} + \sum_{j=3}^n c(V_n^{11,2j}) v_{1j} / c(V_n^{11,22}) \\ &= \sum_{j=2}^n c(V_n^{11,2j}) v_{1j} / c(V_n^{11,22}) \end{aligned}$$

حيث  $c(V_n^{11,2j})$  هو مرافق العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود رقم  $j$  في المصفوفة  $V_n^{11}$  التي نحصل عليها من  $V_n$  بعد حذف الصف الأول والعمود الأول. ولكن يمكن إثبات أن:

$$\sum_{j=2}^n c(V_n^{11,2j}) v_{1j} = |V_n^{12}| = -c(V_n^{12}).$$

وهذا يوصلنا إلى صحة العلاقة (4. 7. 5). وبالتعويض عن العلاقات (4. 7. 3, 4, 5) في العلاقة (4. 7. 1) نجد أن:

معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  مع استبعاد تأثير  $X_3, X_4, \dots, X_n$  هو:

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتزان

$$(4.7.6a): \rho_{234...n} = \begin{cases} -c(V_n^{12})/\sqrt{c(V_n^{11})c(V_n^{22})} \\ -v^{12}/\sqrt{v^{11}v^{22}} \\ -c(P_n^{12})/\sqrt{c(P_n^{11})c(P_n^{22})} \end{cases} \quad \text{ومن العلاقة (3.11.24):}$$

حيث  $c(P_n^{11})$  هو مرافق العنصر  $\rho_{11}$  فى مصفوفة معاملات الارتباط  $P_n$  —  
انظر تمرين (4-7).

وبالمثل وبأسلوب مماثل يمكن الحصول على معامل الارتباط الجزئى بين أى متغيرين  $X_k$  و  $X_i$  مع استبعاد أثر باقى المتغيرات (التي عددها  $(n-2)$ ) فى الصورة التالية:

$$(4.7.6b): \rho_{ik \cdot q(i,k)} = \begin{cases} -c(V_n^{ik})/\sqrt{c(V_n^{ii})c(V_n^{kk})} & \text{نـو} \\ -v^{ik}/\sqrt{v^{ii}v^{kk}} & \text{نـو} \\ -c(P_n^{ik})/\sqrt{c(P_n^{ii})c(P_n^{kk})} & \text{نـو} \end{cases}$$

حيث  $c(V_n^{ik})$  و  $c(P_n^{ik})$  هما مرافقى العنصر الموجود فى الصف  $i$  والعمود  $k$  من المصفوفتان  $V_n$  و  $P_n$  على الترتيب وباقى الرموز كما سبق تعريفها.

والعلاقة (4.7.6b) تعطى قيمة معامل الارتباط الجزئى بدلالة العزوم المركزية  $v_{ik}$  — حيث لنسأ افترضنا من البدئية أن المتغيرات مقيسة من مركزها — أو بدلالة معاملات الارتباط الكلية  $\rho_{ik}$ . فمثلا فى حالة  $n=3$  نجد من (4.7.6a) أن معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين  $X_2$  و  $X_1$  مع استبعاد أثر  $X_3$  هو:

$$(4.7.7): \rho_{123} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13} \cdot \rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{13}^2)(1 - \rho_{23}^2)}}.$$

وذلك لأن:

$$-C(V_3^{12}) = \begin{vmatrix} v_{21} & v_{23} \\ v_{31} & v_{33} \end{vmatrix} = (v_{21}v_{33} - v_{31}v_{23})$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

ومن (3. 11. 5):

$$\begin{aligned} &= \rho_{21} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3^2 - \rho_{31} \sigma_3 \sigma_1 \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 (\rho_{12} - \rho_{13} \rho_{23}) \end{aligned}$$

وبالمثل

$$\begin{aligned} C(V_{31}^{11}) &= \sigma_2^2 \sigma_3^2 (1 - \rho_{23}^2) \\ C(V_{31}^{22}) &= \sigma_1^2 \sigma_3^2 (1 - \rho_{13}^2) \end{aligned}$$

وبالتعويض في (4. 7. 6b) نحصل على (4. 7. 7). وفي الحالة الخاصة عندما تكون المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  غير مرتبطة نجد من (4. 7. 6a, b) أن كل معاملات الارتباط الجزئية تساوى الصفر مثلها مثل معاملات الارتباط الكلية وذلك لأن  $c(V_{ik}^{ik}) = 0$  لجميع قيم  $i \neq k$ ، حيث أن المصفوفة  $V_{ii}$  مصفوفة قطرية. أما في حالة وجود ارتباط بين المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  فإن  $\rho_{ik} \neq 0$  بصفة عامة يختلف عن معامل الارتباط الكلي  $\rho_{ik}$ . فمثلاً في حالة ثلاث متغيرات يتضح من (4. 7. 7) أن  $\rho_{12}$  و  $\rho_{12,3}$  يمكن أن يكونا مختلفي الإشارة كما يمكن أن يكون أحدهما يساوى الصفر بينما يختلف الثاني عن الصفر وعلى ذلك إذا كانت كل معاملات الارتباط الكلية معروفة فيمكن من العلاقة (4. 7. 6b) حساب معاملات الارتباط الجزئية مباشرة.

**مثال (4 - 7):** المتغير العشوائي المشترك  $(X_1, X_2, X_3)$  له توزيع معناد ثلاثي دالة كثافة احتماله:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)\right]$$

والمطلوب إيجاد:

(أ) مستوى الانحدار من النوع الثاني لـ  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$ .

(ب) تباين الباقي  $Y_{123}$  أى التباين  $\sigma_{123}^2$ .

(ج) معامل الارتباط الجزئي بين  $X_1$  و  $X_2$  مع استبعاد أثر  $X_3$  أى  $\rho_{12,3}$ .

(الحل)

الدالة  $f(x_1, x_2, x_3)$  يمكن وضعها في صيغة مشابهة للعلاقة الخاصة بدالة كثافة

احتمال التوزيع المعناد المتعدد (في الباب التاسع) علاقة (9. 2. 18) على الشكل التالي:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \underline{x}' V_3^{-1} \underline{x}\right].$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

حيث:

$$V_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{11} & v^{12} & v^{13} \\ v^{21} & v^{22} & v^{23} \\ v^{31} & v^{32} & v^{33} \end{bmatrix}$$

و  $V_3^{-1}$  هي مقلوب مصفوفة التباين  $V_3$  للمتغيرات  $X_1, X_2, X_3$  وتوقعات هذه المتغيرات أصفار.

(أ) مستوى الانحدار من النوع الثاني لـ  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$  هو:

$$X_1 = \beta_{12.3} X_2 + \beta_{13.2} X_3$$

حيث يمكن الحصول على  $\beta$ 's من العلاقة (4. 6. 10) كما يلي:

$$\beta_{12.3} = -v^{12}/v^{11} = -\frac{1/2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta_{13.2} = -v^{13}/v^{11} = -\frac{1/2}{2} = -\frac{1}{2}$$

إذن معادلة مستوى انحدار  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$  هي:

$$X_1 = -\frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3$$

(ب) تبين الباقي  $\sigma_{1.23}^2$  يمكن الحصول عليه من علاقة (4. 6. 16):  $\sigma_{1.23}^2 = 1 + v^{11} = 1$  وسنرى من المصفوفة  $V_3$  أن تبين  $X_1$  يساوى  $\frac{3}{2}$  أى أن تبين الباقي من  $X_1$  بعد استبعاد أثر  $X_2$  و  $X_3$  أقل من تبين  $X_1$ . وسنرى ذلك بصورة عامة من خلال علاقة (4. 9. 5) فيما بعد.

(ج) معامل الارتباط الجزئى  $\rho_{12.3}$  يمكن الحصول عليه باستخدام (4. 7. 6a):

$$\rho_{12.3} = -v^{12}/\sqrt{v^{11} v^{22}} = -\frac{1/2}{\sqrt{1 \times 1}} = -\frac{1}{2}$$

وللتأكد من صحة النتائج السابقة يمكن الحصول على نفس المطلوبات باستخدام مصفوفة التباين  $V_3$  بدلاً من  $V_3^{-1}$  وذلك باستخدام الصيغ البديلة فى العلاقات (4. 6. 10) و (4. 6. 16) و (4. 7. 6a) كما يلي:

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتقار

مصفوفة التناظر  $V_3$  هي مقلوب المصفوفة  $V_3^{-1}$  إذن:

$$V_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; |V_3| = 2$$

(أ) من علاقة (4. 6. 10) نجد أن:

$$\beta_{12,3} = -c(V_3^{12})/c(V_3^{11}) = -(-1)^3(-1)/(\frac{8}{4}) = -\frac{1}{2}$$

$$\beta_{13,2} = -c(V_3^{13})/c(V_3^{11}) = -(-1)^4(1)/(\frac{8}{4}) = -\frac{1}{2}$$

(ب) من العلاقة (4. 6. 16) نجد أن:

$$\sigma_{1,2,3}^2 = |V_3|/c(V_3^{11}) = 2/(\frac{8}{4}) = 1$$

(ج) من العلاقة (4. 7. 6a) نجد أن:

$$\rho_{12,3} = -c(V_3^{12})/\sqrt{c(V_3^{11}) \times c(V_3^{22})} = (-1)/\sqrt{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها باستخدام صيغ بديلة مما يعتبر بمثابة مراجعة على صحة النتائج أو مطابقة حسابية للتأكد من صحة النتائج. كذلك يمكن التأكد من صحة قيمة  $\rho_{12,3}$  باستخدام العلاقة (4. 7. 7) كما يلي:

بما أن

$$v_{11} = v_{22} = v_{33} = \frac{3}{2}$$

وكما نعرف

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \\ &= \rho_{ij} \sqrt{v_{ii} v_{jj}}; i \neq j \\ &= \sigma_i^2 = \frac{3}{2}; (\rho_{ii} = 1); i = j \end{aligned}$$

إذن:

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -\frac{1}{3}$$



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاقتزان

إذن من العلاقة (4. 7. 7):

$$\rho_{123} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13} \cdot \rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{13}^2)(1 - \rho_{23}^2)}} = \frac{-\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{\sqrt{(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{9})}} = -\frac{1}{2}$$

وهى نفس النتيجة السابقة التى حصلنا عليها باستخدام صيغة أخرى. كما يمكن التأكد من صحة النتائج السابقة بالحصول على نفس النتائج بطريقة أخرى باستخدام مصفوفة معاملات الارتباط  $P_3$  للمتغيرات الثلاثة  $X_1, X_2, X_3$  حيث نجد أن:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}; |P_3| = \frac{16}{27}$$

إذن:

(أ) من علاقة (4. 6. 10) نجد أن:

$$\beta_{123} = -\sigma_1 c(P_3^{12}) / \sigma_2 c(P_3^{11}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{9}\right) / \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{8}{9}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\beta_{132} = -\sigma_1 c(P_3^{13}) / \sigma_3 c(P_3^{11}) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{9}\right) / \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{8}{9}\right) = -\frac{1}{2}$$

(ب) ومن علاقة (4. 6. 16):

$$\sigma_{1,23}^2 = \sigma_1^2 |P_3| / c(P_3^{11}) = \frac{3}{2} \times \frac{16}{27} \div \frac{8}{9} = 1$$

(جـ) ومن علاقة (4. 7. 6a):

$$\rho_{123} = -c(P_3^{12}) / \sqrt{c(P_3^{11}) \cdot c(P_3^{22})} = -\frac{4}{9} \div \sqrt{\frac{8}{9} \times \frac{8}{9}} = -\frac{1}{2}.$$

ويمكن للقارئ الآن إيجاد مستوى انحدار  $X_2$  على  $X_1$  و  $X_3$  ومستوى انحدار  $X_3$  على  $X_1$  و  $X_2$  وكذلك معاملات الارتباط الجزئية  $\rho_{23.1}$  و  $\rho_{13.2}$ . كما يمكن إيجاد  $E(X_1 | x_2, x_3)$  أى سطح الانحدار من النوع الأول لـ  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$  باستخدام دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, x_2, x_3)$  والعلاقة (3. 12. 2) حيث نجد أن:

$$E(X_1 | x_2, x_3) = -\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3$$

أى هو نفسه مستوى الانحدار من النوع الثانى وهذه الخاصية يتميز بها كل توزيع معتاد متعدد كما سنرى فى الباب التالى.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاقتران

### (4 - 8) العلاقة بين معاملات، الارتباط والانحدار، الجزئية:

يمكن إثبات أن معاملات، الارتباط والانحدار، الجزئية مشابهة تماماً للعلاقة بين معاملات، الارتباط والانحدار، الكلية. إذ نعلم من العلاقة (4. 6. 22) أن أى انحرافين يكونا غير مرتبطين إذا وقع الدليلين الأساسى والثانوى لأحدهما ضمن الدليل الثانوى للآخرين الآخر، إذن:

$$O = E(Y_{2.34..n} Y_{1.234..n})$$

حيث  $Y$  كما فى (4. 6. 12)

$$= E \left( Y_{2.34..n} \left[ X_1 - \beta_{12.34..n} X_2 - \sum_{j=3}^n \beta_{1j.234..n} X_j \right] \right)$$

وطبقاً للعلاقة (4. 6. 18)

$$= E(Y_{2.34..n} X_1) - \beta_{12.34..n} E(Y_{2.34..n} X_2)$$

ومن علاقة (4. 6. 21) يمكن كتابة العلاقة السابقة فى الصورة التالية:

$$O = E(Y_{1.34..n} Y_{2.34..n}) - \beta_{12.34..n} E(Y_{2.34..n}^2)$$

إذن:

$$(4. 8. 1a): \beta_{12.34..n} = \frac{E(Y_{1.34..n} Y_{2.34..n})}{E(Y_{2.34..n}^2)} = \frac{\text{Cov}(Y_{1.34..n}, Y_{2.34..n})}{V(Y_{2.34..n})}$$

$$= \frac{E(Y_{1.34..n} Y_{2.34..n})}{\sigma_{2.34..n}^2}$$

وقيمة  $\beta$  المعطاة بالعلاقة السابقة هى نفس قيمة معامل الانحدار الكلى التى نحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى عندما تكون معادلة الانحدار هى:

$$Y_{1.34..n} = b_{12} Y_{2.34..n}$$

أى أن معامل الانحدار الجزئى  $\beta_{12.34..n}$  لـ  $X_1$  على  $X_2$  مع فرض ثبات باقى المتغيرات هو نفسه معامل الانحدار الكلى  $b_{12}$  للانحراف  $Y_{1.34..n}$  على الانحراف  $Y_{2.34..n}$ . وبالمثل:

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحراف

$$(4.8.1b): \beta_{21.34..n} = \frac{E(Y_{1.34..n} Y_{2.34..n})}{V(Y_{1.34..n})} = \frac{Cov(Y_{1.34..n} Y_{2.34..n})}{V(Y_{1.34..n})}$$

$$= \frac{E(Y_{1.34..n} Y_{2.34..n})}{\sigma_{1.34..n}^2}$$

وكما سبق أن أوضحنا في بند (4-7) أن معامل الارتباط الجزئي  $\rho_{12.34..n}$  هو نفسه معامل الارتباط الكلي بين الانحرافين  $Y_{1.34..n}$  و  $Y_{2.34..n}$  وبما أن  $\sigma_{1.34..n}^2$  هو تباين الانحراف  $Y_{1.34..n}$  و  $\sigma_{2.34..n}^2$  هو تباين الانحراف  $Y_{2.34..n}$  إذن طبقاً للعلاقة (4.2.11) يتضح أن:

$$(4.8.2): \beta_{12.34..n} = \rho_{12.34..n} \frac{\sigma_{1.34..n}}{\sigma_{2.34..n}}.$$

والعلاقة السابقة يمكن الحصول عليها من معادلة (4.7.1) ومعادلة (4.8.1a). كما يتضح من (4.7.1) و (4.8.1a, b) و (4.8.2) أن:

$$(4.8.3): \rho_{12.34..n}^2 = (\beta_{12.34..n} \beta_{21.34..n})$$

حيث  $\rho$  له نفس إشارة  $\beta$ .

### (4-9) التعبير عن الانحرافات المعيارية بدلالة انحرافات معيارية ومعاملات انحدار وارتباط جزئية من درجة أقل :

لحساب معاملات الانحدار والارتباط الجزئية، باستخدام العلاقات السابقة يلزم (أولاً) تحديد معاملات الارتباط الكلية (أو مصفوفة معاملات الارتباط  $P_n$ ) والعزوم المشتركة من الدرجة الثانية (أو مصفوفة التغاير  $V_n$ ) ثم استخدام العلاقات (4.6.10) أو (4.7.6a) لحساب معاملات الانحدار والارتباط الجزئية، أو (ثانياً) إيجاد تباين البواقي والارتباط بينها باستخدام العلاقات (4.7.1) أو (4.8.1) لتحديد المعاملات الجزئية للانحدار والارتباط، ولكن يمكن تبسيط العمل الحسابي بإيجاد المعاملات الجزئية للانحدار والارتباط من الدرجة  $(n-1)$  بدلالة المعاملات الجزئية من الدرجة  $(n-2)$ ، ويتم ذلك بإيجاد الانحرافات المعيارية من الدرجة  $(n-1)$  بدلالة الانحرافات المعيارية من الدرجة  $(n-2)$  ثم الاستمرار في ذلك حتى الوصول إلى الانحرافات المعيارية (والمعاملات) من الدرجة صفر. فمن علاقة (4.6.16) نجد أن تباين الباقي:

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والافتراض

$$\sigma_{1,23...n}^2 = E(Y_{1,23...n} X_1)$$

ومن (4. 6. 21)

$$\begin{aligned} &= E(Y_{1,23...(n-1)} Y_{1,23...n}) \\ &= E\left[Y_{1,23...(n-1)} \left\{X_1 - \sum_{j=2}^{n-1} \beta_{1j,q(1j)} X_j - \beta_{1n,q(1n)} X_n\right\}\right] \end{aligned}$$

ومن (4. 6. 18)

$$= E(Y_{1,23...(n-1)} X_1) - \beta_{1n,q(1n)} E(Y_{1,23...(n-1)} X_n)$$

حيث  $q(1n) = 23 \dots (n-1)$

ومن (4. 6. 16)

$$\sigma_{1,23...n}^2 = \sigma_{1,23...(n-1)}^2 - \beta_{1n,23...(n-1)} E(Y_{1,23...(n-1)} X_n)$$

ومن (4. 6. 21)

$$\sigma_{1,23...n}^2 = \sigma_{1,23...(n-1)}^2 - \beta_{1n,23...(n-1)} E(Y_{1,23...(n-1)} Y_{n,23...(n-1)})$$

ومن (4. 7. 1)

$$= \sigma_{1,23...(n-1)}^2 - \beta_{1n,23...(n-1)} \rho_{1n,23...(n-1)} \sigma_{1,23...(n-1)} \sigma_{n,23...(n-1)}$$

وبوضع  $q(1) = 23 \dots n$  ,  $q(1n) = 23 \dots (n-1)$  إذن:

$$\sigma_{1,q(1)}^2 = \sigma_{1,q(1n)}^2 - \beta_{1n,q(1n)} \rho_{1n,q(1n)} \sigma_{1,q(1n)} \sigma_{n,q(1n)}$$

$$= \sigma_{1,q(1n)}^2 \left[ 1 - \beta_{1n,q(1n)} \rho_{1n,q(1n)} \frac{\sigma_{n,q(1n)}}{\sigma_{1,q(1n)}} \right]$$

ومن (4. 8. 2) نحصل على:

$$(4. 9. 1): \sigma_{1,q(1)}^2 = \sigma_{1,q(1n)}^2 [1 - \beta_{1n,q(1n)} \cdot \beta_{n1,q(1n)}]$$

حيث  $q(1) = 23 \dots n$  ,  $q(1n) = 23 \dots (n-1)$  نحصل على:

$$(4. 9. 2): \sigma_{1,q(1)}^2 = \sigma_{1,q(1n)}^2 [1 - \rho_{1n,q(1n)}^2]$$

;  $q(1n) = 23 \dots (n-1)$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

والرقم المحذوف فى الدليل الثانوى للمعادلتين السابقتين هو  $n$  ويمكن حذف أى رقم آخر غير  $n$  (ليكن  $i$  مثلا) وعلى ذلك يمكن إيجاد  $\sigma_{1,q(i)}^2$  بطرق عددها  $(n-1)$  أى بعدد الأدلة الثانوية وكلها تعطى نفس القيمة  $\sigma_{1,q(i)}^2$  وهذا مفيد للمطابقة الحسابية عند حساب  $\sigma_{1,q(i)}^2$  للتأكد من صحة النتائج.

ويتضح من علاقة (4.9.2) ما يلى:

$$\rho_{1n,23\dots(n-1)}^2 \leq 1 \quad (1)$$

(2) عند تقدير  $X_1$  بدلالة  $X_2, \dots, X_{n-1}$  من معادلة الانحدار (4.6.2) عندما يكون عدد المتغيرات  $(n-1)$ ، ثم تقديرها بدلالة  $X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$  من نفس المعادلة عندما يكون عدد المتغيرات  $n$  فإن إضافة  $X_n$  لا تزيد من دقة accuracy التقدير إلا إذا كانت  $\rho_{1n,23\dots(n-1)}$  (وليست  $\rho_{1n}$ ) تختلف عن الصفر، لأن اختلافها عن الصفر يؤدي إلى إنقاص تباين الباقي (الذى يعبر عن خطأ التقدير) عند إضافة  $X_n$ ، إذ نجد — عند إضافة  $X_n$  — عندما تكون  $\rho_{1n,23\dots(n-1)} \neq 0$  — أن:

$$\sigma_{1,23\dots n}^2 < \sigma_{1,23\dots(n-1)}^2$$

فإذا كانت  $\rho_{1n,23\dots(n-1)}^2 = 0$  فإن:

$$\sigma_{1,23\dots n}^2 = \sigma_{1,23\dots(n-1)}^2$$

وبالتالى فإن خطأ التقدير لا ينقص بإدخال  $X_n$  فى عملية التقدير عند إضافتها. وهذا الشرط قد يوصلنا إلى نتائج غير متوقعة، فمثلا فى علاقة (4.7.7) كما حصلنا على معامل الارتباط الجزئى  $\rho_{12,3}$  يمكن الحصول على معامل الارتباط الجزئى  $\rho_{13,2}$  وسنجد أن:

$$\rho_{13,2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{23}^2)}}$$

فلو كانت  $\rho_{12}\rho_{23} = \rho_{13}$  يكون  $\rho_{13,2} = 0$  وهذا يعنى أن إدخال  $X_3$  فى معادلة مستوى الانحدار لن يزيد من دقة تقدير  $X_1$  بدلالة  $X_2$  و  $X_3$  بالرغم من وجود ارتباط بين  $X_1$  و  $X_3$ . فلو كانت:

$$\rho_{12} = 0.8, \rho_{13} = 0.4, \rho_{23} = 0.5$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

فإن  $\rho_{13.2} = 0$  وبالتالي فإن تقدير  $X_1$  بدلالة  $X_2$  و  $X_3$  لن يكون أكثر دقة من تقديرها بدلالة  $X_2$  وحدها وذلك بالرغم من وجود ارتباط بين  $X_1$  و  $X_3$  (يساوى 0.4).

وبالمثل من (4.9.1) و (4.9.2) نجد أن:

$$\begin{aligned}\sigma_{1\ 23\ldots(n-1)}^2 &= \sigma_{1\ 23\ldots(n-2)}^2 [1 - \rho_{1(n-1)\ 23\ldots(n-2)}^2] \\ &= \sigma_{1\ 23\ldots(n-2)}^2 [1 - \beta_{1(n-1)\ 23\ldots(n-2)} \beta_{(n-1)\ 23\ldots(n-2)}]\end{aligned}$$

وبتكرار التعويض عن ذلك في المعادلة (4.9.1) نصل إلى:

$$\begin{aligned}(4.9.3): \sigma_{1\ 23\ldots n}^2 &= \sigma_1^2 (1 - \beta_{12} \beta_{21}) (1 - \beta_{13.2} \beta_{31.2}) (1 - \beta_{14.23} \beta_{41.23}) \ldots \\ &\quad \ldots (1 - \beta_{1n\ 23\ldots(n-1)} \beta_{n\ 1\ 23\ldots(n-1)})\end{aligned}$$

$$(4.9.4): \sigma_{1\ 23\ldots n}^2 = \sigma_1^2 (1 - \rho_{12}^2) (1 - \rho_{13.2}^2) (1 - \rho_{14.23}^2) \ldots (1 - \rho_{1n\ 23\ldots(n-1)}^2).$$

ومن العلاقة السابقة نجد أن:

$$(4.9.5): \sigma_{1\ 23\ldots n}^2 \leq \sigma_1^2$$

نلاحظ أننا للوصول إلى العلاقات (4.9.3) و (4.9.4) من (4.9.1) و (4.9.2) بدلنا بحذف عناصر النزيل الثانوى  $(23\ldots n)$  على خطوات بدأ بـ  $n$  ثم  $(n-1)$  وهكذا حتى 2، ويمكن الحذف بترتيب آخر بأن نبدأ بـ 2 ثم 3، ...، ثم  $n$ ، أو أى ترتيب نراه غير ذلك، وهذا يعطى صيغا لابد أن تتطابق كلها، أى أن كلها تعطى نفس القيمة للتباين  $\sigma_{1\ 23\ldots n}^2$  وهذا يفيد فى عملية المراقبة الحسابية checking على النتائج.

إن عندما تكون معاملات الارتباط الكلية والجزئية معروفة يمكن إيجاد تباين الباقي (أو الانحراف)  $Y_{i.q(i)}$  باستخدام العلاقة (4.9.4) ثم من العلاقة (4.8.2) يمكن إيجاد أى معامل لتحدار جزئى نريده.

والعلاقات السابقة تتأطر للعلاقات التالية فى حالة متغيرين:

$$\sigma_{1.2}^2 = \sigma_1^2 (1 - \beta_{12} \beta_{21}) = \sigma_1^2 (1 - \rho_{12}^2).$$

#### الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

(4 - 10) التعبير عن معاملات، الاحدار والارتباط، الجزئية، بمعاملات من درجة أقل:

من (4. 8. 1a) نجد أن:

$$\beta_{12 \ 34 \ n} \sigma_{2 \ 34 \dots n}^2 = E[Y_{1 \ 34 \ n} Y_{2 \ 34 \dots n}]$$

ومن (4. 6. 21)

$$= E[Y_{1 \ 34 \dots (n-1)} Y_{2 \ 34 \dots n}]$$

$$= E[Y_{1 \ 34 \dots (n-1)} \{X_2 - \beta_{2n \ 34 \dots (n-1)} X_n - D\}]$$

حيث  $D$  تمثل حدود في  $X_3$  و  $X_4$  و .. إلى  $X_{n-1}$ . ولكن من (4. 6. 18)

$$\beta_{12 \ 34 \dots n} \sigma_{2 \ 34 \dots n}^2 = E(Y_{1 \ 34 \dots (n-1)} X_2) - \beta_{2n \ 34 \dots (n-1)} E(Y_{1 \ 34 \dots (n-1)} X_n).$$

ومن (4. 6. 21)

$$= E(Y_{1 \ 34 \dots (n-1)} Y_{2 \ 34 \dots (n-1)})$$

$$- \beta_{2n \ 34 \dots (n-1)} E(Y_{1 \ 34 \dots (n-1)} Y_{n \ 34 \dots (n-1)})$$

ومن (4. 8. 1)

$$= \beta_{12 \ 34 \dots (n-1)} \sigma_{2 \ 34 \dots (n-1)}^2 - \beta_{2n \ 34 \dots (n-1)} \beta_{1n \ 34 \dots (n-1)} \sigma_{n \ 34 \dots (n-1)}^2$$

ولكن من معادلتى (4. 8. 2) و (4. 8. 3) نجد أن:

$$(4. 10. 1): \beta_{2n \ 34 \dots (n-1)} = \beta_{n \ 2 \ 34 \dots (n-1)} \frac{\sigma_{2 \ 34 \dots (n-1)}^2}{\sigma_{n \ 34 \dots (n-1)}^2}.$$

وبالتعويض عن (4. 10. 1) في المعادلة السابقة لها نجد أن:

$$\beta_{12 \ 34 \dots n} \sigma_{2 \ 34 \dots n}^2 = \beta_{12 \ 34 \dots (n-1)} \sigma_{2 \ 34 \dots (n-1)}^2$$

$$- \beta_{1n \ 34 \dots (n-1)} \beta_{n \ 2 \ 34 \dots (n-1)} \sigma_{2 \ 34 \dots (n-1)}^2$$

إذن:

$$\beta_{12 \ 34 \dots (n-1)} = \frac{\sigma_{2 \ 34 \dots (n-1)}^2}{\sigma_{2 \ 34 \dots n}^2} [\beta_{12 \ 34 \dots (n-1)} - \beta_{1n \ 34 \dots (n-1)} \beta_{n \ 2 \ 34 \dots (n-1)}]$$

#### الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

وبالتعويض عن  $\sigma_{2,34 \dots n}^2$  في المعادلة السابقة كما في معادلة (4. 8. 4) —  
 باستخدام 2 بدلاً من 1 في الدليل الأساسي وإهمال الرقم 2 في الدليل الثانوي) — نجد أن:

$$(4. 10. 2): \beta_{12,34 \dots n} = \frac{\beta_{12,q(i2n)} - \beta_{1n,q(i2n)} \beta_{2n,q(i2n)}}{1 - \beta_{2n,q(i2n)} \beta_{n2,q(i2n)}}.$$

حيث:  $q(i2n) = 34 \dots (n-1)$  وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(4. 10. 3): \beta_{ij,q(ij)} = \frac{\beta_{ij,q(ijn)} - \beta_{in,q(ijn)} \beta_{jn,q(ijn)}}{1 - \beta_{jn,q(ijn)} \beta_{nj,q(ijn)}} ; (i \neq j \neq n)$$

حيث  $q(ijn)$  هي الأعداد من 1 إلى  $n$  ماعدا  $i, j, n$  وكذلك  $q(ij)$  هي الأعداد من 1 إلى  $n$  ماعدا المحددين  $i, j$ .

ملاحظة (4 - 10 - 1): في المعاملتين السابقتين كان العدد المحذوف هو  $n$  من الدليل الثانوي لمعاملات الطرف الأيمن وكان من الممكن حذف أي عدد آخر بدلاً من  $n$  وهذا يقدم لنا صيغ بديلة لحساب المعاملات  $\beta^{ij}$  عددها  $(n-2)$  صيغة كلها متكافئة وتطلي نفس النتيجة مما يمكن الاستفادة منه في عملية المراقبة الحسابية على صحة النتائج. ومما هو جدير بالذكر أن العدد المحذوف لا يكون أحد عددي الدليل الأساسي للمعامل  $\beta$  فإذا أردنا الحصول مثلاً على  $\beta_{in,q(in)}$  لابد أن يكون العدد المحذوف أي عدد آخر خلافاً  $i, j$  — فمثلاً في حالة ثلاث متغيرات إذا أردنا الحصول على  $\beta_{13,2}$  نحذف العدد 2. حيث نجد أن:

$$(4. 10. 4): \beta_{13,2} = \frac{\beta_{13} - \beta_{12} \beta_{32}}{1 - \beta_{32} \beta_{23}}$$

وبالتعويض في (4. 10. 2) كما في علاقة (4. 8. 2) نجد أن: (سهولة الكتابة سنكتب  $q(12n) = q$  مؤقتاً)

$$\begin{aligned} \rho_{12,qn} \frac{\sigma_{1,qn}}{\sigma_{2,qn}} &= \frac{\rho_{12,q} \frac{\sigma_{1,q}}{\sigma_{2,q}} - \rho_{1n,q} \frac{\sigma_{1,q}}{\sigma_{n,q}} \rho_{n2} \frac{\sigma_{n,q}}{\sigma_{2,q}}}{1 - \rho_{2n,q} \frac{\sigma_{2,q}}{\sigma_{n,q}} \rho_{n2} \frac{\sigma_{n,q}}{\sigma_{2,q}}} \\ &= \frac{\rho_{12,q} - \rho_{1n,q} \rho_{n2,q} \left( \frac{\sigma_{1,q}}{\sigma_{2,q}} \right)}{1 - \rho_{2n,q} \rho_{n2,q}} \end{aligned}$$



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحراف

ولكن من (2. 9. 4) - باستخدام الدليل الأساسي 2 بدلا من 1 وإهمال الرقم 2 في الدليل الثانوي) - نجد أن:

$$\frac{\sigma_{2,qn}}{\sigma_{2,q}} = (1 - \rho_{2n,q}^2)^{\frac{1}{2}}$$

وبالمثل:

$$\frac{\sigma_{1,q}}{\sigma_{1,qn}} = (1 - \rho_{1n}^2)^{-\frac{1}{2}}$$

وبالتعويض عن هذا في المعادلة قبل السابقة نجد أن:

$$(4. 10. 5): \rho_{12,q(12)} = \frac{\rho_{12,q(12n)} - \rho_{1n,q(12n)} \rho_{2n,q(12n)}}{(1 - \rho_{1n,q(12n)}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \rho_{2n,q(12n)}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

حيث:  $q(12n) = 34 \dots (n-1)n$  ،  $q(12) = 34 \dots (n-1)n$  . وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(4. 10. 6): \rho_{ij,q(ij)} = \frac{\rho_{ij,q(ijn)} - \rho_{in,q(ijn)} \rho_{jn,q(ijn)}}{(1 - \rho_{in,q(ijn)}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \rho_{jn,q(ijn)}^2)^{\frac{1}{2}}} ; \quad (i \neq j \neq n)$$

حيث  $q(ijn)$  هي الأعداد من 1 إلى  $n$  ماعدا الأعداد  $i, j, n$  و  $q(ij)$  هي الأعداد من 1 إلى  $n$  ماعدا العددين  $i, j$ .

وللحصول على  $\rho_{in,q(ijn)}$  لابد من تطبيق ملاحظة (4 - 10 - 1) على  $\rho_{is}$ ، ففي حالة ثلاث متغيرات مثلا للحصول على  $\rho_{13,2}$  نكتب  $n = 2$  بدلا من 3 إذن:

$$(4. 10. 7): \rho_{13,2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12} \rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{23}^2)}}$$

### (4 - 11) معامل الارتباط المتعدد Multiple Correlation Coefficient

في توزيع أي متغير متعدد  $(X_1, \dots, X_n)$  ذو متغيرات عددها  $n$  إذا كان  $E(X_1 | x_2, \dots, x_n)$  يمثل دالة خطية في الصورة:

$$(4. 11. 1a): E(X_1 | x_2, \dots, x_n) = m_2(x_2, \dots, x_n) \\ = \beta_{12,q(12)} x_2 + \dots + \beta_{1n,q(1n)} x_n .$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

أو إذا كان  $E(X_1 | x_2, \dots, x_n)$  دالة غير خطية وكان أفضل تقدير خطي للمتغير  $X_1$  بدلالة  $x_2, \dots, x_n$  هو:

$$(4. 11. 1b): \hat{X}_1 = m(x_2, \dots, x_n) = \beta_{12, q(12)} x_2 + \dots + \beta_{1n, q(1n)} x_n.$$

حيث  $\hat{X}_1$  هو أفضل تقدير خطي (طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى) يجعل التباين الباقى:

$$(4. 11. 2): Y_{1, q(1)} = X_1 - \hat{X}_1$$

أقل ما يمكن — حيث  $Y_{1, q(1)}$  كما فى (4. 6. 12) و  $q(1) = 23 \dots n$  — فهذا يعنى أن تركيز قيم المتغير  $X_1$  حول المستوى  $X_1 = \hat{X}_1$  أكثر من تركيزها حول أى مستوى آخر. فى الواقع يمكن إثبات أن:

$$(4. 11. 3): E[X_1 - g(x_2, \dots, x_n)]^2 = E[X_1 - E(X_1 | x_2, \dots, x_n)]^2 + E[E(X_1 | x_2, \dots, x_n) - g(x_2, \dots, x_n)]^2 \geq E[X_1 - E(X_1 | x_2, \dots, x_n)]^2$$

حيث  $g(x_2, \dots, x_n)$  أى دالة فى  $x_2, \dots, x_n$ . أى أن الحد الأدنى للتوقع  $E[X_1 - g(x_2, \dots, x_n)]^2$  نحصل عليه عندما تكون  $g(x_2, \dots, x_n) = E(X_1 | x_2, \dots, x_n)$ ، إذ أن هذا يعطى أفضل معادلة لانحدار  $X_1$  على  $x_2, \dots, x_n$  لأنه يجعل توقع مربع الخطأ  $E[X_1 - E(X_1 | x_2, \dots, x_n)]^2$  نهائية صغرى. فإذا كان التوقع  $E[X_1 | x_2, \dots, x_n]$  يمثل مستوى معين سيكون هو المستوى (4. 11. 1a) أما إذا كان يمثل سطح زائد فيمكن باستخدام طريقة المربعات الصغرى الحصول على مستوى معين كتقدير (أو كتقريب) لهذا السطح الزائد ممثلاً فى العلاقة (4. 11. 1b) ومعطياً أفضل تقدير (طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى) يجعل التباين  $V(X_1 - \hat{X}_1)$  نهائية صغرى. وهذا يعنى أن تركيز قيم المتغير  $X_1$  حول المستوى  $X_1 = \hat{X}_1$  أكثر من تركيزها حول أى مستوى آخر — كما سبق أن ذكرنا — وبهذا يكون من الواضح أن معامل الارتباط الكلى بين المتغير (أو المستوى)  $\hat{X}_1$  والمتغير  $X_1$  يعتبر أكبر معامل ارتباط ممكن أن يوجد بين  $X_1$  وأى مستوى آخر أو أى دالة من الدرجة الأولى فى المتغيرات  $x_2, \dots, x_n$ ، وسنوضح ذلك رياضياً فيما بعد فى العلاقة

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

(4. 11. 14)، ومعامل الارتباط بين المتغير  $X_1$  والمتغير ( $\hat{X}_1$  أو المستوى) يمكن اعتباره مقياس للارتباط بين  $X_1$  وبين بقية المتغيرات  $X_2, \dots, X_n$  مجمعة وسوف نطلق على هذا المعامل تسمية خاصة هي "معامل الارتباط المتعدد" بين  $X_1$  وباقي المتغيرات  $X_2, \dots, X_n$  وهو معامل ارتباط متعدد من الدرجة  $(n-1)$  حيث أن عدد المتغيرات المستقلة  $(n-1)$  متغيراً ونرمز له بالرمز  $\rho_{1(23..n)}$  ويمكن كتابته في الصورة التالية:

$$(4. 11. 4): \rho_{1(23..n)} = \frac{E(X_1 \hat{X}_1)}{\sqrt{E(X_1^2)E(\hat{X}_1^2)}}.$$

ولكن:

$$E(X_1 \hat{X}_1) = E[X_1(X_1 - Y_{1,q(l)})] = E(X_1^2) - E(X_1 Y_{1,q(l)})$$

(4. 6. 15) ومن

$$(4. 11. 5): E(X_1 \hat{X}_1) = v_{11} - |V_n|/c(V_n^{11})$$

حيث  $v_{11} = \sigma_1^2$  و

$$|V_n|/c(V_n^{11}) = 1/v^{11} = \sigma_1^2 |P_n|/c(P_n^{11}) = \sigma_{1,23..n}^2$$

كما يتضح من (4. 6. 16)، كذلك:

$$E(\hat{X}_1^2) = E(X_1^2 - 2X_1 Y_{1,q(l)} + Y_{1,q(l)}^2)$$

ومن (4. 6. 16) نحصل على:

$$(4. 11. 6): E(\hat{X}_1^2) = E(X_1^2) - E(Y_{1,q(l)}^2) = \sigma_1^2 - |V_n|/c(V_n^{11})$$

أو

$$= \sigma_1^2 - 1/v^{11}$$

أو

$$= \sigma_1^2 - \sigma_1^2 |P_n|/c(P_n^{11})$$

أو

$$= \sigma_1^2 - \sigma_{1,23..n}^2$$

#### الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

وبالتعويض عن (4. 11. 5) و (4. 11. 6) في (4. 11. 4) نجد أن:

$$\begin{aligned}\rho_{1(23...n)} &= \frac{\sigma_1^2 - |V_n|/c(V_n^{11})}{\sqrt{\sigma_1^2 [\sigma_1^2 - |V_n|/c(V_n^{11})]}} \\ &\text{أو} \\ &= \frac{\sigma_1^2 - 1/v^{11}}{\sqrt{\sigma_1^2 (\sigma_1^2 - 1/v^{11})}} \\ &\text{أو} \\ &= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1^2 |P_n|/c(P_n^{11})}{\sqrt{\sigma_1^2 [\sigma_1^2 - \sigma_1^2 |P_n|/c(P_n^{11})]}} \\ &\text{أو} \\ &= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1,23...n}^2}{\sqrt{\sigma_1^2 (\sigma_1^2 - \sigma_{1,23...n}^2)}}\end{aligned}$$

وبهذا يمكن كتابة معامل الارتباط المتعدد بين  $X_1$  وباقي المتغيرات  $X_2, ..., X_n$  في الصور المكافئة التالية:

$$(4. 11. 7): \quad \rho_{1(23...n)} = \begin{cases} (a) & \sqrt{1 - |V_n|/\sigma_1^2 c(V_n^{11})} & \text{أو} \\ (b) & \sqrt{1 - 1/\sigma_1^2 v^{11}} & \text{أو} \\ (c) & \sqrt{1 - |P_n|/c(P_n^{11})} & \text{أو} \\ (d) & \sqrt{1 - \sigma_{1,23...n}^2/\sigma_1^2} \end{cases}$$

حيث:  $c(V_n^{11})$  هو مرافق العنصر  $(1,1)$  في مصفوفة التغاير  $V_n$  و  $c(P_n^{11})$  هو مرافق العنصر  $(1,1)$  في مصفوفة معاملات الارتباط  $P_n$  و  $v^{11}$  هو العنصر  $(1,1)$  في

## الفصل الرابع - الاحدثار والارتباط والافتقار

مقلوب  $V_n$  و  $\sigma_{1,23...n}^2$  هو تباين الباقي المعروف بالعلاقة (4. 6. 16) و  $|P_n|$  و  $|V_n|$  هما محددي المصفوفتان  $V_n$  و  $P_n$  و  $\sigma_1^2$  هو تباين المتغير  $X_1$ .

والعلاقة الأخيرة السابقة (4. 11. 7d)، عندما تكون  $\hat{X}_1$  تمثل سطح زائد (ليس مستوى)، هي نفسها نسبة ارتباط  $X_1$  على  $X_2, \dots, X_n$  وتسمى نسبة الارتباط المتعدد ونرمز لها بالرمز  $\rho_{1(23...n)}^2$  كتعميم للعلاقة (4. 4. 16) التي تمثل نسبة الارتباط في حالة متغيرين. ومن العلاقة (4. 11. 7d) مع العلاقة (4. 9. 4) نجد أن:

$$(4. 11. 8): 1 - \rho_{1(23...n)}^2 = (1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{13,2}^2)(1 - \rho_{14,23}^2) \dots (1 - \rho_{1n,23...(n-1)}^2).$$

مثال (4 - 11 - 1): يمكن إيجاد معامل الارتباط المتعدد  $\rho_{1(23)}$  للمتغيرات المعطاة في مثال (4 - 7 - 1) السابق بكل الصيغ المقدمة في العلاقة (4. 11. 7) من  $a, b, c, d$  حيث نجد أن:

$$(a) \rho_{1(23)} = \sqrt{1 - 2/\frac{3}{2}(\frac{8}{4})} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(b) \rho_{1(23)} = \sqrt{1 - 1/\frac{3}{2}(1)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(c) \rho_{1(23)} = \sqrt{1 - \frac{16}{27}/\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(d) \rho_{1(23)} = \sqrt{1 - 1/\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

ويمكن التأكد من صحة العلاقة (4. 11. 8) حسابياً من مثال (4 - 7 - 1) كما يلي:

من (4. 10. 7) نجد أن:

$$\rho_{13,2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{23}^2)}}$$

وحيث أن  $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = -\frac{1}{3}$  إذن:

$$\rho_{13,2} = -\frac{1}{2}$$

وبتطبيق ذلك على العلاقة (4. 11. 8) نجد أن الجانب الأيسر يساوي  $(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

والجانب الأيمن يساوي  $(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$ .

من العلاقات السابقة يمكن استنباط الخصائص التالية لمعامل الارتباط المتعدد:

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتراض

(1) من العلاقة (4. 11. 8) نستنتج أن  $\rho_{1(23...n)}^2$  أكبر من لو يساوى أى  $\rho^2$  كلى أو جزئى آخر أى أن:

$$(4. 11. 9): \rho_{1(23...n)}^2 \geq \rho_{1f.s}^2$$

حيث S مجموعة جزئية من الأعداد  $23...n$  و  $J = 2, 3, ..., n$ .

(2) من العلاقة (4. 8. 7) نعلم أن  $\sigma_{1.23...n}^2 \leq \sigma_1^2$  إذن من (4. 11. 7d) يتضح أن معامل الارتباط المتعدد  $\rho_{1(23...n)}$  دائماً موجب، كما يتضح كذلك أن  $\rho_{1(23...n)}^2 \leq 1$  — إذن:

$$(4. 11. 10): 0 \leq \rho_{1(23...n)}^2 \leq 1$$

وعندما  $\rho_{1(23...n)} = 1$  تكون  $|V_n| = |P_n| = 0$  — أى أن محددى مصفوفتى التغاير ومعاملات الارتباط كل منهما يساوى الصفر — وذلك طبقاً للعلاقة (4. 11. 7) مما يوضح أن التوزيع المشترك للمتغير  $(X_1, ..., X_n)$  يكون توزيعاً شاذاً Singular Distribution وطبقاً لنظرية (3 - 11 - 3) يكون المتغير  $X_1$  "من المؤكد غالباً" Almost Certainly أنه يمثل علاقة دالية من الدرجة الأولى فى المتغيرات  $X_2, ..., X_n$  أى أن:

$$\Pr(X_1 = \hat{X}_1) = 1$$

حيث  $\hat{X}_1$  كما هى معطاة بالعلاقة (4. 11. 1b)، وهذا يعنى أن الاحتمال الكلى للتوزيع المشترك للمتغيرات  $X_1, ..., X_n$  منجم Degenerate (أى مركزاً) فى مستوى زائد معين In Certain Hyper plane فى الفراغ ذو الـ n بعداً هو المستوى الزائد  $X_1 = \hat{X}_1$ . وعلى هذا فإن  $\rho_{1(23...n)}$  يعتبر مقياس لدرجة اعتماد  $X_1$  على باقى المتغيرات  $X_2, ..., X_n$ .

(3) بما أن القيمة العددية لمعامل الارتباط المتعدد  $\rho_{1(23...n)}$  أكبر من لو تساوى القيمة العددية لأى معامل ارتباط كلى أو جزئى بين المتغيرات  $X_1, ..., X_n$  — كما يتضح من (4. 11. 9) — إذن عندما يكون معامل الارتباط المتعدد مساوياً للصفر تكون معاملات الارتباط الكالية والجزئية بين  $X_1$  وأى من المتغيرات الأخرى كلها أصفار وبالتالي لا يوجد ارتباط بين  $X_1$  وأى متغير آخر من المتغيرات  $X_2, ..., X_n$ .

لقد ذكرنا أن معامل الارتباط المتعدد  $\rho_{1(23...n)}$  يقيس العلاقة بين  $X_1$  وباقى المتغيرات  $X_2, ..., X_n$  مجتمعة. لكننا أحياناً نرغب فى قياس العلاقة بين  $X_1$  وأى

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

مجموعة جزئية من المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$ . فإذا كانت  $S$  تمثل مجموعة جزئية من الأعداد  $1, 2, \dots, n$  فإننا نعرف معامل الارتباط الكلي بين  $X_1$  وبين مجموعة المتغيرات المذيلة بأرقام المجموعة  $S$  طبقاً للعلاقة (4. 11. 7d) بأنه:

$$(4. 11. 11): \rho_{1(S)}^2 = 1 - \sigma_{1,S}^2 / \sigma_1^2$$

ولكن من العلاقة (4. 9. 2) يتضح أن:

$$(4. 11. 12): \sigma_{1,S}^2 \leq \sigma_{1,r}^2$$

عندما تكون  $r$  أى مجموعة جزئية من  $S$ ، وهذا معناه أن تباین الباقي لا يمكن أن يزيد بإضافة المزيد من المتغيرات. إذن من (4. 11. 11) و(4. 11. 12) نجد أن:

$$(4. 11. 13): \rho_{1(2)}^2 \leq \rho_{1(23)}^2 \leq \rho_{1(234)}^2 \leq \dots \leq \rho_{1(23\dots n)}^2$$

وهذا يوضح أن معامل الارتباط المتعدد  $\rho_{1(S)}$  لا يمكن أن ينقص بإضافة المزيد من المتغيرات، ونستشف من العلاقة (4. 11. 13) أن بإضافة المزيد من المتغيرات المستقلة نجد أن  $\rho_{1(23\dots n)}$  تقترب من الواحد الصحيح (1.0) بينما خطأ التقدير  $\sigma_{1,23\dots n}$  يقترب من الصفر، فإذا كان من الممكن أن ندخل في أى مسألة كل المتغيرات المستقلة الوثيقة الصلة بها فإن  $\rho_{1(23\dots n)}$  يمكن أن تساوى الواحد الصحيح ونحصل بذلك على تقديرات كاملة Perfect Estimates للمتغير  $X_1$  بدلالة باقى المتغيرات.

لقد سبق أن ذكرنا في بداية البند الحالي (4 - 11) أن معامل الارتباط الكلي بين المتغير  $X_1$  والمستوى  $\hat{X}_1$  - المعطى بالعلاقة (4. 11. 1b) يعتبر أكبر معامل ارتباط ممكن أن يوجد بين  $X_1$  وأى مستوى آخر أو أى دالة أخرى من الدرجة الأولى فى المتغيرات  $X_2, \dots, X_n$  ويمكن إثبات ذلك رياضياً بتعميم العلاقة (4. 4. 3) من حالة متغيرين إلى حالة  $n > 2$  من المتغيرات لإثبات أن:

$$(4. 11. 14): \rho_{1(23\dots n)} = \rho(X_1, \hat{X}_1) \geq |\rho[X_1, g(X_2, \dots, X_n)]|$$

لأى دالة  $g(X_2, \dots, X_n)$  فى المتغيرات  $X_2, \dots, X_n$ .

ملاحظة (4 - 11 - 1): يمكن الحصول على معامل الارتباط المتعدد بين  $X_i$  عندما  $i \neq 1$  وبين باقى المتغيرات من العلاقات (4. 11. 7) بكتابة  $i$  بدلاً من العدد 1 والعدد 1 بدلاً من العدد  $i$ . كما يمكن مراعاة ذلك فى كل الصيغ المقدمة فى كل العلاقات التالية للعلاقة (4. 11. 7).

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

### (4 - 12) الانحدار الخطى التقريبي (المربعات الصغرى):

#### Approximate Linear Regression (Least Squares):

إن معادلات الانحدار السابقة تمثل انحدار خطى مضبوط Exactly Linear ولكن عندما يكون المجتمع مجتمعاً مشاهدًا — أى مجتمع من المشاهدات وليس مجتمعاً نظرياً — يكون المناخ لدينا مشاهدات المجتمع وليس توزيعه الاحتمالي (النظري) فيكون من النادر الحصول على علاقات انحدار بين المتغيرات فى شكل خطى منضبط — ولكن قد يتضح من شكل انتشار المشاهدات أن الانحدار قريب بدرجة كافية من الصيغة الخطية ولكنه ليس خطياً منضبطاً — Not Exactly Linear — مما يدفعنا إلى توفيق خط مستقيم فى حالة متغيرين  $X_1$  و  $X_2$  لانحدار أحدهما على الآخر مثل العلاقة:

$$X_1 = \alpha_1 + \beta_{12} X_2$$

أو توفيق مستوى زائد Hyper plane فى حالة  $n > 2$  من المتغيرات لانحدار أحدها على باقى المتغيرات مثل العلاقة (4. 6. 2). ويمكن توفيق علاقات خطية للمجتمعات المشاهدة التى لا نعرف توزيعها الاحتمالي (أى التى لا نشترط لها توزيع معين) ولكن مشاهدات المجتمع متاحة لدينا، وذلك طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى. فإذا كان لدينا مجتمع متعدد المتغيرات  $(X_1, \dots, X_n)$  عدد متغيراته  $n$  ولدينا  $N$  من المشاهدات من هذا المجتمع هى:  $(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ni})$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$  فإذا ظهر من شكل انتشار المشاهدات أن انحدار  $X_1$  مثلاً على باقى المشاهدات قريب جداً من العلاقة الخطية التالية:

$$(4. 12. 1a): X_1 = \beta_{12,q(12)} X_2 + \dots + \beta_{1n,q(1n)} X_n$$

ولجميع المشاهدات تكون:

$$(4. 12. 1b): \underline{X}_1 = [\underline{X}] \underline{\beta}$$

ونرغب فى توفيق العلاقة الخطية السابقة طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى — أى نختار قيم  $\beta$  التى تجعل مربعات الانحرافات المشاهدات  $X_{1i}$  عن مستوى الانحدار نهاية صغرى — فيتم ذلك باختيار قيم  $\beta$  التى تحقق العلاقة التالية:

$$(4. 12. 2a): N \sigma_{1,23 \dots n}^2 = \sum_{i=1}^N \left[ X_{1i} - \sum_{j=2}^n \beta_{1j,q(1j)} X_{ji} \right]^2$$

= minimum = نهاية صغرى



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

أو في صورة مصفوفية كما يلي:

$$(4. 12. 2b): N \sigma_{123...n}^2 = S = [\underline{x}_1 - [x]\underline{\beta}]' [\underline{x}_1 - [x]\underline{\beta}]$$

= minimum = نهاية صغرى

فإذا فرضنا أن  $x$ 's مقيسة من مركزها ونستخدم لها الرمز  $x$ 's بدلا من  $X$ 's — وهذا لا يؤدي إلى نقص في العمومية — وأن  $N > n$  فإن قيم  $\beta$  التي تحقق العلاقة السابقة هي نفسها قيم  $\beta$  التي تجعل:

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial \beta_{12}} \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_{1n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}_{(n-1) \times 1}$$

ويمكن إثبات أن:

$$\frac{\partial \underline{\beta}' [x] \underline{x}_1}{\partial \underline{\beta}} = \frac{\partial \underline{x}_1 [x] \underline{\beta}}{\partial \underline{\beta}} = [x]' \underline{x}_1$$

$$; \frac{\partial \underline{\beta}' [x] [x] \underline{\beta}}{\partial \underline{\beta}} = 2[x]' [x] \underline{\beta} ; \frac{\partial \underline{x}_1 \underline{x}_1}{\partial \underline{\beta}} = 0$$

وهذا يوصلنا إلى قيم  $\beta$  في الصورة التالية:

$$(4. 12. 3): \underline{\beta}_{(n-1)} = ([x]' [x])^{-1} [x]' \underline{x}_1$$

(وذلك إذا كانت المصفوفة  $[x]' [x]$  لها مقلوب) حيث:

$$\underline{\beta}_{(n-1)}' = (\beta_{12,q(12)}, \beta_{13,q(13)}, \dots, \beta_{1n,q(1n)}).$$

والمصفوفة  $[x]$  هي مشاهدات المتغيرات  $X_1, X_2, \dots, X_n$  و  $\underline{x}_1$  هو متجه مشاهدات المتغير  $X_1$  — أي أن:

#### الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

$$(4. 12. 4): [X]' = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nN} \end{bmatrix}_{(n-1) \times N}$$

و  $\underline{x}'_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}]_{N \times 1}$  و  $N > n$  . أنظر تمرين (4-8).

علماء بان:  $\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0$  ,  $j = 1, 2, \dots, n$  حيث أن المشاهدات مقيسة من مركزها. إذن:

$$(4. 12. 5a): [X]' [X] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^N x_{2i} x_{3i} & \dots & \sum_{i=1}^N x_{2i} x_{ni} \\ \sum_{i=1}^N x_{3i} x_{2i} & \sum_{i=1}^N x_{3i}^2 & \dots & \sum_{i=1}^N x_{3i} x_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N x_{ni} x_{2i} & \sum_{i=1}^N x_{ni} x_{3i} & \dots & \sum_{i=1}^N x_{ni}^2 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= N \begin{bmatrix} v_{22} & v_{23} & \dots & v_{2n} \\ v_{31} & v_{33} & \dots & v_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث  $v_{ij}$  هو تغاير  $X_i$  و  $X_j$  .

وذلك لأن المتغيرات مقيسة من مركزها والمجتمع عبارة عن مجتمع من المشاهدات لذلك فإن:

$$(4. 12. 5b): \text{Cov}(X_i, X_j) = v_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{it} x_{jt}$$

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والافتقار

فإذا رمزنا لمصفوفة التغيرات للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  بالرمز:

$$(4.12.6): V_n = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

إذن من (4.12.5, 6) يتضح أن:

$$(4.12.7): [x]' [x] = N V_n^{11}$$

حيث  $V_n^{11}$  هي المصفوفة  $V_n$  بعد حذف الصف الأول والعمود الأول — أى أن  $V_n^{11}$  هي مصفوفة التغيرات للمتغيرات  $X_2, \dots, X_n$ . كما يتضح من (4.12.4) أن:

$$(4.12.8): [x]' \underline{x}_1 = \left( \sum_{i=1}^N x_{1i}, x_{2i}, \dots, \sum_{i=1}^N x_{ni}, x_{ni} \right) \\ = N(v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}) = N \underline{M}'$$

حيث  $\underline{M}$  هو متجه تغيرات  $X_1$  مع  $X_2, \dots, X_n$ . ومن (4.12.3, 7, 8) نجد أن:

$$(4.12.9): \underline{\beta}_{(n-1)} = (V_n^{11})^{-1} \underline{M}$$

حيث  $V_n^{11}$  هي مصفوفة التغيرات للمتغيرات  $X_2, \dots, X_n$  هو متجه تغيرات  $X_1$  مع  $X_2, \dots, X_n$ .

ويمكن كتابة العلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$(4.12.10): V_n^{11} \underline{\beta}_{(n-1)} = \underline{M}$$

والعلاقة السابقة تمثل  $(n-1)$  من المعادلات في  $(n-1)$  من المجاهيل وهي نفس المعادلات المعطاة بالعلاقة (4.6.5) وبالتالي يكون لها نفس الحل السابق المعطى بالعلاقة (4.6.9) حيث نجد أن:

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

$$(4.12.11): \beta_{ik,q(ik)} = \begin{cases} -c(V_n^{ik})/c(V_n^{11}) & \text{لو} \\ -V^{ik}/V^{11} & \text{لو} \\ -\sigma_1 c(P_n^{ik})/\sigma_k c(P_n^{11}) & \text{لو} \end{cases}$$

حيث  $c(V_n^{ik})$  هو مرافق العنصر  $v_{ik}$  في المصفوفة  $V_n$  و  $V_n^{ik}$  هو العنصر الذي ترتيبه  $(1, k) -$  أى الموجود في الصف الأول والعمود  $k -$  فى مقلوب المصفوفة  $V_n$  و  $c(P_n^{ik})$  هو مرافق العنصر  $p_{ik}$  فى مصفوفة معاملات الارتباط  $P_n$  وبالمثل نعرف  $c(V_n^{11})$  و  $c(P_n^{11})$ .

وكما حصلنا على  $\beta_{ik,q(ik)} -$  وهو معامل الانحدار الجزئى للمتغير  $x_i$  على المتغير  $x_k$  مع فرض ثبات باقى المتغيرات يمكن الحصول على معامل الانحدار  $\beta_{ik,q(ik)}$  وذلك بافتراض أن المتغير التابع  $x_i$  هو المتغير الأول حيث أن ترتيب المتغيرات يعتبر فرضاً اختيارياً - كما يمكن الحصول عليه بأسلوب مشابه للعلاقة (4.6.10).

مما سبق يتضح أن مستوى الانحدار الخطى التقريبى طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى يعطى تماماً نفس معاملات الانحدار الخطى المضبوط. وعلى ذلك فإن كل النتائج التى قدمناها فى هذا الباب الخاصة بالانحدار الخطى المضبوط تكون صالحة كذلك فى حالة توفيق مستوى انحدار خطى تقريبي بالمربعات الصغرى للمجموعات المشاهدة التى ليس لها توزيع معروف وإما يتوافر لدينا مجموعة مشاهدات المجتمع.

وفى حالة متغيرين تكون

$$V_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & v_{12} \\ v_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_{12} = -c(V_2^{12})/c(V_2^{11}) = -(-1)^{1+2} v_{21}/\sigma_1^2 = \sum x_1 x_2 / \sum x_1^2$$

وبما أن المتغيرات مقيسة من مركزها إذن:  $x_{.i} = X_{.i} - E(X_{.i})$  وبما أن المجتمع مشاهد إذن:  $E(X_{.i}) = \bar{X}_i$  إذن:

$$\beta_{12} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{1i} - \bar{X}_1)(x_{2i} - \bar{X}_2)}{\sum_{i=1}^N (x_{1i} - \bar{X}_1)^2}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

ومعادلة الانحدار هي:

$$x_1 = \beta_{12} x_2$$

$$(x_1 - \bar{x}_1) = \beta_{12} (x_2 - \bar{x}_2)$$

$$X_1 = (\bar{x}_1 - \beta_{12} \bar{x}_2) + \beta_{12} X_2 = \alpha_1 + \beta_{12} X_2$$

وهي نفس العلاقة (4. 2. 9).

### 4 - 13) معاملات العينة Sample Coefficient

4 - 13 - 1) معاملات الارتباط والانحدار للعينة (حالة متغيرين):

في حالة المجتمعات المشاهدة عند معرفة مشاهدات المجتمع دون توزيعه الاحتمالي النظري إذا لم تكن كل مشاهدات المجتمع متاحة أو يصعب التعامل معها لكبر حجمها وكان متاح لدينا فقط عينة عشوائية من هذه المشاهدات حجمها  $N$  لمجتمع متعدد عدد متغيراته  $n$  حيث  $N > n$ ، قد يكون مطلوب حساب (أو تقدير) كل المعاملات السابقة للانحدار والارتباط من بيانات العينة. وعادة نسمي هذه المعاملات في المجتمع بـ "معالم" أو ثوابت أو بارامترات المجتمع وعند حساب (أو تقدير) هذه المعاملات من العينة نقول أنها "إحصاءات" العينة المقابلة لمعالم المجتمع. فإذا رمزنا لمعالم المجتمع بالحروف الإغريقية  $\rho$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  فإننا نرمز للإحصاءات المقابلة في العينة بالرموز أو بالحروف الرومانية  $r$ ،  $b$ ،  $e$  على الترتيب. كذلك نرمز لمصفوفتي التغاير ومعاملات الارتباط في المجتمع بالرمزين  $V = (v_{ij})$ ،  $P = (p_{ij})$  وفي العينة بالرمزين  $S = (s_{ij})$ ،  $R = (r_{ij})$  وعادة نستخدم كل الصيغ التي حصلنا عليها لمعاملات المجتمع المشاهد كصيغ للمعاملات المناظرة في العينة مع إجراء التبديل اللازم من  $\rho$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  وغير ذلك إلى  $r$ ،  $b$ ،  $e$ . وبهذا فإن معامل الانحدار  $b_{1k.q(1k)}$  للعينة يمكن الحصول عليه بعلاقة مشابهة تمامًا للعلاقة (4. 12. 11) للمجتمع في الصورة:

$$(4. 13. 1): b_{1k.q(1k)} = \begin{cases} -c(s_n^{11})/c(s_n^{1k}) & \text{ن} \\ -s^{1k}/s^{11} & \text{ن} \\ -s_1 c(R_n^{1k})/s_k c(R_n^{11}) ; (s_1 = s_{11}, s_k = s_{kk}) & \text{ن} \end{cases}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

حيث  $c(S_n^{ik})$  هو مرافق العنصر  $s_{ik}$  فى المصفوفة  $S_n$  و  $c(R_n^{ik})$  هو مرافق العنصر  $r_{ik}$  فى المصفوفة  $R_n$  و  $s^{ik}$  هو العنصر  $(i, k)$  فى مقلوب المصفوفة  $S_n$ . و:

$$(4. 13. 2): S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}; R_n = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$s_{ij}$  هو تغاير  $X_i, X_j$  المحسوب من بيانات العينة و  $r_{ij}$  هو معامل الارتباط بينهما المحسوب أيضاً من بيانات العينة.

ويتطبيق ذلك على حالة متغيرين  $X, Y$  نجد أن:

$$(4. 13. 3): b_{12} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (y - \bar{y})^2}$$

و

$$b_{21} = \frac{\sum (y - \bar{y})(x - \bar{x})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

والمجاميع مأخوذة على كل قيم العينة.

كذلك من علاقة (4. 7. 6a) نجد أن معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  مع استبعاد تأثير  $X_3, \dots, X_n$  المحسوب من بيانات العينة هو:

$$(4. 13. 4): r_{12.34\dots n} = \begin{cases} -c(S_n^{12}) / \sqrt{c(S_n^{11}) \cdot c(S_n^{22})} & \text{ن} \\ -s^{12} / \sqrt{s^{11} \cdot s^{22}} & \text{لو} \\ -c(R_n^{12}) / \sqrt{c(R_n^{11}) \cdot c(R_n^{22})} & \text{لو} \end{cases}$$

حيث  $S, R$  كما هى معرفة فى العلاقات (4. 13. 1, 2). وفى حالة متغيرين  $X$  و  $Y$  يكون:

$$(4. 13. 5): r_{12} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot \sum (y - \bar{y})^2}}$$

والمجاميع مأخوذة على كل قيم العينة.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والانحراف

ملاحظة (4 - 13 - 1): مما هو جدير بالذكر أن كل إحصاءات العينة المناظرة لمعالم المجتمع يمكن الحصول عليها باستخدام نفس الصيغ السابقة المقدمة لمعالم المجتمع مع مجرد تبديل الحروف الإغريقية  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\xi$ , .. بالأحرف المقابلة التالية  $r$ ,  $b$ ,  $e$ , .. والحصول على عزوم العينة بنفس طريقة الحصول على عزوم المجتمع المشاهد كما في العلاقة (4. 12. 5b) على أن تكون المجاميع مأخوذة على كل قيم العينة.

ومعاملات العينة (أو إحصاءات العينة) ما هي إلا متغيرات عشوائية (فهى تتغير من عينة لأخرى) نرغب فى الحصول على التوزيع الاحتمالى المضبوط أو التقاربى لكل منها لفائدته التطبيقية والعملية لذلك سنقدم فيما يلى بعضاً من هذه الإحصاءات تمهيداً لتقديم توزيعاتها الاحتمالية بعد ذلك فى باب توزيعات المعايير.

(4 - 13 - 2) نسبة الارتباط لمتغيرين: إذا كان لدينا عينة مسحوبة من مجتمع ثانى وبياناتها مبوبة فى جدول تكرارى مزدوج  $(t \times k)$  حسب فئات وتكرارات متغيرين  $X$ ,  $Y$ . ونوضح من الجدول أو من شكل لتنتشار البيانات أنها غير خطية، وكانت أعمدة الجدول تمثل تكرارات  $X$  المناظرة لمراكز فئات  $Y$  (العمود رقم  $J$  يمثل تكرارات  $X$  المناظرة لمركز الفئة  $Y_j$ )، فإن هذا الجدول يسمى جدول الارتباط  $(t \times k)$  ويأخذ الشكل التالى:

جدول (4 - 13 - 1)

مراكز الفئات	$Y_1$	...	$Y_j$	...	$Y_k$	$n_{..}$
$x_1$	$n_{11}$	...	$n_{1j}$	...	$n_{1k}$	$n_{1.}$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	
$x_i$	$n_{i1}$	...	$n_{ij}$	...	$n_{ik}$	$n_{i.}$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	
$x_t$	$n_{t1}$	...	$n_{tj}$	...	$n_{tk}$	$n_{t.}$
$n_{.y}$	$n_{.1}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.k}$	$n_{..} = n$

ويمكن حساب نسبة ارتباط  $X$  على  $Y$  من بيانات الجدول السابق باستخدام علاقة مشابهة للعلاقة (4. 8)، إذ نستخدم متوسطات المتغير  $X$  فى الأعمدة المختلفة (متوسطات الأعمدة) - أى المتوسطات  $\bar{x}_j = \bar{x} | Y_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$  - بدلا من معادلة انحدار  $X$  على  $Y$ ، أى بدلا من  $E(X | Y)$ . ونرمز لنسبة الارتباط هذه المحسوبة

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

من العينة بالرمز  $e_1$  حيث كنا نرمز لها في المجتمع بالرمز  $\xi_1$ . ومن العلاقة (4. 4. 8) — بعد كتابة  $X$  بدلا من  $Y$  و  $Y$  بدلا من  $X$  — نجد أن:

$$\xi_1^2 = \frac{v[E(x|Y)]}{v(\bar{x})}$$

وباستخدام متوسطات  $X$  في الأعمدة المختلفة بدلا من  $E(X|y)$  وكتابة  $e_1$  بدلا من  $\xi_1$  نجد أن نسبة ارتباط  $X$  على  $Y$  المحسوبة من الجدول التكرارى السابق هي  $e_1$  حيث:

$$(4. 13. 6): e_1^2 = \frac{v(\bar{X}|Y)}{v(\bar{X})} = \frac{\sum_{j=1}^k n_{.j} (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2}$$

$$; \bar{x}_{i1} = \bar{x}_{i2} = \dots = \bar{x}_{ik} = \bar{x}_i$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^k n_{.j} (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^l n_{.i} (x_i - \bar{x})^2}$$

وبأسلوب مماثل يمكن الحصول على نسبة ارتباط  $Y$  على  $X$  والتي نرمز لها بالرمز  $e_2$  من جدول (4 - 13 - 4) السابق باستخدام متوسطات  $Y$  في الصفوف المختلفة ( $\bar{Y}_i = \bar{Y}|x_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ) بدلا من  $E(Y|x)$  حيث نجد من علاقة (4. 4. 8) أن:

$$\xi_2^2 = v[E(Y|x)]/v(Y).$$

وباستخدام متوسطات  $Y$  في الصفوف المختلفة بدلا من  $E(Y|x)$  وكتابة  $e_2$  بدلا من  $\xi_2$  نجد أن نسبة ارتباط  $Y$  على  $X$  المحسوبة من الجدول التكرارى السابق هي  $e_2$  حيث:

$$(4. 13. 7a): e_2^2 = v(\bar{Y}|x)/v(Y) = \frac{\sum_{i=1}^l n_{.i} (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^k n_{.j} (Y_j - \bar{Y})^2}$$

وبما أن:  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_{.j} Y_j$  و  $\bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j}{n_{.i}}$  إذن يمكن تبسيط العمل الحسابى بكتابة الصيغة (4. 13. 7a) في الصورة التالية:



الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والانتقار

$$(4. 13. 7b): S_2^2 = \left[ \sum_{i=1}^i \left( \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j \right)^2 / n_i - \left( \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j \right)^2 / n \right] \\ + \left[ \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j^2 - \left( \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j \right)^2 / n \right]$$

مثال (4 - 13 - 1): احسب نسبة ارتباط Y على X بين المتغيرين X و Y من الجدول التكراري التالي، حيث X تمثل عمر الرجل المتزوج و Y تمثل عدد ما عنده من أطفال بين سن 7 سنوات و 18 سنة.

X \ Y	25 -	30 -	35 -	40 -	45 -	50 -	$\sum (n_{ij})$
1	4	7	2	2			15
2	2	12	8	7		1	30
3	1	5	15	9	7	3	40
4		1	12	11	10	6	40
$\sum (n_{ij})$	7	25	37	29	17	10	125

(الحل)

لحساب  $v(Y)$  نضيف العمودين  $n_{ij} Y_j$  و  $n_{ij} Y_j^2$  للجدول السابق:

$n_{ij} Y_j$	$n_{ij} Y_j^2$
15	15
60	120
120	360
160	640
355	1135

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

ولحساب  $v(\bar{Y}|x)$  نضيف الصفيين التاليين:

$\left( \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j \right)$	11	50	111	87	61	35
$\frac{\left( \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j \right)^2}{n_{i.}}$	17.29	100	333	261	218.88	122.5

ومجموع الصف الأخير هو:

$$\sum_{i=1}^t \left( \sum_{j=1}^k n_{ij} Y_j \right)^2 / n_{i.} = 1052.67$$

وبتطبيق العلاقة (4. 13. 7b) نجد أن مربع نسبة ارتباط Y على X هي:

$$e_2^2 = \frac{1052.67 - (355)^2/125}{1135 - (355)^2/125} = 0.35$$

إذن نسبة ارتباط Y على X هي:

$$e_2 = 0.592$$

وتؤخذ بدون إشارة إذ أن العلاقة بين X و Y ليست خط مستقيم لذلك ليس من الضروري أن تكون طردية (موجبة) أو عكسية (سالبة) لجميع قيم X و Y فقد تكون طردية في جزء من منحنى العلاقة بين المتغيرين وعكسية في جزء آخر.

(4 - 13 - 3) معامل ارتباط الرتب Rank Correlation Coefficient:

لحساب معامل ارتباط بيرسون بين ظاهرتين (أو متغيرين) لابد أن تكون الظاهرتان من النوع المقيس أي القابل للقياس العددي مثل الطول والوزن ودرجات الحرارة وغير ذلك. ولكن كثيراً ما نرغب في قياس الارتباط بين ظواهر يصعب أو يستحيل قياسها عددياً. ويمكن التغلب على هذه الصعوبة بترتيب مفردات العينة طبقاً لمؤشر معين وتحديد رقم عددي لكل مفردة في العينة يعبر عن ترتيبها يسمى رتبة المفردة وذلك بالنسبة لكلا الظاهرتين المرغوب في إيجاد الارتباط بينهما وهذا يسمح بإمكانية ترتيب مفردات العينة تصاعدياً (أو تنازلياً) بالنسبة لكل ظاهرة من الظاهرتين. وبهذا يكون لدينا مفردات عددها n (هي حجم العينة) مرتبة Ranked طبقاً لظاهرتين مختلفتين (أو خاصيتين مختلفتين) ونحاول قياس الارتباط بين هاتين الظاهرتين بدلالة رتبتهما. فإذا

## الفصل الرابع - الاحدثار والارتباط والاقتران

كانت رتب هذه المفردات طبقاً لإحدى الظاهرتين (أو المتغيرين) هي:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  وطبقاً للظاهرة الأخرى (أو المتغير الآخر) هي:  $y_1, y_2, \dots, y_n$  فإن كل من  $x_i$  و  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) تمثل عدداً من الأعداد الطبيعية  $1, 2, \dots, n$ . وعلى هذا يمكن قياس الارتباط بين الرتب واستخدامه كمقياس للارتباط بين الظاهرتين. وتختصر المشكلة في إيجاد معامل ارتباط بيرسون بين هذه الرتب طبقاً للعلاقة (3. 8. 18) أو (4. 2. 15)، ويسمى في هذه الحالة بـ "معامل ارتباط الرتب" ونرمز له بالرمز  $r_R$  تمييزاً له عن معامل الارتباط بين قيم الظاهرتين (وايست رتيهما) المسمى بـ "معامل ارتباط بيرسون" والذي نرمز له في العينة بالرمز  $r$ . أى أن المعامل المطلوب هو معامل ارتباط بيرسون بين أزواج الرتب:  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  حيث كل من  $(x_i, y_i)$  تمثل زوج من الأعداد  $1, 2, \dots, n$ . وبذلك نجد أن:

$$\sum x = \sum Y = n(n+1)/2$$

$$\sum x^2 = \sum Y^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\sum (x - \bar{x})(Y - \bar{Y}) = \frac{1}{12} \left[ (n^3 - n) - 6 \sum_i (x_i - Y_i)^2 \right]$$

$$\sum (x - \bar{x})^2 = \sum (Y - \bar{Y})^2 = (n^3 - n)/12$$

ويتطبيق العلاقة (3. 8. 18) أو (4. 2. 15) نجد أن معامل ارتباط الرتب بين الظاهرتين يأخذ الصورة:

$$(4. 13. 8): r_R = 1 - 6 \sum_i d_i^2 / (n^3 - n)$$

$$\sum_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - Y_i)^2 \quad \text{حيث:}$$

ونلفت نظر القارئ أنه عند تسليق مجموعة من الرتب (لأى من المتغيرين) نعطي لكل رتبة رقماً كما لو كانت هذه الرتب غير متساوية ثم نعتبر الوسط الحسابي لهذه الأرقام بمثابة رتبة موحدة لهذه الرتب المتساوية. فمثلاً إذا كانت  $x_1 = x_2 = x_3 = 5$  فنعتبر أن  $x_1 = 5$ ،  $x_2 = 6$ ،  $x_3 = 7$  ثم نحدد رتبة موحدة هي  $(5+6+7)/3 = 6$ . بحيث نضع  $x_1 = x_2 = x_3 = 6$ .

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

### (4 - 13 - 4) معامل الارتباط داخل فئة Intra-class Correlation Coefficient :

فسي كثير من الأحيان - خاصة في الدراسات البيولوجية - يكون مطلوب تقدير معامل الارتباط بين مفردات من عائلة واحدة (أو فئة واحدة). فقد يكون مطلوب تقدير معامل الارتباط بين متغيرين  $(X, Y)$  ينتميان إلى فئة معينة مثل إيجاد الارتباط بين طول الأخوة بناء على بيانات مأخوذة من  $n$  أسرة، في كل منها عدد من الأبناء (الأخوة). فإذا رمزنا لطول الفرد (الأخ داخل الأسرة) رقم  $s$  في العائلة رقم  $i$  بالرمز  $X_{si}$ ، إذن لتقدير الارتباط بين طول الأخوة نحتاج إلى تكوين أزواج من القيم  $(X_{vi}, X_{si})$  حيث  $X_{vi}$  تمثل المفردة الأولى و  $X_{si}$  تمثل المفردة الثانية في الزوج  $(X_{vi}, X_{si})$ . وطبعاً لا بد من الاتفاق على مبدأ معين لتحديد المفردة التي نعتبرها أولى والمفردة التي نعتبرها ثانية في كل زوج. فلو اعتبرنا أن المفردة الأولى هي الأخ الأكبر والثانية الأخ التالي له في العمر لكان معامل الارتباط المحسوب هو معامل للارتباط بين طول الأخ الأكبر والأخ التالي له في العمر. وإذا اعتبرنا أن المفردة الأولى هي الأخ الأطول والثانية هي الأخ التالي له في الطول لكان معامل الارتباط الناتج هو معامل للارتباط بين طول الأخ الأطول والأخ التالي له في الطول، وهكذا. ولما كان المهم هو إيجاد معامل الارتباط بين أطوال الأخوة بصفة عامة، أي مع عدم تحديد المفردة الأولى والثانية على أساس العمر أو الطول وإنما على أساس القرابة فقط، لذلك لا بد أن نأخذ كل مفردة (أي كل ابن من أبناء الأسرة) مرة كمفردة أولى ومرة أخرى كمفردة ثانية. فلو كانت الأسرة - أو بصفة عامة الفئة - رقم  $i$  لديها  $k_i$  من الأبناء أطوالهم كما يلي:

$$(4.13.9): (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ik_i}) ; i = 1, 2, \dots, n.$$

فيمكن تكوين جدول ارتباط يمثل أزواج من القيم بحيث أن كل مفردة من مفردات الأسرة (i) أو الفئة (i) تظهر في الجدول  $(k_i - 1)$  مرة كمفردة أولى و  $(k_i - 1)$  مرة كمفردة ثانية، وبذلك يكون لدينا  $(k_i - 1)$  زوج من القيم من بيانات الأسرة رقم (i). وإذا وجدنا مفردتين متساويتين (لهما نفس القيمة) داخل الأسرة فإن الزوج المكون منهما يظهر في الجدول مرتين. ومن الواضح أن عدد أزواج القيم في جدول الارتباط كله (لكل الأسر) يساوي:  $N = \sum_{i=1}^n k_i (k_i - 1)$  زوجاً من القيم، ومن هذه الأزواج يتم حساب معامل ارتباط "بيرسون" العادي، فيكون هو "معامل الارتباط بين طول الأخوة" أي "معامل الارتباط داخل الفئة". وسنرمز لمعامل الارتباط داخل الفئة في العينة بالرمز  $r_i$  وفي المجتمع بالرمز  $\rho_i$  تمييزاً له عن معامل ارتباط "بيرسون" الذي نرمز له في العينة بالرمز  $r$  وفي المجتمع بالرمز  $\rho$ . وهنا (i) تشير إلى أول حرف في كلمة

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاختلاف

"Intra - class". ويمكن استخدام البيانات (4. 13. 9) مباشرة في حساب  $r_i$  دون الحاجة إلى تكوين جدول ارتباط من أزواج القيم وذلك كما يلي:

نكرنا أنه عند تكوين جدول ارتباط نكون أولاً أزواج من القيم:

$$(4. 13. 10): (x_{vi}, x_{si}); v \neq s, v, s = 1, 2, \dots, k_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

وعدد أزواج القيم يساوى  $N$  حيث:

$$(4. 13. 11): N = \sum_{i=1}^n k_i (k_i - 1).$$

فلو اعتبرنا قيم المفردة الأولى في كل زوج تمثل قيم متغير عشوائى نرمز له بالرمز  $x^{(1)}$  وقيم المفردة الثانية تمثل قيم متغير عشوائى  $x^{(2)}$  فإن جدول الارتباط يحتوى على  $N$  قيمة للمتغير الثنائى  $(x^{(1)}, x^{(2)})$ ، ويكون "معامل الارتباط داخل الفئة" المحسوب من هذه القيم هو نفسه "معامل ارتباط بيرسون" المعطى بالعلاقة:

$$(4. 13. 11'): r_i = r = \frac{\text{Cov}(x^{(1)}, x^{(2)})}{\sqrt{V(x^{(1)}) \cdot V(x^{(2)})}} = S_{12} / \sqrt{S_{11} S_{22}}$$

حيث  $S_{12}$  هو تغاير  $x^{(1)}$  و  $x^{(2)}$  المقدر من بيانات العينة و  $S_{11}$   $S_{22}$  تباين العينة للمتغير  $x^{(1)}$  و  $S_{22}$  تباين العينة للمتغير  $x^{(2)}$ . ومن الواضح أن قيم للمتغير  $x^{(1)}$  هى نفسها قيم للمتغير  $x^{(2)}$ . إذن متوسط  $x^{(1)}$  يساوى متوسط  $x^{(2)}$  وتباين  $x^{(1)}$  يساوى تباين  $x^{(2)}$ ، أى أن:

$$(4. 13. 12): E(x^{(1)}) = E(x^{(2)}) = \bar{x}$$

$$V(x^{(1)}) = V(x^{(2)}) = S_{11} = S_{22} = S^2$$

وبالتالى فإن:

$$(4. 13. 13): r_i = \text{Cov}(x^{(1)}, x^{(2)}) / S^2.$$

كما أن عدد قيم  $x^{(1)}$  تساوى عدد قيم  $x^{(2)}$  تساوى عدد أزواج القيم أى تساوى  $N$ . وحيث أن كل مفردة من مفردات الأسرة (i) تظهر كمفردة أولى  $(k_i - 1)$  مرة كمفردة ثانية  $(k_i - 1)$  مرة أيضاً إذن توقع كل من  $x^{(1)}$  و  $x^{(2)}$  هو:

$$(4. 13. 14): \bar{x} = E(x^{(1)}) = E(x^{(2)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (k_i - 1) \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij}.$$

## الفصل الرابع - الاحداد والارتباط والافتران

وتباين كل من  $x^{(1)}$  و  $x^{(2)}$  هو:

$$(4.13.15): S^2 = V(x^{(1)}) = V(x^{(2)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (k_i - 1) \sum_{j=1}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x})^2.$$

وتغاير  $x^{(1)}$  و  $x^{(2)}$  هو:

$$(4.13.16): \text{Cov}(x^{(1)}, x^{(2)}) = S_{12} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x})(x_{si} - \bar{x})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x}) \right]^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i^2 (\bar{x}_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x})^2 \right\} \end{aligned}$$

حيث  $\bar{x}_i$  هو متوسط مفردات الأسرة (i):

$$(4.13.17): \bar{x}_i = \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ji}$$

إن معامل الارتباط داخل الفئة هو:

$$\begin{aligned} (4.13.18): r_i &= \text{Cov}(x^{(1)}, x^{(2)}) / s^2 \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^n k_i^2 (\bar{x}_i - \bar{x})^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x})^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (k_i - 1) \sum_{j=1}^{k_i} (x_{ji} - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

فإذا كانت أعداد المفردات داخل الفئات — أى أعداد الأخوة داخل الأسر — متساوية فإن  $k_i = k$  لجميع قيم  $i$  والعلاقة (4.13.18) يمكن تبسيطها فى الصورة التالية:

$$(4.13.19): r_i = \frac{k^2 n S_{\bar{x}}^2 - k n S_x^2}{(k-1) k n S_x^2} = \frac{1}{(k-1)} \left[ k S_x^2 / S_{\bar{x}}^2 - 1 \right]$$

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والافتقار

حيث:  $S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2$  هي تباين متوسطات الفئات و:

$$S_x^2 = \frac{1}{n k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_{ji} - \bar{x})^2 \quad \text{حيث } V(x^{(i)}) , i = 1, 2$$

ملاحظة (4 - 13 - 4): بالنظر إلى الصيغة (19، 13، 4) يتضح أن  $r_i$  لا يمكن أن يقل عن  $\left(\frac{-1}{k-1}\right)$  بالرغم من أنه يصل إلى  $(+1)$  عندما  $S_x^2 = S_{\bar{x}}^2$ . وهذا يدل على أن معامل الارتباط  $\rho_i$  في المجتمع (أو في العينة) يمكن اعتباره مثلثاً أي لا يحقق الخصائص القياسية في معاملات الارتباط وهي أن يصل إلى  $(-1)$  كحد أدنى و  $(+1)$  كحد أعلى ومعنى هذا أن القيمة السالبة للمعامل  $\rho_i$  (أو  $r_i$ ) ليس لها نفس الدلالة المكافئة للقيمة الموجبة المساوية لها عددياً في الاتجاه المضاد. لهذا لابد من مراعاة ذلك عند التعامل مع هذا المعامل.

وسنقدم المثال البسيط التالي لمجرد توضيح طريقة حساب  $r_i$ .

مثال (4 - 13 - 4): نفرض أن لدينا 4 أسر كل أسرة بها 3 أولاد وكانت أطوال الأولاد داخل الأسر كما يلي:

$$(167, 168, 168); (170, 171, 172); (173, 170, 170); (171, 172, 172)$$

أوجد معامل الارتباط بين طول الأخوة  $(r_i)$ .

(الحل)

بطرح وسط فرضي (170) من كل القيم نجد أن قيم المتغيرات تصبح كما يلي:

$$(-3, -2, -2); (0, 1, 2); (3, 0, 0); (1, 1, 2)$$

ومن (4، 13، 14):

$$\bar{x} = \frac{(k-1)}{N} \left[ \sum_{ij} x_{ij} \right]$$

حيث

$$k = 3, n = 4, N = nk(k-1) = 24$$

$$\bar{x} = \frac{1}{12} [-3 - 2 - 2 + 1 + \dots + 2] = \frac{1}{4}$$

ومن (4، 13، 15):

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{(k-1)}{N} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 (x_{ji} - \bar{x})^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ji}^2 - \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{12} [(-3)^2 + \dots + (2)^2] - \frac{1}{16} = 3.0208333 \end{aligned}$$

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والاختبار

ومتوسطات الأسر هي:

$$\bar{x}_i : -\frac{7}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}.$$

واختلافاتها عن  $\bar{x}$  هي:

$$(\bar{x}_i - \bar{x}) : -\frac{31}{12}, \frac{9}{12}, \frac{9}{12}, \frac{13}{12}.$$

$$S_x^2 = \frac{1}{4} \left[ \left(-\frac{31}{12}\right)^2 + \dots + \left(\frac{13}{12}\right)^2 \right] = 2.2430555$$

ومن (4. 18. 19):

$$r_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{3 \times 2.2430555}{3.0208333} - 1 \right] = 0.613793103$$

ويمكن حل هذا المثال بتكوين جدول ارتباط من أزواج القيم التي يمكن تكوينها من أطوال كل أسرة. فمثلا بالنسبة للأسرة الأولى إذا أخذنا كل مفردة كمفردة أولى، ستكون بالطبع كل مفردة أخرى مفردة ثانية، ويمكن تكوين الأزواج التالية:

$$(167, 168), (167, 168); (168, 167), (168, 168); (168, 167), (168, 168).$$

عدد الأزواج للأسرة الأولى هو  $k(k-1) = 3 \times 2 = 6$  والمفردتان المتساويتان والتي قيمة كل منها 168 مكون منهما زوجان من القيم. وباستكمال باقي الأزواج من باقي الأسر وتقريغ البيانات في جدول (ارتباط) مزدوج نحصل على الجدول التالي:

		$Y_j:$						
		-3	-2	0	1	2	3	
$x_i$	$Y$	167	168	170	171	172	173	$\sum = n_{x_i}$
-3	167	—	2	—	—	—	—	2
-2	168	2	2	—	—	—	—	4
0	170	—	—	2	1	1	2	6
1	171	—	—	1	2	3	—	6
2	172	—	—	1	3	—	—	4
3	173	—	—	2	—	—	—	2
	$\sum = n_{y_j}$	2	4	6	6	4	2	$N = 24$



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتتان

والجدول السابق ما هو إلا جدول ارتباط عادي لكنه متمثل حول قطره الرئيسي ولابد أن يكون كذلك لأن كل مفردة تدخل مرة كمفردة أولى ومرة أخرى كمفردة ثانية في أزواج المفردات التي يضمها الجدول. لذلك يمكن حساب معامل ارتباط بيرسون العادي من هذا الجدول طبقاً للعلاقة (5 13. 4) التي يمكن وضعها في الصورة التالية نظراً للجدول التكراري المزدوج وهو من الناحية الرمزية مماثل تماماً لجدول (4 - 13 - 1):

$$(4. 13. 20): r = \frac{N \sum \sum x_i Y_j n_{ij} - (\sum x_i n_{i.})(\sum Y_j n_{.j})}{\sqrt{[N \sum x_i^2 n_{i.} - (\sum x_i n_{i.})^2][N \sum Y_j^2 n_{.j} - (\sum Y_j n_{.j})^2]}}$$

$$= \frac{24(46) - 6 \times 6}{\sqrt{[24(74) - 6^2][24(74) - 6^2]}} = \frac{1068}{1740} = 0.613793103$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

(4 - 13 - 5) معامل الارتباط رباعي النسق [جدول الارتباط (2×2)]:

**Tetrachoric Correlation Coefficient [Correlation Table (2×2)]:**

أحياناً يكون لدينا بيانات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ثنائي (X, Y) له توزيع معروف أو يمكن التكهّن به وأحياناً لا يمكن معرفة توزيع المجتمع. سنتناول الآن الحالة التي يكون من الصعب فيها معرفة توزيع المجتمع والتي تكون فيها بيانات العينة مسحوبة في جدول (2×2) ذو أربعة خانّات داخلية فقط. أما الحالة التي يكون توزيع المجتمع معلوم سنتناولها بعد ذلك عندما يكون المجتمع له توزيع معناد ثنائي.

نفرض أن بيانات العينة مفرّغة في جدول (2×2) وكل ما نعرفه عن المجتمع الثنائي المسحوب منه هذه العينة - أي المجتمع (X, Y) - هي أن كل من المتغيرين يأخذ إحدى قيمتين 0 أو 1 أو أننا نفترض ذلك تمثيلاً مع تصنيف بيانات العينة في الجدول (2×2). وحتى في مثل هذه الحالات الحدية عندما توجد قيمتان ممكنتان فقط (مثل 1 و 0) لكل متغير، يمكن الحصول نظرياً على قيمة لمعامل ارتباط بيرسون للعلاقة بين المتغيرين تكون مقبولة إلى حد ما من الناحية النظرية. فمن الطبيعي لو كانت بيانات العينة التي لدينا بيانات تفصيلية موضعاً فيها القيمة العددية لكل مفردة من مفردات العينة لكان من السهل الحصول على معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين حيث يكون من السهل حساب كل الكميات الداخلة في حساب معامل الارتباط r مثل تباين العينة للمتغيران X و Y وكذلك التغاير بينهما. ولكن وجود بيانات العينة مدمجة في جدول (2×2) يجعل من الصعب حساب تباين العينة لكل من X و Y وكذلك تغايرهما. ومعامل الارتباط المحسوب من جدول (2×2) يسمى "معامل الارتباط رباعي النسق" نسبة إلى أن البيانات المتاحة

#### الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والاختلاف

مدمجة في أربعة أقسام فقط ونرمز له بالرمز  $r_i$  في العينة و  $p_i$  في المجتمع حيث  $r$  هو الحرف الأول من كلمة tetrachoric أى رباعي النسق. فإذا كان لدينا عينة حجمها  $n$  مسحوبة من مجتمع ثنائى  $(X, Y)$  ولم تكن بيانات العينة مفصلة في الصورة  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  وإنما كانت مدمجة في شكل جدول  $(2 \times 2)$  على النحو التالي:

جدول (4 - 13 - 5)

$Y \backslash X$	$x_1 (=0)$	$x_2 (=1)$	$\Sigma$
$Y_1 (=0)$	$a_1$	$b_1$	$a_1 + b_1$
$Y_2 (=1)$	$a_2$	$b_2$	$a_2 + b_2$
$\Sigma$	$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	$N$

$$n = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

ونحاول من الجدول السابق تقدير  $p_i$  في المجتمع وذلك بحساب الإحصاء أو معامل الارتباط  $r_i$  في العينة. لذلك نفترض أن المتغير  $X$  في المجتمع يأخذ إحدى قيمتين (0) أو (1) وكذلك  $Y$  يأخذ إحدى القيمتين 0 أو 1. فإذا كانت  $p_1$  هي النسبة الحقيقية للقيم  $X = 1$  في المجتمع و  $(1 - p_1)$  هي النسبة الحقيقية للقيم  $X = 0$  و  $p_2$  هي النسبة الحقيقية للقيم  $Y = 1$  و  $(1 - p_2)$  هي النسبة الحقيقية للقيم  $Y = 0$  في المجتمع المسحوب منه العينة، والنسبة الحقيقية في المجتمع للمفردات التي فيها  $X = i$  و  $Y = j$  هي  $p_{ij}$  حيث  $i, j = 0, 1$ . إذن كل من المتغيرين  $X$  و  $Y$  في المجتمع يكون لهما توزيع برنوللى، فنظّر بسند (2 - 23 - 2) و (ب) ونظّر كذلك التوزيع ذو النقطتين في الباب السابع بند (2 - 7) وكذلك تعريف (2 - 7 - 1) - (ب) - إذن:

$$(4. 13. 21): E(X) = p_1, v(X) = p_1(1 - p_1)$$

$$E(Y) = p_2, v(Y) = p_2(1 - p_2)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - p_1 p_2 = p_{11} - p_1 p_2$$

وبذلك يكون معامل ارتباط بيرسون في المجتمع بين  $X$  و  $Y$  هو:

$$(4. 13. 22): \rho_1 = \frac{p_{11} - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1 - p_1) \cdot p_2(1 - p_2)}}$$

## الفصل الرابع - الاحداد والارتباط والافتراض

وعند سحب عينة عشوائية من هذا المجتمع تكون بياناتها كبيانات جدول (4 - 13 - 5 أ) السابق ونحسب معامل الارتباط  $r_1$  بنفس طريقة حساب معامل ارتباط المجتمع  $\rho_1$  حيث يمكن استخدام الكمية  $(b_1 + b_2)/n$  بدلا من  $p_1$  و  $(a_2 + b_2)/n$  بدلا من  $p_2$  و  $b_2/n$  بدلا من  $p_{11}$  وبالتالي فإن معامل الارتباط  $r_1$  الذى نحسبه للعينة ونعتبره تقدير لمعامل ارتباط المجتمع  $\rho_1$  يكون فى الصورة التالية:

$$(4. 13. 23a): r_1 = \frac{\left[ \frac{b_2}{n} - \left( \frac{b_1 + b_2}{n} \right) \left( \frac{a_2 + b_2}{n} \right) \right]}{\sqrt{\left( \frac{b_1 + b_2}{n} \right) \left( \frac{a_1 + a_2}{n} \right) \cdot \left( \frac{a_2 + b_2}{n} \right) \left( \frac{a_1 + b_1}{n} \right)}}$$

حيث  $n = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$  إذن:

$$(4. 13. 23b): r_1 = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}}$$

حيث  $a_1, a_2, b_1, b_2$  هى بيانات جدول (4 - 13 - 5 أ). والصيغة السابقة لن تعطى إشارة (+ أو -) ذات دلالة لمعامل الارتباط  $r_1$  إلا إذا كانت القيم كما فى جدول (4 - 13 - 5 أ) السابق حيث  $x_2 > x_1$  وكذلك  $Y_2 > Y_1$  أو العكس  $x_2 < x_1$  وكذلك  $Y_2 < Y_1$  ولكن إذا عكسنا قيم أحد المتغيرين فقط دون الآخر فهذا يؤدى إلى تغيير إشارة  $r_1$ .

(4 - 13 - 6) معامل الارتباط ثنائى التمسلس ذات النقطة:

### Point - biserial Correlation Coefficient:

قد تكون بيانات العينة التى نقدر منها معامل ارتباط المجتمع ليست مفصلة تفصيلا كاملا ولكنها أكثر تفصيلا من الحالة السابقة - حالة جدول  $(2 \times 2)$  - فقد تكون البيانات مدمجة بالنسبة لمتغير واحد ولكنها مفصلة إلى حد ما بالنسبة للمتغير الآخر. فإذا رمزنا للمجتمع الثنائى المسحوب منه العينة بالرمز  $(X, Y)$  وكانت بيانات العينة المتاحة لدينا مدمجة بالنسبة للمتغير  $Y$  فى شكل فئتين اثنتين فقط لكنها مفصلة بالنسبة للمتغير  $X$  فى فئات عددها  $t$  فئة فإننا نقول أن البيانات مقسمة ثنائيا Dichotomy بالنسبة للمتغير  $Y$  ولكنها مقسمة تقسيم متعدد بالنسبة للمتغير  $X$  وهذه الحالة نطلق عليها حالة الجدول  $(2 \times t)$ .

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتزان

لنفترض أن  $Y$  متغيراً يأخذ إحدى قيمتين اثنتين فقط (وقد تكون إحدى صفتين) يمكن اعتبار أن هاتين القيمتين هما 0 أو 1. ولنفترض أن بيانات المتغير  $X$  في العينة مفصلة تفصيلاً يكفي لتقدير توقعه  $E(X)$  وتباينه  $V(X)$  وتغايره مع  $Y$ ،  $Cov(X, Y)$ . فإذا كانت قيم  $X$  في العينة هي:  $x_1, x_2, \dots, x_i$  وقيم  $Y$  هي:  $Y_1, Y_2$  فإن بيانات العينة تمثل سلسلتين من أزواج القيم هي:

$$(Y_1, x_1), \dots, (Y_i, x_i)$$

$$(Y_2, x_1), \dots, (Y_2, x_i)$$

لذلك فإن معامل الارتباط بين  $X$  و  $Y$  يسمى معامل الارتباط ثنائي التسلسل وحيث أن  $Y$  تأخذ إحدى قيمتين أو إحدى نقطتين هما 0 أو 1 لذلك نطلق على معامل الارتباط للبيانات السابقة اسم "معامل الارتباط ثنائي التسلسل ذو النقطة". ونرمز له في المجتمع بالرمز  $\rho_{pb}$  وفي العينة بالرمز  $r_{pb}$  والحرفان  $p, b$  هما الحرفان الأولان في كلمتي (Point - biserial). فإذا رمزنا لنسبة قيم  $Y$  التي تساوى الواحد في المجتمع بالرمز  $p$  تكون نسبة قيمها التي تساوى الصفر هي  $(1 - p)$ ، ويكون المتغير  $Y$  في المجتمع في هذه الحالة له توزيع "برنولي" - كما أشرنا إلى ذلك في الحالة السابقة بند (4 - 13 - 5) حيث:

$$E(Y) = p, \quad V(Y) = p(1 - p) \quad (4.13.24)$$

ويكون معامل الارتباط  $\rho$  في المجتمع بين المتغيرين  $X$  و  $Y$  طبقاً للعلاقة (4.13.5) هو:

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{[E(XY) - E(X)E(Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.13.25)$$

$$= \frac{[E(XY) - pE(X)]}{\sigma_X \sqrt{p(1-p)}}$$

فلو رمزنا لعدد القيم في المجتمع التي فيها  $Y$  تساوى 1 بالرمز  $b_1$  وعددها في العينة بالرمز  $b_1$  ورمزنا لعدد القيم في المجتمع التي فيها  $Y$  تساوى 0 بالرمز  $b_2$  وعددها في العينة بالرمز  $b_2$  والعدد الكلي لقيم  $Y$  في العينة بالرمز  $n = b_1 + b_2$  فيمكن تقدير القيم المجهولة في العلاقة (4.13.25) كما يلي:

نقدر  $E(X)$  باستخدام متوسط قيم  $X$  في العينة وهو  $\bar{x}$  كما نقدر  $\sigma_X$  للمجتمع باستخدام الانحراف المعياري لقيم  $X$  في العينة وهو  $S_x$  ونقدر النسبة  $p$  باستخدام النسبة المقابلة لها في العينة وهي:

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

$$(4. 13. 26): \begin{cases} \hat{p} = p = \frac{b_1}{n} \\ (1 - \hat{p}) = 1 - p = \frac{b_2}{n} \\ E(X) = \bar{x} \quad , \quad V(X) = \sigma_x = S_x \end{cases}$$

(حيث العلامة  $\wedge$ ) تشير إلى التقدير

كما يمكن تقدير  $E(XY)$  من بيانات العينة باستخدام العلاقة:

$$(4. 13. 27): \hat{E}(XY) = \frac{1}{n} \sum_x \sum_y xy$$

وحيث أن  $Y$  تأخذ القيمتين 0 أو 1 فإن كل حدود الطرف الأيمن في العلاقة السابقة التي فيها  $Y = 0$  تختفي وكل الحدود التي فيها  $Y = 1$  تساوى  $x \cdot 1 = x$  مع الأخذ في الاعتبار أن  $Y = 1$  في الفئة  $b_1$  وتساوى الصفر في الفئة  $b_2$  إذن العلاقة (4. 13. 27) تأخذ الصورة التالية:

$$(4. 13. 28): \hat{E}(XY) = \frac{1}{n} \sum_{i \in b_1} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{b_1} x_i = \frac{1}{n} b_1 \bar{x}_1$$

حيث  $\bar{x}_1$  هو متوسط  $x$  في العينة في الفئة  $b_1$  . وبالتعويض عن (4. 13. 26, 28) في العلاقة (4. 13. 25) نجد أن:

$$(4. 13. 29): \hat{\rho}_{pb} = r_{pb} = \frac{(b_1 \bar{x}_1 / n) - p \bar{x}}{S_x \sqrt{pq}}$$

حيث:  $p = b_1/n$  ,  $q = b_2/n$

ولكن  $\bar{x}$  هي الوسط المرجح للوسطين  $\bar{x}_1$  في الفئة  $b_1$  و  $\bar{x}_2$  في الفئة  $b_2$  أى أن:

$$\bar{x} = (b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2) / n$$

وبالتعويض عن ذلك في (4. 13. 29) نجد أن معامل الارتباط ثنائي التسلسل ذو النقطة للمتغيرين  $X$  و  $Y$  المصوب من العينة هو:

$$(4. 13. 30): \hat{\rho}_{pb} = r_{pb} = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \sqrt{pq} / S_x$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والاختبار

حيث  $S_x$  هو الانحراف المعياري لقيم  $x$  في العينة  $\bar{x}_1$  هو متوسط  $x$  في الفئة  $b_1$  و  $\bar{x}_2$  هو متوسطها في  $b_2$  و  $p = b_1/n$  و  $q = b_2/n$ . حيث  $b_1$  هي عدد القيم الثنائية  $(X, Y)$  التي فيها  $Y = 1$  و  $b_2$  عدد القيم  $(X, Y)$  التي فيها  $Y = 0$  كما سبق أن ذكرنا و  $r_{pb}$  يسمى معامل الارتباط ثنائي التسلسل ذات النقطة فهو ثنائي التسلسل نسبة لأن بيانات العينة تمثل سلسلتين من أزواج القيم كما أنه ذات نقطة نسبة لأن المتغير  $Y$  يأخذ إحدى قيمتين أو نقطتين هما  $Y = 0$  أو  $Y = 1$ .

مثال (4 - 13 - 6 أ):

فسي اختبارات القبول لإحدى الكليات العسكرية تقدم 6175 طالب وكانت نتيجة الاختبارات كما يلي:

Age of Candidate عمر المتقدم	Successful ناجح	Failed راسب	Total المجموع
$x_i$	$c_{1i} : Y \in b_1$	$c_{2i} : Y \in b_2$	$c_i$
17	580	550	1130
18	700	990	1690
19	500	880	1380
20	325	800	1125
21	250	400	650
22	50	150	200
$\Sigma$	2405	3770	6175

والمطلوب تقدير معامل الارتباط بين العمر والنجاح في الاختبارات  $(r_{pb})$ .

(الحل)

نأخذ العدد "1" للمتقدم الناجح والعدد "0" للمتقدم الراسب ونرمز للعمر بالرمز  $x$

إذن:

#### الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والاختبار

$$\bar{x}_1 = \sum_{i \in b_1} x_i c_{1i} / \sum c_{1i} = \frac{44810}{2405} = 18.632$$

$$\bar{x}_2 = \sum_{i \in b_2} x_i c_{2i} / \sum c_{2i} = \frac{71590}{3770} = 18.9894$$

$$n = 6175, n_1 = 2405, n_2 = 3770$$

$$\bar{x} = (n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2) / n = 18.8502$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum c_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 1.878$$

$$S_x = 1.37$$

$$p = \frac{2405}{6175} = 0.3895$$

إذن من (4. 13. 30)

$$r_{pb} = \frac{(18.632 - 18.9894) \sqrt{0.3895 \times 0.6105}}{1.37} = -0.127$$

أي أن معامل الارتباط بين العمر والنجاح في الاختبارات صغير.

(4 - 13 - 7) الاختبار في جداول (2 × 2) :

##### Association in (2 × 2) Tables:

في المتغيرات الوصفية قد نهتم بوجود (presence) أو عدم وجود (absence) صفة (attribute) معينة أو أكثر في مجتمع ما أو في مجموعة من المفردات. وحصر عدد المفردات التي تنصف (أو لا تنصف) بهذه الصفة هو ما نطلق عليه "إحصاءات الصفات". ويمكن تصنيف المجتمع إلى فئتين متميزتين طبقاً لكل صفة، أحدهما الفئة التي تتكون من المفردات التي تنصف بهذه الصفة والفئة الثانية تتكون من المفردات التي لا تنصف بها. وهذا هو أبسط أنواع التصنيف ويسمى تصنيفاً (أو تقسيماً) ثنائياً "Dichotomy"، أما في حالة تقسيم المجتمع إلى أكثر من فئتين يكون التصنيف متعدداً "Manifold". وهذا يحدث عند تقسيم المجتمع إلى  $s$  فئة  $A_1, \dots, A_s$  ثم تقسيم كل فئة من فئات  $A$  إلى  $t$  فئة  $B_1, \dots, B_t$  ثم تقسيم كل فئة من فئات  $B$  إلى  $m$  فئة وهكذا. وعادة نرمز للصفات بالحروف اللاتينية الكبيرة  $A, B, C, \dots$  فالمفردة التي تنصف بالصفة  $A -$  أو التي توجد بها الصفة  $A -$  نرمز لها بالرمز  $A$  والفئة (أو المجموعة) التي تتكون من كل المفردات

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والافتراق

التي تتصف بالصفة A تسمى بـ "الفئة A" "Class A" والمفردة التي لا تتصف بالصفة A — أو التي لا توجد بها الصفة A — نرمز لها بالرمز  $\bar{A}$  والفئة التي تنتمي إليها هي "الفئة  $\bar{A}$ ". كما نستخدم الرمز AB للإشارة إلى المفردة التي توجد بها الصفتان A و B معاً وكذلك  $A\bar{B}$  تشير إلى المفردة التي توجد بها الصفة A ولا توجد بها الصفة B وهكذا. ونستخدم الحروف اللاتينية الصغيرة المحصورة داخل العلامة « » أى الأحرف «a», «b», «c», ... للدلالة على عدد المفردات التي تتصف بالصفات A, B, C, ... على الترتيب، فمثلاً «a» هي عدد المفردات التي تتصف بالصفة A أو التي تنتمي للفئة A و « $\bar{a}$  b» عدد المفردات التي تنتمي للفئة  $\bar{A}B$ ، وهكذا. وسنتناول الآن حالة مجتمع عدد مفرداته N ومصنف طبقاً لصفتي A و B حسب وجود أو عدم وجود كل صفة حيث يمكن تقسيم هذا المجتمع إلى 4 فئات يمكن تمثيلها بجدول مكون من صفين وعمودين يسمى جدول (2×2) فيأخذ الشكل التالي:

جدول (4 - 13 - 7 أ)

الصفة Attribute	B	$\bar{B}$	Total
A	«a b»	« $\bar{a}$ $\bar{b}$ »	«a»
$\bar{A}$	« $\bar{a}$ b»	« $\bar{a}$ $\bar{b}$ »	« $\bar{a}$ »
Total	«b»	« $\bar{b}$ »	N

$$N = \text{«a»} + \text{«}\bar{a}\text{»} = \text{«b»} + \text{«}\bar{b}\text{»}$$

وأحياناً نكتب الجدول السابق في الصورة التالية:

جدول (4 - 13 - 7 ب)

الصفة Attribute	B	$\bar{B}$	$\Sigma$
A	$a_1$	$b_1$	$a_1 + b_1$
$\bar{A}$	$a_2$	$b_2$	$a_2 + b_2$
$\Sigma$	$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	N

$$N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$



## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

عند استقلال الصفتين A و B نتوقع أن تكون نسبة المفردات التي توجد بها الصفة داخل الفئة B تساوي نسبة المفردات التي توجد بها A داخل الفئة  $\bar{B}$  كما تساوي أيضا نسبة المفردات التي توجد بها A في المجتمع كله أي أن:

$$(4.13.31): \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{a_1 + b_1}{N}$$

وبالمثل:

$$(4.13.32): \begin{cases} \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_2 + b_2}{N} \\ \frac{a_1}{a_1 + b_1} = \frac{a_2}{a_2 + b_2} = \frac{a_1 + a_2}{N} \\ \frac{b_1}{a_1 + b_1} = \frac{b_2}{a_2 + b_2} = \frac{b_1 + b_2}{N} \end{cases}$$

من العلاقة (4.13.31) نجد أن:

$$(4.13.33): a_1 = (a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N$$

العلاقة السابقة تم اشتقاقها بناء على افتراض استقلال الصفتين A و B فإذا وجدنا في جدول ما أن:

$$(4.13.34): a_1 > (a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N$$

كان معنى ذلك أن نسبة المفردات التي توجد بها الصفة A في الفئة B أكبر من تلك النسبة في المجتمع وبالتالي أكبر من تلك النسبة في الفئة  $\bar{B}$  وفي هذه الحالة نقول أن الصفتان A و B "مقترنتان اقتران موجب" "Positively Associated" أو بلفظ مختصر "مقترنتان" "Associated" وبالعكس إذا كانت:

$$(4.13.35): a_1 < (a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N$$

نقول أن الصفتان A و B "مقترنتان اقتران سالب" "Negatively Associated" أو بلفظ مختصر "غير مقترنتان" "Disassociated".

من العلاقة (4.13.33) نرى أن الكمية  $(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N$  هي عدد المرات (التكرارات) المتوقع لاقتران (أي تلازم) الصفتين A و B في حالة استقلالهما، فإذا كان عدد المرات الفعلي بالجدول  $(2 \times 2)$  لتلازم الصفتين A و B - وهو العدد  $a_1$  -

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاقتران

أكبر من العدد المتوقع كما في العلاقة (4. 13. 34) قلنا بوجود "اقتران موجب" أو اختصاراً بوجود "اقتران" وعلى العكس من ذلك إذا كان العدد الفعلي  $a_1$  أقل من العدد المتوقع كما في العلاقة (4. 13. 35) قلنا بوجود "اقتران سالب" أو اختصاراً "عدم وجود اقتران". لذلك يمكن استخدام الفرق بين العدد الفعلي  $a_1$  لتلازم الصفتين A و B وبين العدد المتوقع  $(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N$  كمؤشر لقياس شدة الاقتران بين الصفتين A و B. وعلى هذا يمكن قياس الاقتران بمقارنة التكرارات الفعلية المشاهدة في الجدول  $(2 \times 2)$  وهي  $a_1, a_2, b_1, b_2$  بالتكرارات المتوقعة المناظرة لها التي نتوقع أننا كنا سنحصل عليها لو كانت الصفتان A و B مستقلتان وهي للتكرارات التالية:

$$(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N, (a_2 + b_2)(a_1 + a_2)/N$$

$$(a_1 + b_1)(b_1 + b_2)/N, (a_2 + b_2)(b_1 + b_2)/N$$

فلو رمزنا للفرق بين أي تكرار مشاهد من التكرارات الأربعة  $a_1, a_2, b_1, b_2$  الموجودة داخل جدول  $(2 \times 2)$  وبين التكرار المناظر له في حالة الاستقلال بالرمز D سيكون لدينا أربعة فروق هي في الواقع متساوية في القيمة العددية والاختلاف بينها يكون في الإشارة فقط وذلك لأن التكرارات الهامشية (مجموع الصفوف وكذلك مجموع الأعمدة) في الجدول  $(2 \times 2)$  ثابتة لا تتغير لذلك إذا كان الفرق بين التكرار المشاهد (الفعلي) والتكرار المناظر له في حالة الاستقلال في الخلية الأولى من الصف الأول يساوي  $D +$  مثلاً فإن الفرق في الخلية الثانية من نفس الصف لابد أن يساوي  $-D -$  وذلك لأن مجموع الصف ثابت (يساوي  $a_1 + b_1$ ) وكذلك الحال بالنسبة للصف الثاني وكذلك بالنسبة للأعمدة. لذلك يمكن حساب الفرق D بصورة محددة من أي خلية في الجدول – لتكون مثلاً الخلية الأولى من الصف الأول حيث نجد من جدول (4 – 13 – 7ب) أن:

$$(4. 13. 36): D = a_1 - (a_1 + b_1)(a_1 + a_2)/N = (a_1 b_2 - b_1 a_2)/N$$

$$. N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \text{ حيث}$$

في الواقع كلما كانت D كبيرة كلما كان الفرق بين التكرارات المشاهدة (الفعلية) والتكرارات المتوقعة في حالة الاستقلال كبيراً وهذا يدل على أن الفرق D يعبر عن شدة الاقتران وعندما  $D = 0$  يكون التكرار الفعلي مساوياً للتكرار المتوقع المناظر له في حالة الاستقلال كما يتضح من (4. 13. 36) إذن  $D = 0$  عندما تكون الصفتان A و B مستقلتان ولهذا يمكن استخدام D لقياس الاقتران. ولكن عادة نفضل أن يكون مقياس الاقتران له صفات قياسية (كأي مقياس جيد). أي يجب أن يكون المقياس في صورة معامل (لقياس الاقتران) له حدود أو مدى معين يتغير خلاله، فيكون له حد أدنى يصل إليه في حالة

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والافتران

الافتران السالب الكامل لا يقل عنه وقيمة مركزية يصل إليها في حالة الاستقلال وحد أعلى في حالة الافتران الموجب الكامل لا يتعداه.

والدراسات الخاصة بتحديد العلاقة بين الظواهر الوصفية بدأت منذ عام 1900 وتطورت حتى أمكن تقديم معامل للافتران نرمز له بالرمز  $M_1$ . Coefficient of Association ونعرفه بالعلاقة التالية:

$$(4. 13. 37): M_1 = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1 b_2 + b_1 a_2} = \frac{ND}{a_1 b_2 + b_1 a_2}$$

حيث  $N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$  و  $D$  كما في (4. 13. 36).

هذا المعامل،  $M_1$ ، يساوى الصفر عندما تكون الصفات  $A$  و  $B$  مستقلتان إذ في هذه الحالة تكون  $D = 0$ ، ويساوى  $(+1)$  عندما تكون  $b_1 a_2 = 0$  أى عندما  $b_1 = 0$  أو  $a_2 = 0$  وبمقارنة جدولى (4 - 13 - 7 أ وب) نعلم أن  $\langle a \bar{b} \rangle = 0$  عندما لا توجد مفردات لديها الصفة  $A$  وليست لديها الصفة  $B$  كما أن  $\langle \bar{a} b \rangle = 0$  عندما لا توجد مفردات لديها الصفة  $B$  وليست لديها الصفة  $A$  ومعنى هذا أن كل مفردة تتصف بالصفة  $B$  تتصف أيضاً بالصفة  $A$  وهذا يحدث في حالة الافتران الموجب الكامل. كما أن  $M_1 = (-1)$  عندما  $a_1 b_2 = 0$  أى عندما  $a_1 = 0$  أو  $b_2 = 0$  وبمقارنة جدولى (4 - 13 - 7 أ وب) نجد أن  $\langle a b \rangle = 0$  عندما لا توجد مفردات تحمل الصفات  $A$  و  $B$  معاً كما أن  $\langle \bar{a} \bar{b} \rangle = 0$  عندما لا توجد مفردات ذاتية من الصفات معاً وهذا لا يحدث إلا في حالة عدم الافتران الكامل. كما أن معامل الافتران  $M_1$  يزيد بزيادة  $D$  وينقص بنقصانها.

ملاحظة (4 - 13 - 7 أ): إذا ضربنا تكرارات كل الفئات التى تحتوى على الصفة  $A$  فى ثابت معين (لو قسمناها على ثابت معين) فإن قيمة معامل الافتران  $M_1$  لا تتغير، ونفس الشيء بالنسبة للصفات  $\bar{A}$  و  $B$  و  $\bar{B}$  وعلى القارئ إثبات ذلك.

وقد اقترح "يول" Yule معامل آخر للافتران يسمى "معامل الالتلاف" ونرمز له بالرمز  $M_2$  "Coefficient of Colligation" حيث:

$$(4. 13. 38): M_2 = \left[ 1 - \sqrt{b_1 a_2 / a_1 b_2} \right] + \left[ 1 + \sqrt{b_1 a_2 / a_1 b_2} \right] \\ = \frac{\sqrt{a_1 b_2} - \sqrt{b_1 a_2}}{\sqrt{a_1 b_2} + \sqrt{b_1 a_2}}$$

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاقتران

ويمكن إثبات أن:

$$(4. 13. 39): M_1 = 2M_2 / [1 + M_2^2]$$

ومعامل الاختلاف  $M_2$  يحقق نفس مواصفات معامل الاقتران  $M_1$  فهو يساوى الصفر فى حالة الاستقلال ويساوى (+1) فى حالة الاقتران الموجب الكامل ويساوى (-1) فى حالة عدم الاقتران (أى فى حالة الاقتران السالب الكامل) وبالتالي فإن استخدامه لا يضيف جديد.

ويوجد معامل ثالث للاقتران نرمز له بالرمز  $M_3$  ونسميه بـ "معامل ارتباط الصفات" هو:

$$(4. 13. 40): M_3 = \frac{(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}} \\ = \frac{ND}{\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}}$$

حيث  $N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$  و  $D$  كما فى (4. 13. 36).

ومعامل الاقتران  $M_3$  يساوى الصفر عندما  $D = 0$  أى فى حالة الاستقلال ويساوى (+1) عندما  $a_2 = 0$  و  $b_1 = 0$  أى فى حالة الاقتران الكامل ويساوى (-1) عندما  $a_1 = 0$  و  $b_2 = 0$  أى فى حالة عدم الاقتران الكامل. والفرق بين المعامل  $M_3$  والمعاملين  $M_1$  و  $M_2$  هو أن  $M_3$  يساوى (+1) عندما يتلائم تكرار فى الجدول  $(2 \times 2)$  أى عندما كل من  $a_2$  و  $b_1$  يساوى الصفر بينما كل من  $M_1$  و  $M_2$  يساوى (+1) عندما يتلائم تكرار واحد على الأقل من التكرارين  $a_2$  و  $b_1$ . كما أن  $M_3$  يساوى (-1) عندما يتلائم التكرارين  $a_1$  و  $b_2$  معاً فى حين أن كل من  $M_1$  و  $M_2$  يساوى (-1) عندما يتلائم واحد على الأقل من التكرارين  $a_1$  و  $b_2$ .

ملاحظة (4 - 13 - 7 ب): معامل الاقتران  $M_3$  المعطى بالعلاقة (4. 13. 40) مع أنه يقيس الاقتران بين ظاهرتين وصفتين إلا أن له نفس صيغة معامل الارتباط رباعى النمى المعطى بالعلاقة (4. 13. 23b) الذى يقيس الارتباط بين ظاهرتين كميتين من جدول  $(2 \times 2)$ . لذلك أطلقنا على معامل الاقتران  $M_3$  اسم "معامل ارتباط الصفات".

ملاحظة (4 - 13 - 7 ج): نلاحظ فى تقديمنا لمعاملات الاقتران، عندما يكون معامل الاقتران مساوياً للصفر نقول أن الصفتين A و B "مستقلتان" وهذا اللفظ لنا تحفظ

## الفصل الرابع - الاتحاد والارتباط والاقتران

عليه، كما نذكرنا قبل ذلك في حالة الارتباط في ملاحظة (3 - 8 ب)، حيث ذكرنا أنه قد تكون هناك علاقة من نوع ما بين متغيرين كميين وبالرغم من ذلك يكون معامل الارتباط بينهما صفر. لذلك عندما يكون معامل الارتباط مساوياً للصفر نقول أن المتغيران غير مرتبطان ولا نقول مستقلان ولهذا فإننا نفضل عندما يكون معامل الاقتران مساوياً للصفر أن نقول أن الظاهرتان غير مقترنتان ولا نقول مستقلتان ولكننا استخدمنا لفظ غير مقترنتان للدلالة على الاقتران السالب عندما يكون معامل الاقتران سالب لذلك لا يمكن استخدام نفس اللفظ للدلالة على الحالة التي يكون فيها معامل الاقتران مساوياً للصفر. لذلك فإننا في الحالة التي يكون فيها معامل الاقتران مساوياً للصفر نقول أن الظاهرتان مستقلتان تجاوزاً حتى لا نستخدم لفظ "عدم الاقتران" الذي نستخدمه في حالة الاقتران السالب. لهذا عندما يكون معامل الاقتران مساوياً للصفر لا يكون معنى ذلك أن الظاهرتان لا توجد بينهما علاقة من أي نوع ولكن عندما لا توجد علاقة من أي نوع بين الظاهرتان يكون معامل الاقتران بينهما مساوياً للصفر.

### (4 - 13 - 8) الاقتران الجزئي Partial Association:

معاملات الاقتران  $M_1$  و  $M_2$  و  $M_3$  التي قدمناها في البند السابق تقيس شدة الاقتران (أو التلازم) بين صفتين بصورة عامة. ولكن أحياناً يكون الاقتران بين صفتين (A و B مثلاً) متأثراً باقتران كل منهما بصفة ثالثة C. وفي هذه الحالة إذا كان معامل الاقتران  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) بين A و B كبيراً فليس معنى هذا أن شدة الاقتران بين A و B عالية وإنما قد يكون السبب في ذلك هو أن A مقترنة مع C وكذلك B مقترنة مع C وأن اقتران كل منهما مع C كان له أثر كبير في وجود هذا الاقتران العالي بين A و B في حين أنه في غياب الصفة C قد يكون الاقتران بين A و B ليس بهذه القوة. لذلك فإننا نكون في حاجة إلى إيجاد معامل الاقتران بين A و B مع تحديد أثر C على هذا الاقتران. ونعبر عن ذلك بلغة الإحصاء قائلين: أننا في حاجة إلى إيجاد الاقتران بين A و B بشرط تثبيت أثر C، وذلك يمكن إجراءه بتقسيم المجتمع الكلي إلى فئتين كبيرتين هما الفئة التي تظهر في مفرداتها للصفة C (أي الفئة C) والفئة التي لا تظهر في مفرداتها للصفة C (أي الفئة  $\bar{C}$ )، ثم نحسب معامل الاقتران بين الصفتان A و B في كل من الفئتين C و  $\bar{C}$  على حدة.

وهذا نعبر عنه بلغة الإحصاء بالقول أننا نوجد معامل الاقتران بين الصفتين A و B في المجتمعين الجزئيين C و  $\bar{C}$  وذلك باعتبار أن الفئة C مجتمع جزئي أي جزء من المجتمع الكلي وكذلك  $\bar{C}$ . ونسمى معامل الاقتران في هذه الحالة بـ "معامل الاقتران الجزئي" Coefficient of Partial Association ونرمز لمعامل الاقتران بين A و B في الفئة C (أو في المجتمع الجزئي C) بالرمز  $M_1(AB.C)$  وفي المجتمع الجزئي  $\bar{C}$  بالرمز  $M_1(AB.\bar{C})$  ونذكر لجميع قيم  $i = 1, 2, 3$ . ولتوضيح ذلك بمثال عملي، نفرض أننا نرغب في دراسة أثر التطعيم بمصل معين على مقاومة الماشية لمرض معين، علماً بأن

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

الماشية إما أن تكون موجودة في جمعيات متخصصة في تربية الماشية وبالتالي تخضع لنظام غذائي جيد وإما أن تكون موجودة عند الفلاح العادي في حظيرة منزله وبالتالي تخضع لنظام غذائي أقل جودة من تلك الموجودة في جمعيات تربية الماشية. فلو أحضرنا 100 رأس من الماشية منها 60 رأس من الجمعيات المتخصصة في تربية الماشية و 40 رأس من الماشية الموجودة عند الفلاحين العاديين في حظائر منازلهم، ثم طعمنا نصف الماشية المأخوذة من الجمعيات وكذلك نصف الماشية المأخوذة من عند الفلاحين بالمصل المراد اختباره وتركنا النصف الآخر بدون تطعيم. وبعد ذلك حقنا الماشية المائة جميعها بالخاصة للاختبار بجرعة بها ميكروب المرض الذي صنع المصل من أجل مقاومته. وبعد فترة تم فحص الماشية كلها لتحديد الماشية التي قاومت المرض ولم تصب به وتلك التي أصيبت ولم تستطع مقاومة المرض، وذلك لبيان أثر المصل المخبر على مقاومة الإصابة بهذا المرض. فلو رمزنا للماشية التي تم تطعيمها بالمصل بالرمز A وتلك التي لم يتم تطعيمها بالرمز  $\bar{A}$  ولماشية الجمعيات بالرمز B وللماشية المأخوذة من منازل الفلاحين بالرمز  $\bar{B}$  وللماشية التي قاومت الإصابة بالرمز C وتلك التي أصيبت بالرمز  $\bar{C}$ . سنجد أن لدينا ثلاث صفات هي A للتطعيم و B (التغذية) و C (مقاومة الإصابة) ونرغب في إيجاد معامل الافتران بين أثر التطعيم ومقاومة المرض أى بين A و C. فلو أهملنا التفرقة بين الماشية المأخوذة من جمعيات تربية الماشية وتلك المأخوذة من منازل الفلاحين واعتبرنا أنهما مجتمع واحد فإن معامل الافتران في هذا المجتمع بين A و C لا يعبر تمامًا عن العلاقة بين التطعيم ومقاومة المرض وذلك لأن جانب كبير من مقاومة المرض بالنسبة لماشية جمعيات تربية الماشية قد يكون راجعاً لحالتها الصحية الجيدة نتيجة للتغذية الجيدة التي تتلقاها وليس بسبب التطعيم وحده. لذلك لكي يكون معامل الافتران بين A و C معبراً عن أثر التطعيم وحده على مقاومة المرض لابد من تثبيت أثر التغذية (الصفة B) وذلك بحساب معامل الافتران بين A و C في المجتمع الجزئي B أى في مجتمع ماشية الجمعيات وهو معامل الافتران الجزئي بين A و C مع تثبيت أثر B ونرمز له بالرمز  $M_i(AC.B)$ . وكذلك معامل الافتران بين A و C في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$  أى  $M_i(AC.\bar{B})$ . كما يمكن إيجاد معامل الافتران بين أثر التغذية B ومقاومة المرض C مع تثبيت أثر التطعيم A ونرمز له بالرمز  $M_i(BC.A)$ ، وكذلك يمكن إيجاد  $M_i(BC.\bar{A})$  وبصورة مشابهة للعلاقة (34، 13، 4). نقول أن الصفتان A و C مقترنتان (أو مقترنتان لقران موجب) في المجتمع الجزئي B إذا كانت:

$$(4. 13. 41): \frac{\langle a b \rangle \langle c b \rangle}{\langle b \rangle} > \langle a c b \rangle$$

حيث  $\langle a c b \rangle$  يمثل عدد المفردات التي تحمل الصفات A و B و C في آن واحد و  $\langle a b \rangle$  عدد المفردات التي تحمل الصفتان A و B و  $\langle c b \rangle$  عدد المفردات التي تحمل الصفتان B و C و  $\langle b \rangle$  عدد المفردات التي تحمل الصفة B وذلك في المجتمع كله.

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

وبأسلوب مماثل لما هو متبع في حالة صفتين يمكن تكوين جدول افتراض  $(2 \times 2)$  في حالة المجتمع الجزئي B مشابه لجدول  $(4 - 13 - 7)$  أ في الصورة التالية:

جدول  $(4 - 13 - 8)$  أ

الجدول  $(2 \times 2)$  في المجتمع الجزئي B

الصفة Attribute	C B	$\bar{C} B$	$\Sigma$
A B	«a c b»	«a $\bar{c}$ b»	«a b»
$\bar{A} B$	« $\bar{a}$ c b»	« $\bar{a}$ $\bar{c}$ b»	« $\bar{a}$ b»
$\Sigma$	«c b»	« $\bar{c}$ b»	«b»

وبمقارنة الجدول السابق بالجدول  $(4 - 13 - 7)$  أ نجد أن الحرف C الممثل للصفة C مكتوب بدل الحرف B الممثل للصفة B مع إضافة الصفة B إلى رموز الصفات بعد إجراء هذا التعديل في الصف الأول والعمود الأول. كما أن العدد b الممثل لعدد مرات ظهور الصفة B في المجتمع مضاف إلى جميع رموز أعداد الصفات داخل الأقواس «» في باقى خلايا الجدول، حيث أن مجتمع الجدول السابق هو المجتمع الجزئي B ولذلك فإن العدد «b» في الجدول السابق يقابل العدد N في جدول  $(4 - 13 - 7)$  أ. ويمكن بصورة مشابهة للجدول  $(4 - 13 - 7)$  ب وضع الجدول السابق في الصورة التالية:

جدول  $(4 - 13 - 8)$  ب

الجدول  $(2 \times 2)$  في المجتمع الجزئي B

الصفة Attribute	C B	$\bar{C} B$	$\Sigma$
A B	$a_1(b)$	$c_1(b)$	$a_1(b) + c_1(b)$
$\bar{A} B$	$a_2(b)$	$c_2(b)$	$a_2(b) + c_2(b)$
$\Sigma$	$a_1(b) + a_2(b)$	$c_1(b) + c_2(b)$	«b»

## الفصل الرابع - الاحدال والارتباط والافتران

وبأسلوب مماثل للعلاقة (4. 13. 37) يمكن تعريف معامل الافتران الجزئى بين الصفتان A و C فى المجتمع الجزئى B (أى مع تحديد أثر B) من جدول (4 - 13 - 8 ب) فى الصورة التالية:

$$(4. 13. 42): M_1(AC \cdot B) = \frac{a_1(b) \cdot c_2(b) - c_1(b) \cdot a_2(b)}{a_1(b) \cdot c_2(b) + c_1(b) \cdot a_2(b)}$$

ومعامل الائتلاف الجزئى بين A و C فى المجتمع الجزئى B فى الصورة التالية:

$$(4. 13. 43): M_2(AC \cdot B) = \frac{\sqrt{a_1(b) \cdot c_2(b)} - \sqrt{c_1(b) \cdot a_2(b)}}{\sqrt{a_1(b) \cdot c_2(b)} + \sqrt{c_1(b) \cdot a_2(b)}}$$

كما يمكن إثبات أن:

$$(4. 13. 44): M_1(AC \cdot B) = 2M_2(AC \cdot B) / [1 + M_2^2(AC \cdot B)]$$

كما يمكن إيجاد معامل الارتباط الجزئى بين A و C فى المجتمع الجزئى B فى الصورة التالية:

$$(4. 13. 45): M_3(AC \cdot B) = \frac{a_1(b) \cdot c_2(b) - c_1(b) \cdot a_2(b)}{\sqrt{[a_1(b) + a_2(b)][c_1(b) + c_2(b)][a_1(b) + c_1(b)][a_2(b) + c_2(b)]}}$$

ومعاملات الافتران الجزئية السابقة لها نفس خواص معاملات الافتران  $M_1, M_2, M_3$  المعطاة بالعلاقات (4. 13. 37, 38, 40) مع اعتبار أن المجتمع الكلى هو المجتمع الجزئى B كما أن لها نفس الصيغ. ونقدم فيما يلى المثال التوضيحي التالى.

**مثال (4 - 13 - 8):** فى تجربة لاختبار التطعيم بمصل جديد فى مقاومة إصابة الماشية بمرض معين تم إحصاء 100 رأس من الماشية (الأبقار مثلاً) منها 60 رأس من جماعات تربية الماشية وهى ماشية معروف عنها أنها تخضع لنظام غذائى جيد و40 رأس من الماشية الموجودة فى حظائر منازل الفلاحين ومعلوم أنها تتلقى نظام غذائى عادى. وتسم تطعيم نصف ماشية الجماعات ونصف ماشية الفلاحين بهذا المصل وبعد فترة معينة تم حقن الماشية جميعها بجرعة بها ميكروب المرض الذى يقاومه هذا المصل وبعد فترة أخرى محددة تم فحص الماشية جميعها وتحديد الماشية التى أصيبت بالمرض وتلك التى قاومت الإصابة والسؤال الآن: هل يمكن أن تكون مقاومة الماشية للمرض سببها الوحيد هو التطعيم بالمصل الجديد؟ أم أن المقاومة تعود إلى سببين أحدهما المصل الجديد والثانى الحالة الصحية الجيدة لماشية الجماعات نتيجة للتغذية الجيدة؟ وهل يمكن تحديد مساهمة كل من هذين السببين فى المقاومة؟.



## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاقتران

ليبين ذلك نرمز لماشية الجمعيات التي تخضع لنظام غذائي جيد بالرمز B و لماشية الفلاحين التي تتلقى الغذاء العادي بالرمز  $\bar{B}$  و للماشية التي تم تطعيمها بالمصل الجديد بالرمز A و لتلك التي لم يتم تطعيمها بالرمز  $\bar{A}$  و للماشية التي قاومت الإصابة بالمرض بالرمز C و لتلك التي أصيبت ولم تقاوم بالرمز  $\bar{C}$  وبالتالي يكون لدينا الفئات الثمانية التالية:

$$ABC, AB\bar{C}, \bar{A}BC, \bar{A}B\bar{C}, A\bar{B}C, A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

حيث ABC تمثل ماشية تم تطعيمها وتخضع لنظام غذائي جيد وقاومت الإصابة و  $AB\bar{C}$  تمثل ماشية تم تطعيمها وتخضع لنظام غذائي جيد ولم تقاوم الإصابة ... وهكذا لباقي الفئات.

نفرض أننا وجدنا بعد فحص الماشية طبيباً أن أعداد الماشية في كل فئة من الفئات الثمانية السابقة كما يلي:

$$\langle a \ bc \rangle = 28, \langle a \ b\bar{c} \rangle = 2, \langle \bar{a} \ bc \rangle = 24$$

$$\langle \bar{a} \ b\bar{c} \rangle = 6, \langle a \ \bar{b}c \rangle = 17, \langle a \ \bar{b}\bar{c} \rangle = 3$$

$$\langle \bar{a} \ \bar{b}c \rangle = 14, \langle \bar{a} \ \bar{b}\bar{c} \rangle = 6$$

ويمكن من البيانات السابقة عمل الآتي:

أولاً: حساب معامل الاقتران (الكلي) بين التطعيم بالمصل الجديد ومقاومة الإصابة أي بين الصفتين A و C.

ثانياً: حساب معامل الاقتران (الكلي) بين نظام التغذية ومقاومة الإصابة أي بين الصفتين C و B.

ويتم إيجاد البندين السابقين أولاً وثانياً بتكوين جدول على غرار أي من الجدولين (4 - 13 - 7 أ و ب).

ثالثاً: إيجاد معامل الاقتران الجزئي بين التطعيم بالمصل الجديد ومقاومة الإصابة في مجتمع التغذية الجيدة (المجتمع الجزئي B) أي معامل الاقتران الجزئي  $M(AB \cdot C)$ .

رابعاً: إيجاد معامل الاقتران الجزئي بين التطعيم بالمصل الجديد ومقاومة الإصابة في مجتمع التغذية العادية (المجتمع الجزئي  $\bar{B}$ ) أي معامل الاقتران الجزئي  $M(AC \cdot \bar{B})$ .

#### الفصل الرابع - الاحترار والارتباط والافتقار

ويتم إيجاد البندين ثالثاً ورابعاً بتكوين جدول لكل معامل على غرار أى من الجدولين (4 - 13 - 8 أ وب).

أولاً: معامل الافتقار بين A و C (بين التطعيم ومقاومة الإصابة):

لتكوين جدول على غرار الجدول (4 - 13 - 7 أ) نحتاج لمعرفة التكرارات التالية:

$$«a c» , «a \bar{c}» , «\bar{a} c» , «\bar{a} \bar{c}»$$

وهذه يمكن حسابها من التكرارات الثمانية السابقة:

$$«a c» = «a b c» + «a \bar{b} c» = 45$$

$$«a \bar{c}» = «a b \bar{c}» + «a \bar{b} \bar{c}» = 5$$

$$«\bar{a} c» = «\bar{a} b c» + «\bar{a} \bar{b} c» = 38$$

$$«\bar{a} \bar{c}» = «\bar{a} b \bar{c}» + «\bar{a} \bar{b} \bar{c}» = 12$$

من هذه البيانات نجد أن نسبة الماشية التي قاومت الإصابة بين الماشية التي تم تطعيمها تساوى:

$$\frac{«a c»}{«a»} = \frac{45}{50} = 90 \%$$

وهذا يدل على وجود افتقار موجب بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C. كما أن نسبة الماشية التي قاومت الإصابة بين الماشية التي لم يتم تطعيمها تساوى:

$$\frac{«\bar{a} c»}{«\bar{a}»} = \frac{38}{50} = 76 \%$$

مما يدل على أن مقاومة الإصابة نسبتها أعلى في المجتمع الجزئى للماشية التي تم تطعيمها عن نفس النسبة في المجتمع الجزئى للماشية التي لم يتم تطعيمها، وهذا يدل على وجود افتقار موجب بين التطعيم ومقاومة الإصابة. ونبدأ الآن بإعداد جدول الافتقار بين A و C لحساب معامل الافتقار بين التطعيم ومقاومة الإصابة. ويمكن وضع البيانات السابقة في الجدول التالي، على غرار جدول (4 - 13 - 7 ب)

الصفة	C	$\bar{C}$	$\Sigma$
A	45	5	50
$\bar{A}$	38	12	50
$\Sigma$	83	17	100

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاقتران

إن معامل الاقتران  $M_1$  ومعامل الائتلاف  $M_2$  ومعامل الارتباط  $M_3$  بين الصفتين A و C حسب العلاقات (4. 13. 37, 38, 40) هي:

$$M_1 = \frac{45 \times 12 - 5 \times 38}{45 \times 12 + 5 \times 38} = 0.4795$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{45 \times 12} - \sqrt{5 \times 38}}{\sqrt{45 \times 12} + \sqrt{5 \times 38}} = 0.2554$$

$$M_3 = \frac{45 \times 12 - 5 \times 38}{\sqrt{83 \times 17 \times 50 \times 50}} = 0.1864$$

نلاحظ في المعاملات الثلاثة السابقة أن الاقتران بين التطعيم ومقاومة الإصابة موجب.

ثانياً: معامل الاقتران بين B و C (بين نظام التغذية ومقاومة الإصابة):

ومثل ما اتبعناه في أولا نجد أن:

$$\langle bc \rangle = 52, \langle \bar{b}c \rangle = 31, \langle b\bar{c} \rangle = 8, \langle \bar{b}\bar{c} \rangle = 9$$

ومن هذه البيانات يتضح أن نسبة الماشية التي قاومت الإصابة بين الماشية الجيدة التغذية هي:

$$\frac{\langle bc \rangle}{\langle b \rangle} = \frac{52}{60} = 86.67 \%$$

في حين أن نسبة الماشية التي قاومت الإصابة بين الماشية العادية التغذية هي:

$$\frac{\langle \bar{b}c \rangle}{\langle \bar{b} \rangle} = \frac{31}{40} = 77.5 \%$$

نبدأ الآن بإعداد جدول لحساب معامل الاقتران بين المقارنة والتغذية الجيدة ويمكن وضع البيانات السابقة في الجدول التالي على غرار جدول (4 - 13 - 7 ب):

الصفة	C	$\bar{C}$	$\Sigma$
B	52	8	60
$\bar{B}$	31	9	40
$\Sigma$	83	17	100

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والاقتران

وتكون المعاملات الثلاثة  $M_1, M_2, M_3$  بين B و C حسب العلاقات  
كما يلي: (4. 13. 37, 38, 40)

$$M_1 = \frac{52 \times 9 - 31 \times 8}{52 \times 9 + 31 \times 8} = 0.3073$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{52 \times 9} - \sqrt{31 \times 8}}{\sqrt{52 \times 9} + \sqrt{31 \times 8}} = 0.1574$$

$$M_3 = \frac{52 \times 9 - 31 \times 8}{\sqrt{83 \times 17 \times 60 \times 40}} = 0.1196$$

ونلاحظ في المعاملات الثلاثة السابقة أن الاقتران بين نظام التغذية B ومقاومة المرض C موجب ولكنه أقل من الاقتران بين التطعيم A والمقاومة C. ويمكن عمل المقارنة التالية بين البندين أولاً وثانياً:

B و C	C و A
$M_1 = 0.3073$	$= 0.4795$
$M_2 = 0.1574$	$= 0.2554$
$M_3 = 0.1196$	$= 0.1864$

وهذا يوضح أن الاقتران بين التطعيم A والمقاومة C أقوى من الاقتران بين التغذية B والمقاومة C حسب المعاملات الثلاثة.

ثالثاً: معامل الاقتران الجزئي بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C في مجتمع التغذية الجيدة B:

للحصول على معامل الاقتران الجزئي  $M(AC \cdot B)$  نحتاج لتكوين جدول مثل جدول (4 - 13 - 8) بين A و C مع تثبيت B باستخدام التكرارات الثمانية التي بدأنا بها. ولكن قبل إعداد الجدول نلاحظ الآتي:

في مجتمع ماشية للجمعيات المغذية تغذية جيدة (المجتمع الجزئي B) نجد أن نسبة الماشية التي تم تطعيمها وقاومت الإصابة ABC بين كل الماشية التي قاومت الإصابة BC تساوي:

$$\frac{\text{«a bc»}}{\text{«b c»}} = \frac{28}{52} = 53.85\%$$

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

(أ) أى أن 53.58% من الماشية التى قاومت الإصابة فى المجتمع الجزئى B كانت من الماشية التى تم تطعيمها وبالتالي فإن 46.15% فقط من الماشية التى قاومت الإصابة كانت من الماشية التى لم يتم تطعيمها. كما أن نسبة الماشية التى تم تطعيمها ولم تقاوم الإصابة من بين كل الماشية التى لم تقاوم الإصابة فى المجتمع الجزئى B تساوى:

$$\frac{\langle a \bar{b} \bar{c} \rangle}{\langle b \bar{c} \rangle} = \frac{2}{8} = 25\%$$

(ب) أى أن 25% من الماشية التى لم تقاوم الإصابة فى المجتمع الجزئى B كانت من الماشية التى تم تطعيمها وبالتالي فإن 75% من الماشية التى لم تقاوم الإصابة كانت من الماشية التى لم يتم تطعيمها.

من أ و ب نلاحظ أن الافتراض بين التطعيم ومقاومة الإصابة فى المجتمع الجزئى (B) افتراض موجب. ونحاول الآن حساب معامل الافتراض بتكوين جدول الافتراض كما يلى:

الصفة	BC	$\overline{BC}$	$\Sigma$
AB	28	2	30
$\overline{A}B$	24	6	30
$\Sigma$	52	8	60

إذن معامل الافتراض الجزئى  $M_1(AC \cdot B)$  ومعامل الاختلاف الجزئى  $M_2(AC \cdot B)$  ومعامل الارتباط الجزئى  $M_3(AC \cdot B)$  بين الصفتين A و C فى المجتمع الجزئى B حسب العلاقات (4, 13, 42, 43, 45) هى:

$$M_1(AC \cdot B) = \frac{28 \times 6 - 2 \times 24}{28 \times 6 + 2 \times 24} = 0.5556$$

$$M_2(AC \cdot B) = \frac{\sqrt{28 \times 6} - \sqrt{2 \times 24}}{\sqrt{28 \times 6} + \sqrt{2 \times 24}} = 0.3033$$

$$M_3(AC \cdot B) = \frac{28 \times 6 - 2 \times 24}{\sqrt{52 \times 8 \times 30 \times 30}} = 0.1961$$

#### الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

رابعاً: معاميل الافتران بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C في مجتمع التغذية العادية  $\bar{B}$ :

(جـ) نسبة الماشية التي تم تطعيمها وقاومت الإصابة  $A\bar{B}C$  بين كل الماشية التي قاومت الإصابة  $\bar{B}C$  في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$  هي:

$$\frac{\langle a\bar{b}c \rangle}{\langle \bar{b}c \rangle} = \frac{17}{31} = 54.84\%$$

مما يدل على وجود افتران موجب بين A وC في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$ .

(د) نسبة الماشية التي تم تطعيمها ولم تقاوم الإصابة  $A\bar{B}\bar{C}$  بين كل الماشية التي لم تقاوم الإصابة  $\bar{B}\bar{C}$  في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$  هي:

$$\frac{\langle a\bar{b}\bar{c} \rangle}{\langle \bar{b}\bar{c} \rangle} = \frac{3}{9} = 33.33\%$$

وبالتالي فإن 66.67% من الماشية التي لم تقاوم الإصابة كانت من المواشي غير المطعمة في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$ .

من جـ و د نلاحظ أن للتطعيم A ومقاومة الإصابة C في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$  بينها افتران موجب. ونحاول الآن حساب معاميل هذا الافتران من الجدول التالي:

الصفة	$\bar{B}C$	$\bar{B}\bar{C}$	$\Sigma$
$A\bar{B}$	17	3	20
$\bar{A}\bar{B}$	14	6	20
$\Sigma$	31	9	40

إن معاميل الافتران الجزئي  $M_1(AC \cdot \bar{B})$  ومعاميل الاختلاف الجزئي  $M_2(AC \cdot \bar{B})$  ومعاميل الارتباط الجزئي  $M_3(AC \cdot \bar{B})$  بين الصفتين A وC في المجتمع الجزئي  $\bar{B}$  حسب العلاقات (4، 13، 42، 43، 45) هي:

#### الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

$$M_1(AC \cdot \bar{B}) = \frac{17 \times 6 - 3 \times 14}{17 \times 6 + 3 \times 14} = 0.4167$$

$$M_2(AC \cdot \bar{B}) = \frac{\sqrt{17 \times 6} - \sqrt{3 \times 14}}{\sqrt{17 \times 6} + \sqrt{3 \times 14}} = 0.2183$$

$$M_3(AC \cdot \bar{B}) = \frac{17 \times 6 - 3 \times 14}{\sqrt{31 \times 9 \times 20 \times 20}} = 0.1796$$

من ثالثاً ورابعاً يمكن وضع المعاملات  $M(AC \cdot B)$  و  $M(AC \cdot \bar{B})$  فى الشكل التالى للمقارنة بينها:

$$M_1(AC \cdot B) = 0.5556 \quad , \quad M_1(AC \cdot \bar{B}) = 0.4167$$

$$M_2(AC \cdot B) = 0.3033 \quad , \quad M_2(AC \cdot \bar{B}) = 0.2183$$

$$M_3(AC \cdot B) = 0.1961 \quad , \quad M_3(AC \cdot \bar{B}) = 0.1796$$

نلاحظ أن معامل الافتران الجزئى  $M_1$  (وكذلك  $M_2$  و  $M_3$ ) بين التطعيم A ومقاومة الإصابة C دائماً موجب مما يدل على وجود افتران بين A و C كما أن هذا الافتران أقوى عندما تكون التغذية جيدة لأنه فى المجتمع B أعلى منه فى المجتمع  $\bar{B}$ .

(4 - 13 - 9) الافتران فى جداول للتوافق  $(t \times s)$ :

Association in Contingency Tables  $(t \times s)$ :

نفرض أن لدينا مجتمع مشاهد عدد مفرداته N مصنف طبقاً لصفتين A و B وكانت الصفة A لها s من الأوجه  $A_1, A_2, \dots, A_s$  والصفة B لها t من الأوجه  $B_1, B_2, \dots, B_t$  أى أن كل من A و B مصنفات تصنيفاً متعدداً (ليس ثنائياً)، يكون لدينا  $t \times s$  من الفئات من النوع  $A_i B_j$  يمكن وضعها فى جدول يسمى بـ "جدول التوافق" Contingency Table مكون من t من الصفوف و s من الأعمدة فى الصورة التالية:

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتران

جدول (4 - 13 - 9 أ)

الصفة Attribute	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	...	A <sub>s</sub>	Σ
B <sub>1</sub>	«a <sub>1</sub> b <sub>1</sub> »	«a <sub>2</sub> b <sub>1</sub> »	...	«a <sub>s</sub> b <sub>1</sub> »	«b <sub>1</sub> »
B <sub>2</sub>	«a <sub>1</sub> b <sub>2</sub> »	«a <sub>2</sub> b <sub>2</sub> »	...	«a <sub>s</sub> b <sub>2</sub> »	«b <sub>2</sub> »
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B <sub>i</sub>	«a <sub>1</sub> b <sub>i</sub> »	«a <sub>2</sub> b <sub>i</sub> »	...	«a <sub>s</sub> b <sub>i</sub> »	«b <sub>i</sub> »
Σ	«a <sub>1</sub> »	«a <sub>2</sub> »		«a <sub>s</sub> »	N

$$N = \sum_1^s \text{«a}_i\text{»} = \sum_1^i \text{«b}_j\text{»}.$$

وجداول التوافق يعتبر تعميماً لجدول (2×2)، أي الجدول (4 - 13 - 7 أ).  
ولدراسة العلاقة بين A و B لا يكون الهدف معرفة الافتران بين وجه معين من أوجه A ووجه معين آخر من أوجه B ولكن الهدف هو معرفة شدة العلاقة بين الظاهرتين A و B ككل. ويتم هذا بحساب معامل يطلق عليه اسم "معامل التوافق" Coefficient of Contingency. وللوصول إلى هذا المعامل يمكن اتباع نفس الأسلوب الذي توصلنا به إلى معامل الافتران في جدول (2×2) في حالة التصنيف الثنائي للظاهرتين A و B كما يلي:

إذا كانت الصفتان A و B في المجتمع مستقلتان فإننا نتوقع الحصول على علاقة مماثلة تماماً للعلاقة (4. 13. 33) بالنسبة لأعداد المفردات «a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>» و «a<sub>i</sub>» و «b<sub>j</sub>» لجميع قيم i و j في جدول التوافق (4 - 13 - 9 أ) في الصورة التالية:

$$(4. 13. 46): \text{«a}_i \text{b}_j\text{»} = \text{«a}_i\text{»} \cdot \text{«b}_j\text{»} / N$$

فإذا وجدنا في جدول التوافق أن:

$$(4. 13. 47): \text{«a}_i \text{b}_j\text{»} > \text{«a}_i\text{»} \cdot \text{«b}_j\text{»} / N$$

كان معنى ذلك - كما في حالة جدول (2×2) تماماً - أن نسبة المفردات التي توجد بها الصفة A<sub>i</sub> في الفئة B<sub>j</sub> أكبر من تلك النسبة المتوقعة في المجتمع وبالتالي نقول أن الصفتان A<sub>i</sub> و B<sub>j</sub> مقترنتان. وبالعكس إذا كانت:

$$(4. 13. 48): \text{«a}_i \text{b}_j\text{»} < \text{«a}_i\text{»} \cdot \text{«b}_j\text{»} / N$$

نقول أن الصفتان A<sub>i</sub> و B<sub>j</sub> "غير مقترنتان". وكما هو واضح من العلاقة (4. 13. 46) إذا كانت الظاهرتان A و B ليستا مستقلتان تماماً فإن الأعداد «a<sub>i</sub> b<sub>j</sub>» و



## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

$\langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle / N$  لن تكون متساوية لجميع قيم  $i$  و  $j$  ومعنى هذا أن الفرق  $\langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle - \langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle / N$  لجميع قيم  $i$  و  $j$  يكون معبرا إلى حد ما عن استقلال الظاهرتين  $A$  و  $B$  فإذا استخدمنا للرمز:

$$(4. 13. 49a): D_{ij} = \langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle - \langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle / N$$

للدلالة على الفرق بين التكرار الفعلي  $\langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle$  في الجدول  $(t \times s)$  والتكرار المتوقع المناظر له في حالة استقلال الظاهرتين  $A$  و  $B$  سنجد أن هذا الفرق يحقق الخصائص التالية:

$$(4. 13. 49b): (1) D_{ij} \neq D_{ji}$$

$$(4. 13. 49c): (2) \sum_{j=1}^s D_{ij} = 0$$

لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, s$ .

ونلاحظ أن عدد الكميات (الفروق)  $D_{ij}$  التي يمكن تكوينها من جدول التوافق السابق تساوي  $t \times s$  كمية وطبقا للعلاقة (4. 13. 49c) نجد أن لكل  $i$  تكون  $(t-1)$  فقط من هذه الكميات مستقلة، وبالمثل لكل  $j$  تكون  $(s-1)$  منها فقط مستقلة. إذن العدد الكلي للكميات أو الفروق  $D_{ij}$  المستقلة يساوي  $(t-1)(s-1)$  فرقا.

مما سبق يتضح أن الكمية  $D_{ij}$  تعتبر مؤشرا للافتراض بين  $A_i$  و  $B_j$  لذلك فإن كل الفروق  $D_{ij}$  يمكن اعتبارها مؤشرا للافتراض بين الظاهرتين  $A$  و  $B$  ويكون الهدف الآن هو بناء معامل للافتراض من كل هذه الفروق مجتمعة لقياس الافتراض بين الظاهرتين  $A$  و  $B$ . ومن الواضح عدم إمكانية استخدام مجموع الكميات  $D_{ij}$  كمقياس للافتراض إذ أن مجموع هذه الكميات يساوي الصفر لذلك فإننا نهدف إلى بناء مقياس أو معامل يكون مستقلا عن إشارات الفروق  $D_{ij}$ . وقد قدم "بيرسون" Pearson معامل للافتراض يعتمد على كل الفروق  $D_{ij}$  مستحرة من الإشارة يسمى معامل "بيرسون" للتوافق Pearson's Coefficient of Contingency في الصورة التالية:

$$(4. 13. 50): C = \sqrt{X^2 / (X^2 + N)}$$

حيث

$$(4. 13. 51): X^2 = N \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^s D_{ij}^2 / \langle a_i \rangle \cdot \langle b_j \rangle$$

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

و  $D_0$  كما في (4. 13. 49a) و  $N$  هي مجموع التكرارات في جدول (4 - 13 - 9 أ) — جدول التوافق ( $t \times s$ ).

والجزء التريبيعي في العلاقة (4. 13. 50) يؤخذ بدون إشارة حيث أن المعامل  $C$  يوضح فقط مجرد أن الصفان  $A$  و  $B$  مستقلان أم غير مستقلان وبما أن الكمية  $X^2$  تمثل مجموع مربعات مقسوم على كميات موجبة فهي لا يمكن أن تكون سالبة وهي تساوي الصفر في حالة واحدة هي عندما تكون كل قيم  $D_{ij} = 0$  في هذه الحالة تكون الظاهرتان  $A$  و  $B$  مستقلتان وخلاف ذلك تكونا مقترنتان.

ملاحظة (4 - 13 - 9 أ): ذكرنا سابقاً أن صيغ المعاملات (ارتباط أو احتمال أو افتراض أو غير ذلك) التي تستخدم في حالة المجتمعات المشاهدة هي نفسها الصيغ التي تستخدم في حساب هذه المعاملات من بيانات العينات العشوائية. وعلى ذلك فإن كل الصيغ السابقة المقدمة في البندين (4 - 12) و (4 - 13) تستخدم للمجتمعات المشاهدة والعينات العشوائية على حد سواء.

ملاحظة (4 - 13 - 9 ب): لقد ذكرنا في ملاحظة (4 - 13 - 7 ب) أن معامل الارتباط  $M_3$  المعطى بالعلاقة (4. 13. 40) له نفس صيغة معامل الارتباط رباعي النسق  $r_4$  المعطى بالعلاقة (4. 13. 23b) ويمكن في حالة جدول ( $2 \times 2$ ) إثبات أن:

$$(4. 13. 52): M_3 = r_4^2 = X^2/N$$

حيث  $X^2$  كما في (4. 13. 51). وهذا متروك للقارئ لإثباته.

ومما هو جدير بالذكر أن العلاقة (4. 13. 50) نحتاج إلى جهد حسابي لإيجاد معامل التوافق  $C$  من الجدول (4 - 13 - 9 أ) — جدول التوافق — وذلك لاعتمادها على الكمية  $X^2$  التي تمثل دالة معقدة حسابياً إلى حد ما في الكميات « $a_i b_j$ » و « $a_i$ » و « $b_j$ »، لذلك يمكن وضع معامل التوافق  $C$  في صيغة أخرى تمكننا من استخدام الكميات « $a_i b_j$ » و « $a_i$ » و « $b_j$ » مباشرة مما يسهل العمل الحسابي، حيث يمكن وضع معامل بيرسون للتوافق المعطى بالعلاقة (4. 13. 50) في الصورة التالية:

$$(4. 13. 53): C = \sqrt{(W - N)/W}$$

حيث:

$$W = N \sum_{ij} [«a_i b_j»]^2 / «a_i» \cdot «b_j»$$

ومتروك إثبات ذلك للقارئ.

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

### (4 - 14) التمثيل الهندسي لمعاملات الارتباط الكلية والجزئية:

#### Geometrical Representation of Total and Partial Correlation Coefficients:

##### (1 - 14 - 4) التمثيل الهندسي لمعامل الارتباط الكلي:

لقد أثبتنا جبريا فيما سبق أن كل المعاملات الجزئية للارتباط والانحدار وكذلك تبانيات وتغايرات الأخطاء (أو البواقي) يتم تحديدها تملما بالتبانيات ومعاملات الارتباط (أو التبانيات) ومعاملات الانحدار) الكلية التي من الدرجة صفر. وقد يكون من المفيد والمرغوب فيه بيان ذلك هندسيا. فإذا كان لدينا عينة حجمها  $N$  من المشاهدات المأخوذة من مجتمع له توزيع متعدد عدد متغيراته  $p$  ( $N > p$ ) وكانت مشاهدات العينة كما يلي:

$$(4. 14. 1): [\mathbf{x}] = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \dots & x_{pN} \end{bmatrix}$$

فإن متجه متوسطات العينة (متوسطات صفوف المصفوفة السابقة) يكون:

$$(4. 14. 2): \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_{1t} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_{pt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{pmatrix}$$

ومصفوفة تبانيات العينة تكون:

$$(4. 14. 3): \hat{\mathbf{V}}_{pp} = \mathbf{S}_{pp} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})'$$

$$= \frac{1}{N} \left[ \sum_{t=1}^N (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j) \right]$$

$$= [s_{ij}]_{pp} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

حيث  $\hat{\mathbf{V}}$  هو تقدير تباني المجتمع و  $\mathbf{S}$  هي مصفوفة تغاير العينة.

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

ويكون تقدير التباين  $\sigma_i^2$  للمتغير رقم  $i$  من بيانات العينة هو:

$$(4. 14. 4): \hat{\sigma}_i^2 = s_{ii} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_{it} - \bar{x}_i)^2$$

حيث  $x_{it}$  هي الملاحظة رقم  $t$  في المتغير رقم  $i$  و  $\bar{x}_i$  هو متوسط المتغير رقم  $i$ .

كما أن تقدير معامل الارتباط للمتغيرين رقمي  $i$  و  $j$  هو:

$$(4. 14. 5): \hat{\rho}_{ij} = r_{ij} \\ = \frac{\sum_{t=1}^N (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\left[ \sum_{t=1}^N x_{it}^2 - N \bar{x}_i^2 \right] \left[ \sum_{t=1}^N x_{jt}^2 - N \bar{x}_j^2 \right]}} \\ = \hat{\sigma}_{ij} / \sqrt{\hat{\sigma}_{ii} \hat{\sigma}_{jj}} = s_{ij} / \sqrt{s_{ii} s_{jj}}$$

حيث  $\hat{\rho}_{ij}$  هو تقدير معامل الارتباط في المجتمع بين المتغيرين  $i$  و  $j$  و  $r_{ij}$  هو معامل الارتباط في العينة بين المتغيرين  $i$  و  $j$ .

والتمثيل الهندسي للماتم لهذه العينة يكون بدلالة صفوف المصفوفة  $[X]$  حيث يمكن كتابة مشاهدات العينة المعطاة بالعلاقة (4. 14. 1) في الصورة التالية:

$$(4. 14. 6): [X] = [x_{11}, \dots, x_{1N}, \dots, x_{p1}, \dots, x_{pN}] = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1N} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{iN} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{p1} & \dots & x_{pj} & \dots & x_{pN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix}$$

حيث:

$$(4. 14. 7): z_i = (x_{i1} \dots x_{iN}) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

يمثل مشاهدات للمتغير رقم  $i$  وهو الصف رقم  $i$  في المصفوفة  $[X]$  السابقة. أي

أن  $z_i$  متجه صفي و  $z_i'$  متجه عمودي. وفي بقية هذا البند سنرمز للمتجه الصف  $z_i$  بدون شرطة وعندما نضع شرطة يكون المتجه عمودي. المتجه الصف  $z_i$  يمكن اعتباره متجه Vector في الفراغ ذو الـ  $N$  بعدا إحداثيه رقم  $l$  عند إحدى نقطتي طرفيه هو  $x_{il}$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقرن

والطرف الآخر عند نقطة الأصل. وعلى هذا فإن مشاهدات العينة يمكن تمثيلها بدلالة  $p$  من المتجهات (أو  $p$  من النقط) في الفراغ الاقليدى ذو الـ  $N$  بعداً - نقطة وحيدة لكل متغير.

نفرض أن  $\underline{O} = [0 \dots 0]$  هي نقطة الأصل وأن المتجه  $\underline{\bar{z}}_i$  هو المتجه الذى نقطة بدايته  $\underline{O}$  ونقطة نهايته  $\underline{z}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN})$ .

إن مربع طول هذا المتجه (أى مربع البعد بين نقطة الأصل  $\underline{O}$  ونقطة النهاية  $(x_{i1}, \dots, x_{iN})$ ) هو:

$$(4. 14. 8): \|\underline{\bar{z}}_i\|^2 = \underline{\bar{z}}_i' \underline{\bar{z}}_i = \sum_{j=1}^N x_{ij}^2$$

( $\underline{\bar{z}}_i$  متجه صفى و  $\underline{z}_i$  متجه عمودى)

وإذا رمزنا إلى الزاوية بين المتجهين  $\underline{\bar{z}}_i$  و  $\underline{\bar{z}}_j$  بالرمز  $\theta$  - كما فى شكل (4 - 14) التالى - فيمكن إثبات أن جيب تمام الزاوية  $\theta$  هي:

$$(4. 14. 9): \cos \theta = \underline{\bar{z}}_i' \underline{\bar{z}}_j / \sqrt{(\underline{\bar{z}}_i' \underline{\bar{z}}_i) \cdot (\underline{\bar{z}}_j' \underline{\bar{z}}_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{jj} / \sqrt{\sum_{j=1}^N x_{ij}^2 \sum_{j=1}^N x_{jj}^2} = r_{ij}$$

ملاحظة (4 - 14 - 1): لو كانت مشاهدات المتغيرات مقبسة من مركزها (أى  $\sum x_{ij} = 0$ ) كانت الصيغة السابقة هي صيغة تقدير معامل الارتباط بين المتغير رقم  $i$  والمتغير رقم  $j$  والذي نرمز له بالرمز  $\hat{\rho}_{ij}$  أو  $r_{ij}$  أى أنه عندما تكون المتغيرات مقبسة من مراكزها يكون تقدير معامل الارتباط بين المتغيرين رقمى  $i$  و  $j$  هو:

$$(4. 14. 10): \hat{\rho}_{ij} = r_{ij} = \cos \theta \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

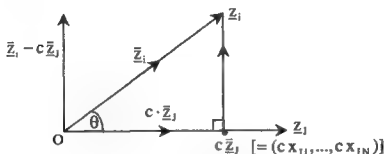
حيث  $\theta$  هي الزاوية المحصورة بين المتجهين  $\underline{\bar{z}}_i$  و  $\underline{\bar{z}}_j$ . كما أن تقدير تباين المتغير رقم  $i$  ( $\hat{\sigma}_i^2$ ) يكون معطى بالعلاقة:

$$(4. 14. 11): N \hat{\sigma}_i^2 = N s_i^2 = N s_{ii} = \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 = \underline{\bar{z}}_i' \underline{\bar{z}}_i \quad i = 1, 2, \dots, p$$

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والاقتران

والفترض أن المتغيرات مقيسة من مركزها لا يؤدي إلى نقص في عمومية النتائج إذ دائماً نصل من الحالة التي تكون فيها المتغيرات مقيسة من مراكزها إلى الحالة التي لا تكون فيها مقيسة من مراكزها (عندما  $\sum x_i \neq 0$ ) بكتابة  $x_{ij} - \bar{x}_i$  بدلاً من  $x_{ij}$ . ومع ذلك يمكن إعطاء تمثيل هندسي للحالة التي لا تكون فيها المتغيرات مقيسة من مراكزها حيث تكون صيغة  $r_{ij}$  كما في علاقة (4. 14. 5).

ونعود الآن إلى إثبات العلاقة (4. 14. 9). لو اخترنا العدد  $c$  بحيث يكون المتجه  $c \cdot \bar{z}_j$  متعامد على المتجه  $\bar{z}_i - c \cdot \bar{z}_j$  كما في الشكل التالي:



شكل (4 - 14) أ

إذن (من التعامد)  $c \cdot \bar{z}_j (\bar{z}_i - c \cdot \bar{z}_j)' = 0$  وبهذا يكون:

$$c = \frac{\bar{z}_i' \bar{z}_j}{\bar{z}_j' \bar{z}_j}$$

ومن الشكل السابق نجد أن  $\cos \theta$  تساوي طول المتجه  $c \bar{z}_j$  مقسوماً على طول المتجه  $\bar{z}_i$  أي أن:

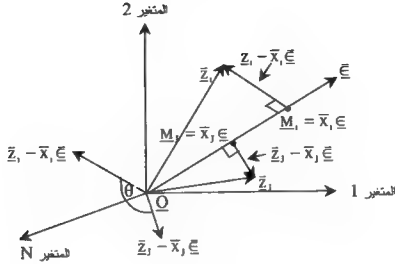
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{[c \bar{z}_j][c \bar{z}_j]'}}{\sqrt{\bar{z}_i' \bar{z}_i}} = \frac{\sqrt{c \bar{z}_j' c \bar{z}_j}}{\sqrt{\bar{z}_i' \bar{z}_i}}$$

وبالتعويض عن  $c$  نحصل على علاقة (4. 14. 9) وهو المطلوب إثباته.

ونقدم التمثيل الهندسي للحالة التي لا تكون فيها المتغيرات مقيسة من مراكزها فيما يلي:

نفرض أن الخط المستقيم  $\overline{OE}$  يمر بنقطة الأصل  $O$  والنقطة  $E = (1, 1, \dots, 1)$  وهو يسمى بالخط المتساوي الزوايا The Equiangular Line كما في الشكل التالي:

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والانتزاع



شكل (4 - 14 ب)

نفرض أن  $\underline{M}_i = \bar{x}_i \in$  و  $\underline{M}_i = \bar{x}_i \in$  نقطتان على الخط المتساوي الزوايا  $\underline{O}\in$ ، فسي هذه الحالة يكون الخطان  $\underline{M}_i \underline{z}_i$  و  $\underline{M}_i \underline{z}_i$  عموديان على الخط المتساوي الزوايا  $\underline{O}\in$ ، وذلك لأن أطوال القطع المستقيمة  $\underline{O}\underline{z}_i$  و  $\underline{O}\underline{M}_i$  و  $\underline{O}\underline{M}_i$  تحقق العلاقات التالية:

$$(\underline{O}\underline{z}_i)^2 = \sum_{i=1}^N x_{ii}^2, (\underline{O}\underline{M}_i)^2 = N \bar{x}_i$$

$$(\underline{M}_i \underline{z}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (x_{ii} - \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^N x_{ii}^2 - N \bar{x}_i^2$$

$$(\underline{O}\underline{z}_i)^2 = (\underline{M}_i \underline{z}_i)^2 + (\underline{O}\underline{M}_i)^2 \quad \text{أي أن:}$$

وطبقاً لنظرية فيثاغورث يكون الخط  $\underline{M}_i \underline{z}_i$  عمودى على الخط  $\underline{O}\underline{M}_i$  أى على الخط  $\underline{O}\in$ . وبالمثل يمكن إثبات أن الخط  $\underline{M}_i \underline{z}_i$  عمودى على الخط  $\underline{O}\in$ . إذن المتجهان  $\underline{z}_i - \bar{x}_i$  و  $\bar{x}_i \in$  متعامدان و  $\bar{x}_i \in$  هو مسقط المتجه  $\underline{z}_i$  على الخط المتساوي الزوايا  $\underline{O}\in$ . وينقل المتجهان  $\underline{z}_i - \bar{x}_i$  و  $\bar{x}_i \in$  بحيث أن كل منهما

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

تكون نقطة بدليته هي نقطة الأصل  $O$  فيكون الإحداثي رقم  $i$  للمتجه  $\bar{z}_i - \bar{x}_i \in$  هو  $(x_{ii} - \bar{x}_i)$  وللمتجه  $\bar{z}_j - \bar{x}_j \in$  هو  $(x_{ji} - \bar{x}_j)$  إذن مربع طول المتجه  $\bar{z}_i - \bar{x}_i \in$  يكون  $\sum_{i=1}^n (x_{ii} - \bar{x}_i)^2$  وهي نفس صيغة تقدير تبليين المتغير رقم  $i$  مضروباً في  $N$  من هذا يتضح أن تقدير تبليين المتغير رقم  $i$  يحقق العلاقة التالية:

$$(4.14.12): N \hat{\sigma}_i^2 = N s_i^2 = N s_{ii} = \sum_{i=1}^N (x_{ii} - \bar{x}_i)^2 \\ = (\bar{z}_i - \bar{x}_i \in) (\bar{z}_i - \bar{x}_i \in)' ; i = 1, 2, \dots, p.$$

كما أن جيب تمام الزاوية  $\theta$  المحصورة بين المتجهين  $\bar{z}_i - \bar{x}_i \in$  و  $\bar{z}_j - \bar{x}_j \in$  هو:

$$(4.14.13): \cos \theta = \frac{(\bar{z}_i - \bar{x}_i \in) (\bar{z}_j - \bar{x}_j \in)}{\sqrt{(\bar{z}_i - \bar{x}_i \in) (\bar{z}_i - \bar{x}_i \in)' \cdot (\bar{z}_j - \bar{x}_j \in) (\bar{z}_j - \bar{x}_j \in)'}} \\ = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{ii} - \bar{x}_i) (x_{ji} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_{ii} - \bar{x}_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^N (x_{ji} - \bar{x}_j)^2}} = r_{ij}$$

وهي نفس صيغة معامل الارتباط الكلي بين المتغير رقم  $i$  والمتغير رقم  $j$  والتي نرمز لها بالرمز  $r_{ij}$  أو  $\hat{\rho}_{ij}$ ، أي أن:

$$(4.14.14): \hat{\rho}_{ij} = r_{ij} = \cos \theta$$

حيث  $\theta$  هي الزاوية المحصورة بين المتجهين  $(\bar{z}_i - \bar{x}_i \in)$  و  $(\bar{z}_j - \bar{x}_j \in)$ .

ولكي نعتبر أن كل المتغيرات مقيسة من مراكزها نضع  $X_{ii} = x_{ii} - \bar{x}_i$  في هذه الحالة  $\sum_{i=1}^n X_{ii} = 0$  و  $\bar{X}_i = 0$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, p$  وهذا يوصلنا إلى الحالة



#### الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

السابقة التي حصلنا فيها على العلاقات (4. 14. 10) و (4. 14. 11). لذلك يمكن الوصول من الحالة التي نفترض فيها أن المتغيرات مقاسة من مركزها إلى الحالة التي لا يتحقق فيها هذا الفرض وبالعكس من خلال كتابة العلاقتين  $(x_{ii} - \bar{x}_i)$  و  $x_{ii}$  كل مكان الآخر. لهذا فإن هذا الفرض لا يؤدي إلى نقص في عمومية ما نتوصل إليه من نتائج بصفة عامة.

مما سبق يمكن القول أن كل العلاقات بين النقط  $(x_{i1}, \dots, x_{in})$  في الفراغ ذو الـ  $N$  بعداً يمكن أن توضع بدلالة أطوال المتجهات  $\bar{z}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) والزوايا المحصورة بين هذه المتجهات واستخدام حساب المثلثات لاشتقاق كل العلاقات التي سبق تقديمها في هذا الباب. وسنمعرض فيما يلي جانباً من هذه العلاقات التي سوف نحتاج إليها في توزيعات المعاينة فيما بعد.

#### (4-14-2) التمثيل الهندسي لمعامل الارتباط الجزئي:

نفرض أن النقطة:

$$(4. 14. 15a): \underline{Y}_{1h} = (Y_{11h}, \dots, Y_{1Nh})$$

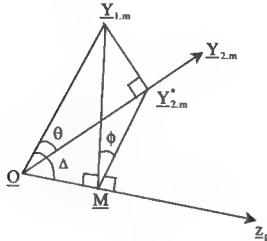
حيث  $h = 23 \dots p$ ، إحداثياتها هي الـ  $N$  مشاهدة للخطأ (أو البواقي)  $Y_{11,2..p}$  حيث:

$$(4. 14. 15b): Y_{11,2..p} = x_{11} - E(x_{11} | x_{21}, \dots, x_{p1}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

وطبقاً للعلاقة (4. 6. 14) يكون المتجه  $\bar{Y}_{1,2..p}$  (الذي نقطة بدايته نقطة الأصل  $O$  ونقطة نهايته  $\underline{Y}_{1,2..p}$ ) متعامداً على كل المتجهات  $\bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_p$  حيث  $\bar{Z}_i$  كما في (4. 14. 7)، ومن ثم متعامداً على الفراغ ذو الـ  $(p-1)$  بعداً المنشأ بواسطة Spanned by هذه المتجهات. ومتجهي الخطأ (أو متجهي البواقي)  $\bar{Y}_{1,2..p}$  و  $\bar{Y}_{1,m}$  حيث  $m = 34 \dots (p-1)$  التالي كل منهما متعامد على الفراغ الجزئي المنشأ بالمتجهات  $\bar{Z}_3, \dots, \bar{Z}_{(p-1)}$ . وجيب تمام الزاوية  $\theta$  المحصورة بين المتجهين  $\bar{Y}_{1,2..p}$  و  $\bar{Y}_{1,m}$  هو معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين الأول والثاني عند ثبات باقي المتغيرات، طبقاً لـ (4. 14. 10, 14)، أي أن:

$$(4. 14. 16): \hat{\rho}_{12,m} = r_{12,m} = \cos \theta.$$

#### الفصل الرابع - الإحدار والارتباط والافتقار



شكل (4 - 14) (→)

إذا كانت  $M$  هي نقطة تقاطع العمود الساقط من النقطة  $Y_{1,m}$  على المتجه  $\bar{Z}_p$  و  $Y'_{2,m}$  نقطة على المتجه  $\bar{Y}_{2,m}$  بحيث يكون المتجه  $\overrightarrow{Y'_{2,m}M}$  عمودى على  $\bar{Z}_p$  أيضاً. إذن المتجهان  $\overrightarrow{MY_{1,m}}$  و  $\overrightarrow{MY_{2,m}}$  كل منهما عمودى على الفراغ المنشأ بالمتجهات  $\bar{Z}_3, \bar{Z}_4, \dots, \bar{Z}_p$  وإذا رمزنا للزاوية بين المتجهين  $\overrightarrow{MY_{1,m}}$  و  $\overrightarrow{MY_{2,m}}$  بالرمز  $\phi$  فإن معامل الارتباط الجزئى بين المتغيرين الأول والثانى عند ثبات باقى المتغيرات هو:

$$(4. 14. 17): r_{12\ mp} = \cos \phi$$

يتضح من (4. 14. 16, 17) أنه للحصول على  $r_{12\ mp}$  بدلالة  $r_{12\ m}$  يجب الحصول على الزاوية  $\phi$  بدلالة الزاوية  $\theta$ .

ويمكن الآن إهمال العلامة \* الموجودة فى  $Y'_{2,m}$  ونكتبها  $Y_{2,m}$  بدون هذه العلامة، بتصوير تحريك النقطة  $Y'_{2,m}$  حتى تطبق على النقطة  $Y_{2,m}$  وذلك لتبسيط وسهولة الكتابة وهذا لن يؤثر على النتائج التى نتوصل إليها. ومن العلاقة بين أضلاع المثلث (أو من نظرية فيثاغورث) فى المثلث  $OY_{1,m}Y_{2,m}$  نعلم أن:

#### الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

$$(4. 14. 18): (\overline{Y_{1m} Y_{2m}})^2 = (\overline{O Y_{1m}})^2 + (\overline{O Y_{2m}})^2 - 2(\overline{O Y_{1m}})(\overline{O Y_{2m}})\cos\theta$$

ومن المثلث  $\underline{M Y_{1m} Y_{2m}}$ :

$$= (\overline{M Y_{1m}})^2 + (\overline{M Y_{2m}})^2 - 2(\overline{M Y_{1m}})(\overline{M Y_{2m}})\cos\phi$$

ومن المثلث القائم للزاوية  $\underline{O Y_{1m} M}$ :

$$(4. 14. 19): (\overline{O Y_{1m}})^2 = (\overline{OM})^2 + (\overline{M Y_{1m}})^2$$

ومن المثلث القائم للزاوية  $\underline{O Y_{2m} M}$ :

$$(4. 14. 20): (\overline{O Y_{2m}})^2 = (\overline{OM})^2 + (\overline{M Y_{2m}})^2$$

من (4. 14. 18, 19, 20) نجد أن:

$$(\overline{M Y_{1m}})(\overline{M Y_{2m}})\cos\phi = (\overline{O Y_{1m}})(\overline{O Y_{2m}})\cos\theta - (\overline{OM})^2$$

أى أن:

$$(4. 14. 21): \frac{(\overline{M Y_{1m}})}{(\overline{O Y_{1m}})} \cdot \frac{(\overline{M Y_{2m}})}{(\overline{O Y_{2m}})} \cos\phi = \cos\theta - \frac{(\overline{OM})}{(\overline{O Y_{1m}})} \cdot \frac{(\overline{OM})}{(\overline{O Y_{2m}})}$$

ولكن:

$$\frac{(\overline{M Y_{1m}})}{(\overline{O Y_{1m}})} = \sin\Delta$$

و

$$\frac{(\overline{OM})}{(\overline{O Y_{1m}})} = \cos\Delta$$

حيث  $\Delta$  هي الزاوية المحصورة بين المتجهين  $\overrightarrow{O Y_{1m}}$  و  $\overrightarrow{Z_p}$ . وبما أن المتجه  $\overrightarrow{O Y_{1m}}$  متعامد على الفراغ المنشأ بالمتجهات  $\overrightarrow{Z_1}, \dots, \overrightarrow{Z_{(p-1)}}$  فإن الزاوية المحصورة

## الفصل الرابع - الاحدار والارتباط والافتران

بين  $\overrightarrow{OY}_{1,m}$  و  $\vec{Z}_p$  لا تتغير إذا أسقطنا المتجه  $\vec{Z}_p$  عمودياً على الفراغ المشار إليه. وهذا يتحقق إذا استبدلنا المتجه  $\vec{Z}_p$  بالمتجه  $\vec{Z}_{p,m}$ .

وجيب تمام الزاوية  $\overrightarrow{OY}_{1,m}$  و  $\overrightarrow{OY}_{p,m}$  هو  $r_{1p,m}$  إذن:

$$(4. 14. 22): \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OY}_{1,m}} = r_{1p,m}$$

كما أن:

$$(4. 14. 23): \frac{(\overrightarrow{MY}_{1,m})}{(\overrightarrow{OY}_{1,m})} = \frac{\sqrt{(\overrightarrow{OY}_{1,m})^2 - (\overrightarrow{OM})^2}}{\overrightarrow{OY}_{1,m}} \\ = \sqrt{1 - \frac{(\overrightarrow{OM})^2}{(\overrightarrow{OY}_{1,m})^2}} = \sqrt{1 - r_{1p,m}^2}$$

وبالمثل:

$$(4. 14. 24): \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OY}_{2,m}} = r_{2p,m}$$

كما أن:

$$(4. 14. 25): \frac{\overrightarrow{MY}_{2,m}}{\overrightarrow{OY}_{2,m}} = \sqrt{1 - r_{2p,m}^2}$$

وبالتعويض عن (4. 14. 22, 23, 24, 25) وكذلك عن (4. 14. 17, 18) في (4. 14. 21) نجد أن:

$$\sqrt{1 - r_{1p,m}^2} \sqrt{1 - r_{2p,m}^2} r_{12,mp} = r_{12,m} - r_{1p,m} r_{2p,m}$$

إذن:

$$(4. 14. 26): r_{12,mp} = \frac{r_{12,m} - r_{1p,m} r_{2p,m}}{\sqrt{(1 - r_{1p,m}^2)(1 - r_{2p,m}^2)}}$$

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتراض

وهى نفس النتيجة (4. 10. 5) التى سبق الحصول عليها حيث  
 $q(12) = mp$  و  $q(12n) = q(12p) = m$  ,  $n = p$

ملاحظة (4 - 14 - 2 أ): إذا استخدما بيانات المجتمع بدلاً من بيانات العينة فإن كل الصيغ السابقة تظل صحيحة مع كتابة  $\rho$  بدلاً من  $r$  و  $\sigma$  بدلاً من  $s$  للحصول على صيغ لمعالم المجتمع مماثلة لصيغ إحصاءات العينة.

(4 - 14 - 3) التمثيل الهندسى لمعامل الارتباط المتعدد:

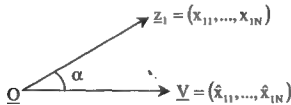
يمكن تمثيل معامل الارتباط المتعدد  $r_{1(2 \dots p)}$  هندسياً كما فعلنا فى حالة معامل الارتباط الجزئى فى البند (4 - 14 - 2) وذلك كما يلى:

نعلم من العلاقة (4. 11. 4) فى محمل الارتباط المتعدد أن:

$$(4. 14. 27): \hat{\rho}_{1(2 \dots p)} = r_{1(2 \dots p)} = \frac{E(x_1 \hat{x}_1)}{\sqrt{E(x_1^2)E(\hat{x}_1^2)}}$$

حيث  $\hat{x}_1$  (كما فى 4. 11. 1b) هو أفضل تقدير خطى (طبقاً لمبدأ المربعات الصغرى) يجمع  $\sigma_{1,2 \dots p}^2$  (تباين الباقي  $Y_{1,2 \dots p}$ ) أقل ما يمكن. أى يجعل المقدار  $E(x_1 - \hat{x}_1)^2$  نهاية صغرى. وبافتراض أن النقط  $\underline{O}, \underline{z}_1, \underline{z}_2, \dots, \underline{z}_p$  معرفة كما فى البند السابق (4 - 14 - 2) يمكن إنشاء فراغ ذو  $(p-1)$  بعداً من المتجهات  $\underline{Oz}_2, \dots, \underline{Oz}_p$  فإذا اخترنا نقطة  $\underline{V}$  فى الفراغ ذو الـ  $(p-1)$  بعداً بحيث يكون طول القطعة المستقيمة  $\underline{z}_1 \underline{V}$  أصغر ما يمكن، فإن هذا الاختيار يجعل الزاوية  $\alpha$  المحصورة بين المتجهين  $\underline{Oz}_1$  و  $\underline{OV}$  أصغر ما يمكن حيث:

$$(4. 14. 28): \underline{z}_1 = (x_{11}, \dots, x_{1N})$$



## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والاختيار

والاختيار الذى يحقق هذا الهدف هو أن تكون إحداثيات النقطة  $\underline{V}$  هي:

$$(4. 14. 29): \underline{V} = (\hat{x}_{11}, \dots, \hat{x}_{1j}, \dots, \hat{x}_{1N})$$

حيث  $\hat{x}_{1j}$  هي الملاحظة رقم  $j$  للمتغير  $\hat{x}_1$ .

ومن العلاقة (4. 11. 1b):

$$(4. 14. 30): \underline{V} = \left( \sum_{j=2}^p \beta_{1j, q(1j)} x_{1j}, \dots, \sum_{j=2}^p \beta_{1j, q(1j)} x_{1N} \right)$$

حيث  $\hat{x}_1$  كمافى (4. 11. 1b) و  $x_{1j}$  هي الملاحظة رقم  $j$  للمتغير  $x_1$ ،  
 $j = 1, 2, \dots, N$ ،  $J = 1, 2, \dots, p$

ومن العلاقة (4. 14. 27) والعلاقة (4. 14. 10) يتضح أن معامل الارتباط المتعدد  $r_{1(23..p)}$  هو جيب تمام الزاوية المصغرة  $\alpha$  المحصورة بين المتجهين  $\underline{\overrightarrow{OZ_1}}$  و  $\underline{\overrightarrow{OV}}$  أى  
 أن:

$$(4. 14. 31): \hat{\rho}_{1(23..p)} = r_{1(23..p)} = \cos \alpha$$

حيث  $\alpha$  هي الزاوية المحصورة بين المتجهين  $\underline{\overrightarrow{OZ_1}}$  و  $\underline{\overrightarrow{OV}}$ .

وحيث أن المتجه  $\underline{\overrightarrow{OV}}$  يقع فى الفراغ الجزئى ذو الـ  $(p-1)$  بعداً، إذن  $r_{1(23..p)}$  هو جيب تمام الزاوية المحصورة بين المتجه  $\underline{\overrightarrow{OZ_1}}$  والفراغ الجزئى ذو الـ  $(p-1)$  بعداً ذاته وذلك لأن خلاف ذلك لن تكون الزاوية نهاية صغرى.

فإذا كان  $r_{1(23..p)} (= \cos \alpha) = 0$  أى أن جيب تمام الزاوية بين  $\underline{\overrightarrow{OZ_1}}$  والفراغ الجزئى ذو الـ  $(p-1)$  بعداً مساوياً للصفر، يكون المتجه  $\underline{\overrightarrow{OV}}$  متعامداً على هذا الفراغ الجزئى وبذلك تكون  $x_1$  غير مرتبطة مع  $x_2, \dots, x_p$  وغير مرتبطة كذلك مع أى علاقة خطية فى هذه المتغيرات.

كذلك إذا كان  $r_{1(23..p)} (= \cos \alpha) = 1$  يكون المتجه  $\underline{\overrightarrow{OZ_1}}$  واقعا فى الفراغ الجزئى ذو  $(p-1)$  بعداً أى أن  $x_1$  تمثل علاقة خطية صحيحة فى المتغيرات  $x_2, \dots, x_p$ .

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

### تمارين الباب الرابع

(4 - 1): أثبت صحة العلاقات التالية:

(أ) العلاقة (4. 2. 4).

(ب) العلاقة (4. 2. 7).

(ج) العلاقة (4. 4. 12).

(4 - 2): العلاقة (4. 4. 14) توضح أن معامل الارتباط بين  $X$  و  $Y$  هو:  $\rho = \sqrt{1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}$

والعلاقة (4. 2. 15) توضح أن:  $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$ . بين أن العلاقتين متكافئتين

$$\text{أي أن: } \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}$$

(4 - 3): إذا كانت معادلة انحدار  $Y$  على  $X$  معطاة بالعلاقة  $Y = \alpha_2 + \beta_{21} X$  فاثبت أن:

$$\begin{aligned} E[Y - \alpha_2 - \beta_{21} X]^2 &= E[Y - m_2(X)]^2 \\ &+ E[m_2(X) - (\alpha_2 + \beta_{21} X)]^2 \\ \text{حيث } m_2(x) &= E(Y | x) \end{aligned}$$

[العلاقة السابقة هي العلاقة (4. 4. 18)]

(4 - 4): إذا كان  $(X_1, \dots, X_n)$  متغير عشوائي مشترك و  $u(X_2, \dots, X_n)$  دالة ما في

المتغيرات العشوائية  $X_2, \dots, X_n$  فاثبت أن:  $E[X_1 - u(x_2, \dots, x_n)]^2$  تكون نهاية صفري عندما:

$$u(x_2, \dots, x_n) = E(X_1 | x_2, \dots, x_n).$$

انظر العلاقة (4. 6. 1c).

## الفصل الرابع - الانحدار والارتباط والافتقار

(4 - 5): أوجد قيمة  $\beta_{1k.23\dots(k-1)(k+1)\dots n}$  لقيم  $k = 2, 3, \dots, n$  ، التى تجعل التوقع:

$$E[X_1 - \beta_{12.34\dots n} X_2 - \dots - \beta_{1n.23\dots(n-1)} X_n]^2$$

نهائية صغرى. أنظر العلاقات (4. 6. 9).

(4 - 6): أثبت صحة العلاقة (4. 7. 3).

(4 - 7): أثبت صحة العلاقة (4. 7. 6a).

(4 - 8): أثبت صحة العلاقة (4. 12. 3).

(9 - 9): فيما يلى المتوسطات الحسابية  $\bar{x}$  والانحرافات المعيارية  $\sigma$  ومعاملات

الارتباط الكلية  $\rho$  لثلاث متغيرات  $X_1, X_2, X_3$ .

$$\bar{x}_1 = 28.02 \quad ; \quad \sigma_1 = 4.42 \quad ; \quad \rho_{12} = 0.8$$

$$\bar{x}_2 = 4.91 \quad ; \quad \sigma_2 = 1.1 \quad ; \quad \rho_{13} = -0.4$$

$$\bar{x}_3 = 594 \quad ; \quad \sigma_3 = 85 \quad ; \quad \rho_{23} = -0.56$$

والمطلوب إيجاد:

(1) معاملات الارتباط الجزئية  $\rho_{23.1}$  و  $\rho_{13.2}$  و  $\rho_{12.3}$  باستخدام العلاقات

(4. 7. 6b) ثم باستخدام العلاقة (4. 10. 6) والتأكد من مطابقة النتائج.

(2) الانحرافات المعيارية (من الدرجة الثانية)  $\sigma_{1.23}$  و  $\sigma_{2.13}$  و  $\sigma_{3.12}$  باستخدام

العلاقة (4. 6. 17) ثم باستخدام العلاقات (4. 9. 1, 2, 3, 4) والتأكد من مطابقة النتائج.

(3) معادلة لحدار  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$ .

(4) معاملات الارتباط المتعددة  $\rho_{1(23)}$  و  $\rho_{2(31)}$  و  $\rho_{3(12)}$  وذلك باستخدام

العلاقات (4. 11. 7) ثم باستخدام العلاقة (4. 9. 4) والتأكد من مطابقة النتائج.

(10 - 4): لدينا 4 متغيرات عشوائية هي:

$X_1$ : عدد وفيات الأطفال الرضع الذين يقل عمرهم عن عام واحد لكل ألف

حالة ولادة - أى  $X_1$  هى معدل وفيات الأطفال الرضع.

$X_2$ : عدد السيدات المتزوجات للمرة الثانية فى الألف حالة زواج.



## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

$X_3$ : عدد وفيات الأشخاص الذين تقل أعمارهم عن 5 سنوات لكل عشرة آلاف.

$X_4$ : عدد الأشخاص الذين يعيشون اثنين أو أكثر في حجرة واحدة (لكل ألف نسمة).

فإذا كانت البيانات التالية تمثل هذه المتغيرات في 30 قرية كبيرة في إحدى الدول:

$$\bar{X}_1 = 164 \quad ; \quad \sigma_1 = 20 \quad ; \quad \rho_{12} = 0.49$$

$$\bar{X}_2 = 158 \quad ; \quad \sigma_2 = 47.9 \quad ; \quad \rho_{13} = 0.78$$

$$\bar{X}_3 = 143 \quad ; \quad \sigma_3 = 22.4 \quad ; \quad \rho_{14} = 0.20$$

$$\bar{X}_4 = 205 \quad ; \quad \sigma_4 = 130$$

$$\rho_{23} = 0.15 \quad ; \quad \rho_{24} = -0.37 \quad ; \quad \rho_{34} = 0.23$$

والمطلوب إيجاد:

(1) معاملات الارتباط الجزئية  $\rho_{12.34}$  و  $\rho_{13.24}$  و  $\rho_{14.23}$  و  $\rho_{23.14}$  و  $\rho_{24.13}$  و  $\rho_{34.12}$  باستخدام العلاقات (4. 7. 6b) ثم باستخدام العلاقة (4. 10. 6) والتأكد من مطابقة النتائج.

(2) الانحرافات المعيارية (من الدرجة الثالثة)  $\sigma_{1.234}$  و  $\sigma_{2.134}$  و  $\sigma_{3.124}$  و  $\sigma_{4.123}$  باستخدام العلاقات (4. 6. 17) ثم باستخدام العلاقات (4. 9. 1, 2, 3, 4) والتأكد من مطابقة النتائج.

(3) معادلة لتحديد  $X_1$  على  $X_2$  و  $X_3$  و  $X_4$ .

(4) معاملات الارتباط المتعدد  $\rho_{1(23)}$  و  $\rho_{1(234)}$  وذلك باستخدام العلاقات (4. 11. 7) ثم باستخدام العلاقة (4. 9. 4) ومطابقة النتائج.

(4 - 11): في بعض المدن الأمريكية الكبيرة بالولايات المتحدة الأمريكية في إحدى السنوات كانت المتغيرات  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  و  $X_4$  و  $X_5$  تعبر عما يلي:

$X_1$ : معدل الجريمة.

$X_2$ : النسبة المئوية للذكور في المجتمع.

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتراض

$X_3$ : النسبة المئوية للمواطنين (بالتجنس) الذكور في المجتمع.

$X_4$ : عدد الأولاد (أقل من 5 سنوات) لكل ألف امرأة متزوجة في العمر من 15 إلى 44 سنة.

$X_5$ : عدد الأشخاص الذين يمارسون الشعائر الدينية بانتظام.

ويتبع هذه المتغيرات في عدد كبير من المدن حصلنا على النتائج التالية:

$$\bar{X}_1 = 19.9 \quad ; \quad \sigma_1 = 7.9 \quad ; \quad \rho_{12} = 0.44$$

$$\bar{X}_2 = 49.2 \quad ; \quad \sigma_2 = 1.3 \quad ; \quad \rho_{13} = -0.34$$

$$\bar{X}_3 = 10.2 \quad ; \quad \sigma_3 = 4.6 \quad ; \quad \rho_{14} = -0.31$$

$$\bar{X}_4 = 481.4 \quad ; \quad \sigma_4 = 74.4 \quad ; \quad \rho_{15} = -0.14$$

$$\bar{X}_5 = 41.6 \quad ; \quad \sigma_5 = 10.8 \quad ; \quad \rho_{23} = 0.25$$

$$\rho_{24} = -0.19 \quad ; \quad \rho_{25} = -0.35 \quad ; \quad \rho_{34} = 0.44$$

$$\rho_{35} = 0.33 \quad , \quad \rho_{45} = 0.85$$

والمطلوب إيجاد:

(1) معاملات الارتباط الجزئية  $\rho_{15.3}$  و  $\rho_{15.4}$  و  $\rho_{15.34}$  باستخدام العلاقات (4. 7. 6b) ثم باستخدام العلاقة (4. 10. 6) والتأكد من مطابقة النتائج.

(2) معادلة لتحديد  $X_1$  على المتغيرات الأربعة الباقية.

(3) معامل الارتباط المتعدد  $\rho_{1(2345)}$  باستخدام العلاقات (4. 11. 7) ثم بالعلاقة (4. 9. 4) ومطابقة النتائج.

(4) ناقش تأثير الانتماء في ممارسة الشعائر الدينية على الجريمة.

(4 - 12): في حالة وجود  $n$  من المتغيرات بين أن:

$$(1) \cdot \binom{n}{2} = \text{عدد معاملات الارتباط الكلية (من الدرجة صفر)}$$

$$(2) \cdot \binom{n}{2} (n-2) = \text{عدد معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الأولى}$$

## الفصل الرابع - الاحتمال والارتباط والافتقار

$$(3) \text{ عدد معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الثانية } = \binom{n-2}{2} \binom{n}{2}.$$

$$(4) \text{ عدد معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة } k = \binom{n-2}{k} \binom{n}{2}.$$

$$(5) \text{ عدد معاملات الارتباط بصفة عامة } = 2^{(n-3)} n(n-1).$$

$$(6) \text{ عدد معاملات الانحدار بصفة عامة } = 2^{(n-2)} n(n-1).$$

$$(7) \text{ عدد معاملات الارتباط المتعدد من الدرجة } k = \binom{n-1}{k} n.$$

$$(8) \text{ العدد الإجمالي لمعاملات الارتباط المتعدد } = |2^{n-1} - 1| n.$$

(4 - 13): إذا كانت جميع معاملات الارتباط من الدرجة صفر متساوية وتساوى  $\rho$  فأثبت أن جميع معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة  $k$  متساوية وتساوى

$$\frac{\rho}{(1+k\rho)}.$$

وتحت نفس الشروط إذا كانت جميع معاملات الارتباط المتساوية

( $\rho$ ) سالبة وعدد المتغيرات المشاهدة  $n$  فأثبت أن نهاية القيمة  $\rho$  تحقق العلاقة

$$\text{التالية: } |\rho| \leq \frac{1}{n-1}.$$

(4 - 14): (أ) إذا كانت:  $X_3 = aX_1 + bX_2$  للمتغيرات الثلاثة  $X_1, X_2, X_3$ . أوجد

$$\rho_{12.3} \text{ و } \rho_{12.3} \text{ و } \rho_{23.1}.$$

(ب) وإذا كانت:  $aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$  فأوجد معاملات الارتباط

$$\text{الجزئية: } \rho_{12.3} \text{ و } \rho_{13.2} \text{ و } \rho_{23.1}.$$

(4 - 15): أثبت صحة العلاقة (4. 11. 9).



## الفصل الخامس

### الدوال المميزة

#### Characteristic Functions (C. F.'s)

##### (5-1) تعريف وخصائص الدوال المميزة:

فى هذا الباب نقدم مبادئ النظرية العامة للدوال المميزة، فالدالة المميزة ما هى إلا أداة رياضية وإحصائية هامة وتكتسب أهميتها مما لها من خصائص رياضية مفيدة، سواء فى تحديد عزوم المتغيرات العشوائية أو تحديد توزيعاتها الاحتمالية أو دراسة استقلال هذه المتغيرات. وبصفة خاصة يعتبر هذا الجزء الذى نقدمه من نظرية الدوال المميزة حالة خاصة من النظرية العامة لتحويلات فوريير، حيث أن الدوال التى نتعامل معها فى دراستنا ما هى إلا دوال كثافة احتمال أو توزيعات احتمالية فى حين أن النظرية العامة لتحويلات فوريير نتعامل مع أى دوال رياضية بصفة عامة دون تخصيص.

##### (5-1-1) تعريف الدالة المميزة:

إذا كان  $X$  متغير عشوائى له دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  فإننا نعرف الدالة المميزة (C. F.) للمتغير  $X$  (أو للتوزيع  $F(x)$ ) بأنها توقع المتغير العشوائى  $e^{ix}$  حيث  $i = \sqrt{-1}$  و  $t$  عدد حقيقى، ونرمز لها بالرمز  $\phi(t)$  حيث  $\phi(t)$  دالة معرفة لجميع قيم  $t$ . وبما أن  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  إذن يمكن كتابة  $\phi(t)$  فى الصورة التالية:

$$(5.1.1): \phi(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad \dots (a)$$

$$= u(t) + i v(t) \quad \dots (b)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

حيث:

$$(5.1.2): u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF(x) \quad \dots (a)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF(x) \quad \dots (b)$$

فإذا كان التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  توزيعاً مستمراً وله دالة كثافة احتمال  $f(x)$  فإن:

$$(5.1.3): \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

وإذا كانت  $F(x)$  دالة قفزة بقفزات  $P_r$  عند النقطة  $x = x_r$  فإن:

$$(5.1.4): \phi(t) = \sum_r P_r e^{itx_r}$$

ومن الحقيقة الرياضية التالية:

$$|e^{itx}| = 1 \text{ لجميع قيم } t \text{ الحقيقة نستنتج أن:}$$

$$(5.1.5): |\phi(t)| \leq 1, \quad (-\infty < t < \infty)$$

أي أن التكامل (5.1.1) دائماً موجود لجميع التوزيعات الاحتمالية وهذا يوضح أن الدالة المميزة دائماً موجودة ومعروفة لجميع المتغيرات العشوائية.

(5-1-2) بعض الخصائص الهامة للدالة المميزة:

إذا كانت  $\phi(t) = u(t) + i v(t)$  هي الدالة المميزة للمتغير العشوائي  $X$  ذي التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  فيمكن تقديم بعض الخصائص الهامة للدالة  $\phi(t)$  من خلال النظريات التالية:

نظرية (5-1-2أ):

الدالة المميزة  $\phi(t)$  دالة مستمرة باستمراراً منتظماً Uniformly Continuous لجميع قيم  $t$  الحقيقة وتحقق العلاقة التالية:

$$(5.1.6): \phi(0) = 1$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الإثبات)

فى الواقع العلاقة (5. 1. 6) تتضح مباشرة من تعريف الدالة  $\phi(t)$  ، فبوضع  $t = 0$  فى العلاقة (5. 1. 1) نجد أن:

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dF(x) = 1$$

كذلك يمكن إثبات الاستمرار المنتظم للدالة  $\phi(t)$  بإثبات أنه لكل عدد موجب  $\epsilon \in$  يمكن إثبات أن القيمة الموجبة للفرق  $\phi(t+h) - \phi(t)$  أقل من  $\epsilon$  حيث  $h$  عدد صغير موجب وذلك لجميع قيم  $t$  الحقيقية. إذ أن الفرق

$$\phi(t+h) - \phi(t) = \int e^{ix} (e^{ixh} - 1) dF(x)$$

$$|\phi(t+h) - \phi(t)| \leq \int |e^{ixh} - 1| dF(x)$$

وبفرض أن  $\epsilon > 0$  عدد حقيقى اختيارى arbitrary يمكن اختيار عدد  $A$  بحيث يكون كبيراً بما يكفى لتحقيق العلاقة التالية

$$\int_{|x| > A} dF(x) < \frac{\epsilon}{4}$$

كما يمكن اختيار  $h$  صغيرة بما يكفى لتحقيق العلاقة

$$|e^{ixh} - 1| < \frac{\epsilon}{2}$$

وذلك لجميع قيم  $|x| < A$ .

إذن:

$$|\phi(t+h) - \phi(t)| \leq \int_{-A}^A |e^{ixh} - 1| dF(x) + 2 \int_{|x| \geq A} dF(x) \leq \epsilon$$

وهذا يثبت صحة النظرية.

هـ. ط ث

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نظرية (5-1-2 ب):

إذا كان  $Y = aX + b$  حيث  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان و  $a$  و  $b$  ثابتان فإن:

$$(5.1.7): \phi_y(t) = e^{itb} \phi_x(at)$$

حيث  $\phi_x(t)$  و  $\phi_y(t)$  هما الدالتان المميزتان للمتغيران  $X$  و  $Y$  على الترتيب.

(الإثبات)

$$\phi_y(t) = E[e^{it(aX+b)}] = e^{itb} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itax} dF(x) = e^{itb} \phi_x(at)$$

هـ. ط. ث.

نتيجة (5-1-2 أ): وكحالة خاصة للنظرية السابقة عندما  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$  حيث

$\mu$ ،  $\sigma^2$  هما توقع وتباين  $X$  نجد أن:

$$\phi_y(t) = e^{-it\mu/\sigma} \phi_x\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

نتيجة (5-1-2 ب): إذا كان  $X$  متغير عشوائي دالته المميزة  $\phi_x(t)$  فإن الكمية المرافقة للدالة المميزة  $\phi_x(t)$  والتي نرمز لها بالرمز  $\bar{\phi}_x(t) = u_x(t) - i v_x(t)$  هي الدالة المميزة للمتغير  $(-X)$ . ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة بوضع  $b = 0$  و  $a = -1$  في النظرية السابقة أي أن:

$$(5.1.8): \phi_{-x}(t) = \bar{\phi}_x(t) = u_x(t) - i v_x(t) = \phi_x(-t)$$

نظرية (5-1-2 ج):

الدالة المميزة  $\phi(t)$  للمتغير العشوائي  $X$  تكون دالة حقيقية، إذا وفقط إذا، كانت لها توزيع احتمالي  $F(x)$  متمثل حول الصفر، أي إذا كانت:

$$F(x) = 1 - F(-x + 0)$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(الإثبات)

الشرط "إذا" شرط الكافية:

نفرض أن  $X$  متغير عشوائي له توزيع احتمالي متمائل حول الصفر وأن دالة توزيعه الاحتمالي هي  $F(x)$  إذن:

$$\phi(t) = u(t) + i v(t)$$

حيث  $u(t)$  و  $v(t)$  كما فى (5. 1. 2) وحيث أن  $\sin(tx)$  دالة فردية و  $\cos(tx)$  دالة زوجية وتوزيع  $X$  متمائلا إذن:  $v(t)$  يمثل تكامل دالة فردية فى الفترة  $(-\infty, \infty)$  فهو يساوى للصفر كما أن:

$$u(t) = 2 \int_0^{\infty} \cos(tx) dF(x) \neq 0$$

إذن  $\phi(t)$  دالة حقيقية.

الشرط "و فقط إذا" شرط اللزوم:

لكى تكون  $\phi(t)$  دالة حقيقية لابد أن تكون  $0 = v(t)$  و  $0 \neq u(t)$  وهذا يتطلب أن تكون الدالة المكاملة فى  $v(t)$  فردية وبالنسبة لـ  $u(t)$  زوجية وهذا يحدث فقط إذا كان توزيع  $X$  متمائلا حول الصفر.

هـ. ط. ث

نظرية (5-1-2):

إذا كان العزم الرأى حول الصفر  $\mu'_r$  للمتغير العشوائى  $X$  موجود  $\exists$ ، فإن الدالة المميزة  $\phi(t)$  للمتغير  $X$  تكون قابلة للتفاضل  $r$  مرة، ويمكن لجميع قيم  $r \geq J$  إيجاد  $\mu'_r$  بالصيغة التالية:

$$(5. 1. 9): \mu'_r = (i)^{-r} \phi^{(r)}(0)$$

حيث  $\phi^{(r)}(0)$  هي المشتقة التفاضلية من الدرجة  $r$  للدالة  $\phi(t)$  عندما  $t = 0$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الإثبات)

بمفاضلة الدالة الموجودة تحت علامة التكامل في العلاقة (5. 1. 1) مرة  $J$  ( $J \leq r$ ) نحصل على التكامل التالي:

$$(5. 1. 10): \int_{-\infty}^{\infty} i^J x^J e^{i t x} dF(x) = \phi^{(J)}(t)$$

وحيث أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^J x^J e^{i t x} |dF(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} |x^J| dF(x) = v_J'$$

حيث  $v_J$  هو العزم المطلق حول الصفر للمتغير  $X$  ومن فرض النظرية يكون  $\mu_J'$  موجود وبالتبعية يكون  $v_J'$  موجود. وعلى هذا يكون التكامل المعطى بالعلاقة (5. 1. 10) موجود وبالتالي يكون من المسموح به مفاضلة الصيغة الخاصة بالدالة  $\phi(t)$  تحت علامة التكامل. وبوضع  $t = 0$  في (5. 1. 10) نجد أن

$$\phi^{(J)}(0) = i^J \int x^J dF(x) = i^J \mu_J'$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (5. 1. 9).

هـ. ط. ث

ملاحظة (5- 1- 2 أ): النظرية السابقة تعني أنه إذا كان  $\mu_J'$  موجود فإنه يساوي  $\phi^{(J)}(0) i^{-J}$  ولكن العكس غير مؤكد، أي أن وجود  $\phi^{(J)}(0)$  لا يعني وجود  $\mu_J'$ ، ومعنى هذا أن هذه النظرية تقدم شرطاً كافياً لوجود المشتقة  $\phi^{(J)}(0)$  من الدرجة  $J$  عندما  $t = 0$  هذا الشرط هو وجود  $\mu_J'$ ، ولكنه ليس شرطاً ضرورياً لوجود  $\phi^{(J)}(0)$ . ويمكن إثبات أن هذا الشرط (أي وجود  $\mu_J'$ ) يعتبر كافياً ولازماً (ضرورياً) عندما تكون  $J$  عدد زوجي. وهذا ما سنتقدمه في النظرية التالية.

نظرية (5- 1- 2 هـ):

إذا كانت الدالة المميزة  $\phi(t)$  للمتغير العشوائي  $X$  لها مشتقة تفاضلية محدودة (موجودة) من الدرجة الزوجية  $2m$  عند النقطة  $t = 0$ ، فإن العزوم من جميع الدرجات  $1, 2, \dots, 2m$  للمتغير  $X$  تكون موجودة.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الإثبات)

بتطبيق المبادئ الأولية لعملية التفاضل باستخدام الفروق المتماثلة نجد أن المشتقة التفاضلية الأولى للدالة  $\phi(t)$  هي:

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} [\Delta \phi(t) / 2h].$$

حيث

$$\Delta \phi(t) = \phi(t+h) - \phi(t-h)$$

ومن (5. 1. 1)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (e^{ihx} - e^{-ihx}) dF(x)$$

إن:

$$(5. 1. 11): \phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta \phi(t) / 2h \quad \dots \quad (a)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[ \frac{e^{ihx} - e^{-ihx}}{2h} \right] dF(x) \quad \dots \quad (b)$$

وبالمثل:

$$\phi''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi'(t)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} [\phi'(t+h) - \phi'(t-h)]$$

ومن (5. 1. 11) نجد أن:

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi(t+h)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi(t-h)}{2h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(2h)^2} \Delta [\Delta \phi(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 \phi(t)}{(2h)^2} \end{aligned}$$

وهكذا يمكن بالاستنتاج الرياضى إثبات أن:

$$\phi^{(2m)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^{2m} \phi(t)}{(2h)^{2m}}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبالتعويض عن  $\phi(t)$  من (5. 1. 1) نحصل على العلاقة التالية:

$$(5. 1. 12): \phi^{(2m)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^{2m}(e^{itx})}{(2h)^{2m}} dF(x)$$

ولكن الفرق المتماثل  $\Delta^{2m}(e^{itx})$  يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$(5. 1. 13): \Delta(e^{itx}) = e^{i(t+h)x} - e^{i(t-h)x} = e^{itx}(e^{ihx} - e^{-ihx})$$

و

$$\begin{aligned} \Delta^2(e^{itx}) &= \Delta[\Delta(e^{itx})] = (e^{ihx} - e^{-ihx})\Delta(e^{itx}) \\ &= e^{itx}(e^{ihx} - e^{-ihx})^2 \end{aligned}$$

وهكذا بالاستنتاج الرياضى نجد أن:

$$\Delta^{2m}(e^{itx}) = e^{itx}(e^{ihx} - e^{-ihx})^{2m}$$

وبالتعويض عن  $\Delta^{2m}(e^{itx})$  فى معادلة (5. 1. 12) نجد أن:

$$(5. 1. 14): \phi^{(2m)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left( \frac{e^{ihx} - e^{-ihx}}{2h} \right)^{2m} dF(x)$$

إذن:

$$(5. 1. 15): \phi^{(2m)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{ihx} - e^{-ihx}}{2h} \right)^{2m} dF(x)$$

وبما أن:

$$e^{ihx} - e^{-ihx} = 2i \sin hx$$

و

$$(i)^{2m} = (-1)^m$$

إذن:

$$(5. 1. 16): |\phi^{(2m)}(0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m} dF(x)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ولأى فترة محدودة  $(a, b)$  نجد أن:

$$(5.1.17a): \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m} dF(x) = \int_a^b \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m} dF(x) \\ = \int_a^b x^{2m} dF(x)$$

وفى العلاقة السابقة لمكن إبدال علامتى النهاية والتكامل لأن الدالة  $\left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m}$  دالة محدودة بانتظام فى الفترة المحدودة  $(a, b)$  كما أن:  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m} = x^{2m}$  وهذه النهاية محدودة كذلك طالما أن  $a < x < b$ . إذن:

$$(5.1.17b): \int_a^b x^{2m} dF(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m} dF(x) \\ \leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin hx}{h} \right)^{2m} dF(x)$$

ومن (5.1.16)

$$= |\phi^{(2m)}(0)|$$

إذن:

$$(5.1.18): \int_a^b x^{2m} dF(x) \leq |\phi^{(2m)}(0)|$$

وبهذا أثبتنا أن أقل من أو يساوى كمية لا تعتمد على  $a$  أو  $b$  هى

الكمية المطلقة  $|\phi^{(2m)}(0)|$  وهى كمية محدودة حسب فرض النظرية، كما أن كل من  $a$  و  $b$  ثوابت اختيارية يمكن اختيارها كبيرة كبراً كافياً كما نشاء، وهذا يترتب عليه أن العزم

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

الزوجي  $\mu'_{2m}$  يكون موجود لأنه يكون دائماً أقل من كمية محدودة إذ عندما  $a \rightarrow -\infty$  و  $b \rightarrow \infty$  يتضح من العلاقة (5. 1. 18) أن:

$$\mu'_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} dF(x) \leq |\phi^{(2m)}(0)|.$$

هـ. ط. ث

ملاحظة (5 - 1 - 2 ب): وجود المشتقة الفردية  $\phi^{(2m+1)}(t)$  عند النقطة  $t = 0$  ليس كافياً لوجود العزم الفردي  $\mu'_{2m+1}$  وذلك لأن العلاقة (5. 1. 17) لا تتحقق إلا إذا كانت الكمية  $\left(\frac{\sinh x}{h}\right)$  مرفوعة إلى قوة زوجية حتى تكون كمية موجبة أما إذا كانت مرفوعة إلى قوة فردية  $(2m \pm 1)$  مثلاً فهذا لا يضمن صحة العلاقة (5. 1. 17b).

(5 - 1 - 3) الدالة المولدة للعزوم:

The Moment Generating Function (m. g. f.):

الدالة المولدة للعزوم دالة رياضية يمكن الحصول عليها باستخدام توزيع المتغير العشوائي مباشرة كما يمكن الحصول عليها من الدالة المميزة باستخدام العلاقة (5. 1. 19) التالية ونرمز لها بالرمز  $M(t)$  إذ هي دالة في العدد الحقيقي  $t$ . وقد سميت  $M(t)$  بالدالة المولدة للعزوم لأن عزوم المتغير العشوائي تظهر كمعاملات لقوى  $t$  في مفكوك  $M(t)$  بدلالة قوى  $t$  التصاعدية.

تعريف (5 - 1 - 3 أ) "الدالة المولدة للعزوم":

إذا كان  $X$  متغير عشوائي له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  فإن الدالة المولدة للعزوم للمتغير  $X$  تعرف بأنها توقع المتغير  $e^{tx}$ ، إذا كان هذا التوقع موجود، ونلك لجميع قيم  $t$  الحقيقية في الفترة  $-h < t < h$ ،  $h > 0$ . ونرمز لها بالرمز  $M(t)$  وهي بذلك يمكن الحصول عليها من الدالة المميزة  $\phi(t)$  بكتابة  $\left(\frac{t}{i}\right)$  بدلاً من  $t$  كما يلي:

$$\begin{aligned} (5. 1. 19): M(t) = \phi\left(\frac{t}{i}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) \quad \dots (a) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad \dots (b) \end{aligned}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

إذا كان  $X$  متغير مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$

$$= \sum_r e^{ix_r} P(x_r) \dots (c)$$

إذا كان  $X$  متغير متقطع يأخذ القيم  $X_1, X_2, \dots$  ودالة احتماله عند النقطة  $X = x_r$  هي  $P(x_r)$ .

والدالة المولدة للعزوم  $M(t)$  ليست موجودة دائماً بالنسبة لكل التوزيعات الاحتمالية ولجميع قيم  $t$  مثل الدالة المميزة، لذلك فنحن نهتم عادة بالدالة  $M(t)$  في جوار ما حول النقطة  $t = 0$  أي لجميع قيم  $t$  التي تحقق العلاقة  $-h < t < h$  حيث  $h > 0$ . ومع ذلك إذا كانت الدالة  $M(t)$  موجودة فإنها تكون دالة مستمرة وتفاضلية بالنسبة لـ  $t$  في الفترة  $-h < t < h$ ، وإذا كان العزم الرأسي حول الصفر  $\mu'_r$  للمتغير  $X$  موجود فإن الدالة المولدة للعزوم  $M(t)$  تكون قابلة للتفاضل  $r$  مرة، ويمكن لجميع قيم  $r \geq J$  إيجاد  $\mu'_r$  بالصيغة التالية:

$$(5.1.20): \mu'_r = M^{(r)}(0)$$

والعلاقة السابقة هي التي تقابل العلاقة (5.1.9) بالنسبة للدالة المميزة. ومن الواضح أن:

$$(5.1.21): M(0) = 1$$

(5 - 1 - 4) الدالة المولدة للاحتمالات:

The Probability Generating Function (p. g. f.):

المتغيرات العشوائية المنقطعة التي تأخذ قيم صحيحة  $0, 1, 2, \dots$  دائماً لها أهمية خاصة من بين كل المتغيرات المنقطعة بصفة عامة. ودراسة خصائص هذه المتغيرات يمكن تبسيطها باستخدام أداة رياضية هامة تسمى بالدالة المولدة للاحتمالات. وهي دالة يمكن استخدامها في إيجاد العزوم العاملة لمثل هذه المتغيرات بطريقة ميسرة لذلك فأحياناً نطلق عليها اسم الدالة المولدة للعزوم العاملة.

تعريف (5 - 1 - 4) "الدالة المولدة للاحتمالات":

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  من النوع المنقطع الذي يأخذ القيم  $0, 1, 2, \dots$  ودالة احتماله  $P^*(x)$  فإن الدالة:

$$(5.1.22): P(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x P^*(x) ; -1 \leq t \leq 1$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

تسمى بالدالة المولدة للاحتمالات.

والدالة المولدة للاحتمالات، إذا كانت موجودة، يمكن الحصول عليها من الدالة المولدة للعزوم بوضع  $\ln t$  بدلاً من  $t$  في العلاقة (5. 1. 19) ; c) أخنن في الاعتبار أن  $x_r$  هي القيم  $0, 1, 2, \dots$  وذلك كما يلي:

$$(5. 1. 23): P(t) = M(\ln t) = E(t^x) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x P^*(x).$$

ومن العلاقة السابقة يتضح أنه إذا أمكن إيجاد مفكوك  $P(t)$  في شكل متسلسلة في قوى  $t$  التصاعدية فإن معامل  $t^x$  هو  $P^*(x)$  أى هو دالة احتمال المتغير  $X$ . والدالة المولدة للاحتمالات سميت بهذا الاسم لأنها تتميز بخاصيتين هامتين هما:

(1) معامل  $t^x$  في مفكوك  $P(t)$  هو احتمال أن المتغير  $X$  يأخذ القيمة  $x$ .

(2)  $P(1) = 1$  أى يساوى مجموع الاحتمالات.

والدالة المولدة للاحتمالات مفيدة أيضاً في تحديد العزوم العاملة للمتغير المنقطع  $X$  حيث يمكن استخدام العلاقة:

$$(5. 1. 24): P^{(r)}(t) \Big|_{t=1} = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$

حيث  $P^{(r)}(t) \Big|_{t=1}$  هو تفاضل الدالة  $P(t)$  مرات عددها  $r$  ثم وضع  $t=1$ ، فنحصل بذلك على العزم العامل من الدرجة  $r$  للمتغير  $X$  والذي تمثله العلاقة السابقة في جانبها الأيمن.

وإذا كتبنا  $(1+t)$  بدلاً من  $t$  في العلاقة (5. 1. 22) أو في العلاقة (5. 1. 23) نحصل على دالة تعرف باسم "الدالة المولدة للعزوم العاملة" "Factorial Moment Generating Function" نرمز لها بالرمز  $P(1+t)$  حيث:

$$(5. 1. 25): P(1+t) = M[\ln(1+t)] = \sum_{x=0}^{\infty} (1+t)^x P^*(x)$$

حيث  $P^*(x)$  هي دالة احتمال  $X$ .

ويمكن تحديد العزوم العاملة من هذه الدالة باستخدام العلاقة التالية:

$$(5. 1. 26): P^{(r)}(1+t) \Big|_{t=0} = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

حيث  $P^{(r)}(1+t)$  هو تفاضل  $P(1+t)$  بالنسبة لـ  $t$  مرات عندها  $r$  ثم وضع  $t=0$  فنحصل على العزم العاظمى من الدرجة  $r$  للمتغير المنقطع  $X$ .

(5-1-5) مفكوك الدالة المميزة في صورة متسلسلة ماكلورين بدلالة العزم:

إذا كان العزم الرأسي  $\mu'_r$  للمتغير العشوائى موجود فيمكن إيجاد مفكوك الدالة المميزة  $\phi(t)$  بدلالة قوى  $t$  التصاعدية حول النقطة  $t=0$  في شكل متسلسلة ماكلورين Maclaurin's Series حيث يكون العزم  $\mu'_r$  هو معامل  $\frac{(it)^r}{r!}$  في المفكوك مع وجود حد باقى يزول إلى الصفر عندما  $t \rightarrow 0$ . والنظرية التالية تقدم لنا هذا المفكوك.

نظرية (5-1-5):

إذا كان العزم الرأسي  $\mu'_r$  للمتغير العشوائى  $X$  موجود (Exists) فإن الدالة المميزة  $\phi(t)$  للمتغير  $X$  يمكن وضعها في شكل متسلسلة ماكلورين بدلالة قوى  $t$  التصاعدية حول النقطة  $t=0$  (أي في جوار ما لهذه النقطة) وذلك في الصورة التالية:

$$(5.1.27): \phi(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r + o(t^r) \quad (as t \rightarrow 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^r)}{t^r} = 0 \quad \text{حيث}$$

(الإثبات)

فى تعريف الدالة المميزة فى علاقة (5.1.1, a) نلاحظ أن الدالة  $e^{itx}$  الموجودة تحت علامة التكامل دالة مستمرة ومحدودة لجميع قيم  $t$  و  $x$  (حيث  $|e^{itx}| \leq 1$ ) كما أن المشتقة التفاضلية من الدرجة  $r$   $\left(\frac{d^r e^{itx}}{dt^r}\right)$  دالة مستمرة لأى عدد صحيح موجب  $r$  ولأى عدد حقيقى  $t$  لذلك يمكن وضعها فى شكل مفكوك ماكلورين على الصورة التالية:

$$e^{it'x} = 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(it'x)^j}{j!} + \frac{(it'x)^r}{r!} e^{it''x}, \quad 0 < t' < t$$

وبالتعويض عن العلاقة السابقة فى (5.1.1, a) يمكن كتابة الدالة المميزة  $\phi(t)$  فى الصورة التالية:

### الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$\begin{aligned}
 (5.1.28): \phi(t) &= 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j \\
 &+ \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{it'x} dF(x), \quad 0 < t' < t \\
 &= 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j + \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r Q(t, r)
 \end{aligned}$$

حيث

$$(5.1.29): Q(t, r) = \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{it'x} dF(x), \quad 0 < t' < t.$$

نلاحظ أن:

$$|Q(t, r)| \leq \frac{v'_r}{|\mu'_r|}$$

حيث  $v'_r$  هو العزم المطلق من الدرجة  $r$ . إذن  $Q(t, r)$  كمية محدودة حيث أن كل من  $v'_r$  و  $\mu'_r$  محدودة. كما أن:

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q(t, r) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{it'x} dF(x)$$

لو أدخلنا علامة النهاية داخل علامة التكامل سيكون نتيجة التكامل السابق تساوى  $\frac{\mu'_r}{\mu'_r} = 1$  ومادام مبادلة علامتى النهاية والتكامل يؤدي إلى تكامل محدود فهو مسموح به، إذن:

$$\begin{aligned}
 (5.1.30): \lim_{t \rightarrow 0} Q(t, r) &= \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} x^r e^{it'x} dF(x); \quad t' \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0. \\
 &= \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF(x) = 1
 \end{aligned}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبوضع:

$$e^{it'x} = 1 + (e^{it'x} - 1)$$

يمكن كتابة  $Q(t, r)$  من (5. 1. 29) في الصورة التالية:

$$(5. 1. 31): Q(t, r) = 1 + H(t, r)$$

حيث:

$$(5. 1. 32): H(t, r) = \frac{1}{\mu'_r} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it'x} - 1) dF(x).$$

و

$$(5. 1. 33): \lim_{t \rightarrow 0} H(t, r) = 0$$

إذن من (5. 1. 28) و (5. 1. 32) نجد أن:

$$(5. 1. 34): \phi(t) = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j + \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r H(t, r)$$

حيث:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^r} \frac{(it)^r}{r!} \mu'_r H(t, r) = 0$$

لهذا يمكن كتابة (5. 1. 34) في الصورة المبسطة التالية:

$$(5. 1. 35): \phi(t) = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j + o(t^r)$$

حيث

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^r)}{t^r} = 0$$

هـ. ط. ث

وإذا كانت كل العزوم  $\mu'_j$  موجودة لجميع قيم  $j = 1, 2, 3, \dots$  فيمكن كتابة الدالة المميزة  $\phi(t)$  المعطاة بالعلاقة (5. 1. 27) في الصورة التالية:

$$(5. 1. 36): \phi(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j.$$

### الفصل الخامس - الدوال المميزة

ويمكن إيجاد مفكوك الدالة المولدة للعزوم  $M(t)$  في شكل متسلسلة ماكلورين مثل الدالة المميزة  $\phi(t)$  تماماً كما في العلاقتين (5. 1. 35) و (5. 1. 36) في الصورة التالية:

$$(5. 1. 37): M(t) = \phi\left(\frac{t}{t'}\right) = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{t^j}{j!} \mu'_j + 0(t^r)$$

حيث:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{0(t^r)}{t^r} = 0$$

وفي حالة وجود كل العزوم تكون:

$$(5. 1. 38): M(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mu'_j .$$

ملاحظة (5 - 1 - 5) الدالة المميزة المركزية Central C. F.:

في نظرية (5 - 1 - 5) السابقة قمنا مفكوك الدالة المميزة  $\phi(t)$  بدلالة العزوم حول الصفر والدالة  $\phi(t)$  هي توقع المتغير  $e^{itX}$  وهي تعتبر دالة مولدة للعزوم حول الصفر ولكن إذا اعتبرنا المتغير  $e^{it(X-\mu)}$  حيث  $\mu$  هي توقع  $X$  فيمكن تقديم دالة مولدة للعزوم المركزية لترمز لها بالرمز  $\phi_c(t)$  حيث نعرف هذه الدالة بالعلاقة التالية:

$$(5. 1. 39): \phi_c(t) = E(e^{it(X-\mu)}) = e^{-it\mu} \phi(t).$$

أي أن الدالة المولدة للعزوم المركزية  $\phi_c(t)$  هي حاصل ضرب الدالة المولدة للعزوم حول الصفر  $\phi(t)$  في الكمية  $e^{-it\mu}$ . وهي في نفس الوقت دالة مميزة للمتغير  $Y = X - \mu$  لذلك فإن مفكوك الدالة  $\phi_c(t)$  في شكل متسلسلة ماكلورين يكون هو نفس مفكوك الدالة  $\phi(t)$  كما في نظرية (5 - 1 - 5) مع كتابة العزوم المركزية بدلاً من العزوم حول الصفر. ونفس الشيء بالنسبة للدالة المولدة للعزوم حيث تكون الدالة المولدة للعزوم المركزية هي:

$$(5. 1. 40): M_c(t) = e^{-it\mu} M(t)$$

ومفكوك  $M_c(t)$  يكون هو نفس المفكوك (5. 1. 37) أو (5. 1. 38) مع كتابة العزوم المركزية بدلاً من العزوم حول الصفر.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ملاحظة (5-1-5 ب): لقد ذكرنا سابقاً أن الدالة المميزة  $\phi(t)$  دائماً موجودة لكل المتغيرات العشوائية ولجميع قيم  $t$ . كما ذكرنا من قبل أيضاً أن عزوم أى متغير عشوائى ليس من الضروري أن تكون كلها موجودة، فبعض المتغيرات العشوائية تكون عزومها حتى درجة معينة موجودة وباقى العزوم غير موجودة فى حين أن عزوم بعض المتغيرات تكون كلها موجودة، وهذا لا يتعارض مع وجود الدالة المميزة دائماً لجميع المتغيرات العشوائية. فمثلاً توزيع كوشى المعطى فى مثال (3-2-2 د) أثبتنا أن توقعه (العزم الأول حول الصفر) غير موجود وبالتالي تكون كل عزومه غير موجودة، علماً بأن الدالة المميزة لهذا التوزيع موجودة ومطابقة بالعلاقة التالية:

$$\phi(t) = e^{-|t|}$$

وكما سيوضح فيما بعد فى مثال (5-1-11 ب) ومفكوك هذه الدالة بدلالة قوى  $t$  التصاعبية يأخذ الشكل التالى:

$$\phi(t) = 1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots$$

إذا كانت  $t > 0$

$$= 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

إذا كانت  $t < 0$  أى أنه يوجد صيغتين لمفكوك  $\phi(t)$  يختلفان فى إشارة مصاملات  $t$ ،  $t^3$ ،  $t^5$ ، ... طبقاً لكون  $t > 0$  أو  $t < 0$ . وبهذا لا يوجد مفكوك وحيد للدالة المميزة  $\phi(t)$  فى قوى  $t$  حول النقطة  $t = 0$  وحيث أن معامل  $t$  فى الصيغتين مختلف فى الإشارة فإن هذا يدل على أن التوقع غير موجود وبالتالي تكون كل عزوم هذا التوزيع غير موجودة كما سبق أن أثبتنا فى مثال (3-2-2 د) تماماً. لهذا عند إيجاد مفكوك الدالة المميزة لأى متغير عشوائى فى شكل متسلسلة ماركولورين لابد أن يكون المفكوك فى حدود العزوم الموجودة فقط ولقيم  $t$  فى جوار حول القيمة  $t = 0$  كما فى العلاقة (5.1.27).

(5-1-6) المترامكات Cumulants:

من دراستنا للعزوم يمكن القول أن العزوم تعتبر مجموعة من الثوابت التى تحدد خصائص المجتمع (أو التوزيع الاحتمالى) محل الدراسة، لذلك فهى تعرف بأنها أدلة توصيف المجتمعات. والعزوم ليست هى المجموعة الوحيدة (أو الأفضل) من الثوابت التى تحدد خصائص المجتمعات. والآن سنقدم مجموعة أخرى من الثوابت يمكن بواسطتها تحديد خصائص للتوزيعات الاحتمالية (أو خصائص للمجتمعات)، هذه الثوابت تسمى بالمترامكات ولها خصائص تجعلها ذات فائدة كبيرة من الوجهة النظرية البحتة. وسنرمز للمترامكات بالرموز  $k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$  حيث  $k_r$  تعرف بالمترامكة الرائية أو المترامكة

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

من الدرجة  $r$  وسنقدم فيما يلي دالة رياضية تعرف بالدالة المولدة للمترامكات Cumulant Generating Function (c. g. f.) يمكن بواسطتها تحديد مترامكات التوزيع الاحتمالي.

تعريف (5-1-6): الدالة المولدة للمترامكات للمتغير العشوائي  $X$  الذى له دالة مميزة  $\phi(t)$  هي دالة في الثابت  $t$  حيث  $t$  عدد حقيقي ونرمز لها بالرمز  $K(t)$  وهي عبارة عن لوغاريتم الدالة المميزة  $\phi(t)$  وتكتب في الصورة التالية:

$$(5.1.41): K(t) = \ln \phi(t) = k_1 \frac{t}{1!} + k_2 \frac{t^2}{2!} + k_3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

حيث  $k_0$  تعرف بأنها تساوى الصفر لعدم وجود حد مطلق في المفكوك السابق و  $k_r$  هي معامل  $\frac{(t^r)}{r!}$  وتسمى بـ "المترامكة رقم  $J$  أو من الدرجة  $J$ " للمتغير العشوائي  $X$ .

ملاحظة (5-1-6): يمكن استخدام لوغاريتم الدالة المولدة للزوم  $M(t)$  للمتغير  $X$  في الحصول على دالة مولدة للمترامكات، ونرمز لها بالرمز  $\bar{K}(t) = \ln M(t)$  وفي هذه الحالة تكون المترامكة الرائية  $k_r$  هي معامل  $\frac{t^r}{r!}$ .

ملاحظة (5-1-6 ب): المترامكات تسمى أحياناً أتصاف الثوابت Semi-invariants وهذه كانت هي التسمية الأولى التي عرفت بها المترامكات وهي تسمية نتجت بسبب خاصية هامة تتميز بها المترامكات - حيث أن أى إزاحة أو تغيير في نقطة الأصل للمتغير العشوائي لا ينتج عنه أى تغيير في قيمة المترامكات إلا المترامكة الأولى فقط كما يتضح مما يلي:

إذا كان  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان حيث  $Y = a + X$  و  $a$  مقدار ثابت، فإن الدالة المميزة للمتغير  $Y$  تكون:

$$\phi_Y(t) = e^{ita} \phi_X(t)$$

والدالة المولدة للمترامكات للمتغير  $Y$  تكون:

$$K_Y(t) = \ln \phi_Y(t) = ita + K_X(t).$$

إن معامل  $t$  فقط هو الذى يتغير، أى أن المترامكة الأولى فقط هي التى تتغير إذ نجد أن المترامكة الأولى للمتغير  $Y$   $(k_{1Y})$  تساوى المترامكة الأولى للمتغير  $X$   $(k_{1X})$  مضافاً إليها الثابت  $a$ ، أما باقى مترامكات المتغير  $Y$  تكون مساوية تماماً لباقى مترامكات  $X$  ونعبر عن ذلك بالعلاقات التالية:

$$k_{1Y} = a + k_{1X}$$

$$k_{JY} = k_{JX} ; J = 2, 3, \dots$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (5-1-7) العلاقة بين المترجمات والعزوم:

يمكن إيجاد مترجمات أى متغير عشوائى بدلالة عزومه كما يمكن إيجاد العزوم بدلالة المترجمات وذلك باستخدام العلاقة (5. 1. 41) مع كتابة مفكوك  $\phi(t)$  كما فى (5. 1. 36) فنحصل على:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j = \ln \phi(t) = \ln \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j \right]$$

ولو رمزنا للمتسلسلة داخل القوس المربع بالرمز  $Z(t)$  فإن:

$$\begin{aligned} (5. 1. 42): K(t) = \ln \phi(t) &= \ln [1 + Z(t)] = \frac{Z(t)}{1} - \frac{Z^2(t)}{2} + \frac{Z^3(t)}{3} - \dots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j \end{aligned}$$

كما أن:

$$\begin{aligned} (5. 1. 43): \phi(t) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j = \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j \right] \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j \right]^3 + \dots \end{aligned}$$

وللحصول على المترجمات بدلالة العزوم أو العزوم بدلالة المترجمات نقارن معاملات العزوم  $(it)^j$  لقيم  $j$  المختلفة فى العلاقة (5. 1. 42) أو (5. 1. 43) وبهذا نحصل على العلاقات التالية:

$$(5. 1. 44): k_1 = \mu'_1$$

$$k_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \mu_2 = \sigma^2$$

$$k_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2 \mu'_1 + 2\mu_1'^3$$

$$k_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3 \mu'_1 - 3\mu_2'^2 + 12\mu'_2 \mu_1'^2 - 6\mu_1'^4.$$

.....

## الفصل الخامس- الدوال المميزة

وكذلك:

$$(5. 1. 45): \mu'_1 = k_1$$

$$\mu'_2 = k_2 + k_1^2$$

$$\mu'_3 = k_3 + 3k_2k_1 + k_1^3$$

$$\mu'_4 = k_4 + 4k_3k_1 + 3k_2^2 + 6k_2k_1^2 + k_1^4$$

.....

ومن العلاقة بين العزوم المركزية  $\mu_r$  والعزوم حول نقطة  $\mu'_r$  يمكن إيجاد العلاقات التالية بين المتراكمت والعزوم المركزية:

$$(5. 1. 46): k_2 = \mu_2$$

$$k_3 = \mu_3$$

$$k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$$

.....

وكذلك:

$$(5. 1. 47): \mu_2 = k_2$$

$$\mu_3 = k_3$$

$$\mu_4 = k_4 + 3k_2^2$$

.....

ملاحظة (5 - 1 - 7 أ): كلا من العزوم والمتراكمت لها خاصية هامة، هي أنه إذا ضربنا المتغير  $X$  في قيمة ثابتة  $a$  فإن العزم الرائي  $\mu'_r$  والمتراكمة الرائية  $k_r$  للمتغير  $Y = aX$  تكونا نفس العزم الرائي والمتراكمة الرائية للمتغير  $X$  ولكن كل منهما مضروب في العامل  $a^r$ .

ملاحظة (5 - 1 - 7 ب): المتراكمة الرائية  $k_{r,z}$  ( $r > 1$ ) للمتغير العشوائي  $Z = a + bX$  حيث  $a, b$  ثابتان هي نفس المتراكمة الرائية للمتغير  $X$  مضروبة في العامل  $b^r$  دون تأثير للإزاحة  $a$ . أما المتراكمة الأولى  $k_{1,x}$   $k_{1,z} = a + b k_{1,x}$ .



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (5-1-8) شرط وجود المتراكمت:

العلاقة (5. 1. 43) والتي نتج عنها العلاقات (5. 1. 44, 45, 46, 47) توضح أن المتراكمة  $k_r$  تكون موجودة إذا كانت العزوم حتى الدرجة  $r$  موجودة ولكن ليس من السهل إثبات ذلك رياضياً من هذه العلاقات. لذلك سنلجأ إلى أسلوب آخر لتحديد شرط وجود المتراكمة  $k_r$  كما يلي:

يمكن كتابة العلاقة (5. 1. 28) في الصورة التالية:

$$\phi(t) = \sum_{j=0}^r \frac{(it)^j}{j!} \mu'_j + h(t)$$

حيث  $h(t)$  دالة تحتوي على  $t^{r+1}$  و  $v_{r+1}$ ،  $|h(t)| \leq \frac{|t|^{r+1}}{(r+1)!} v_{r+1}$  هو العزم المطلق من الدرجة  $(r+1)$ ، فإذا كان  $v_{r+1}$  محدود فإن  $h(t) \rightarrow 0$  عندما  $t \rightarrow 0$ . إذن الدالة المولدة للمتراكمت  $K(t)$  يمكن كتابتها في الصورة التالية:

$$K(t) = \ln \phi(t) = \ln \left[ 1 + \sum_{j=1}^r \frac{(it)^j}{j!} + h(t) \right] = \ln [1 + y]$$

حيث  $y$  هي الحدين الثاني والثالث داخل القوس المربع

$$= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \dots$$

وبتجميع معاملات  $(it)$  و  $\frac{(it)^2}{2!}$  و  $\frac{(it)^3}{3!}$  و... وهكذا. نجد أن الدالة المولدة

للمتراكمت:

$$(5. 1. 48): K(t) = \sum_{j=1}^r \frac{(it)^j}{j!} k_j + O(t^{r+1})$$

حيث  $O(t^{r+1})$  هي حدود تشتمل على  $t^{r+1}$  فما فوق. وعلى ذلك فإن وجود العزم المطلق  $v_{r+1}$  جعل من الممكن كتابة  $K(t)$  في الصورة السابقة - لذلك يمكننا القول أنه إذا كان العزم المطلق  $v_{r+1}$  موجود فإن المتراكمت  $k_r$  لجميع قيم  $j = 1, 2, \dots, r$  تكون كلها موجودة.

## الفصل الخامس- الدوال المميزة

ملاحظة (5-1-8 أ): من المعروف أن المترجمات لا يمكن إيجادها من دالة كثافة احتمال (أو دالة احتمال) المتغير العشوائي بالتكامل أو الجمع مثل العزوم وإنما لابد من إيجاد العزوم أولاً لإيجاد المترجمات منها باستخدام العلاقات (5.1.44, 46) أو باستخدام الدالة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم) وإيجاد مفكوك لوغاريتمها بدلالة قوى  $t$  التصاعديّة. كما أنه لا يوجد مترجمات مركزية وأخرى غير مركزية كما هو الحال بالنسبة للعزوم.

(5-1-9) المترجمات العاملية Factorial Cumulants:

كما عرفنا الدالة المولدة للمترجمات بأنها لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم أو لوغاريتم الدالة المميزة يمكن تعريف دالة مولدة للمترجمات العاملية بأنها لوغاريتم الدالة المولدة للعزوم العاملية في الصورة التالية:

$$(5.1.49): \omega(t) = \ln P(1+t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^r}{r!} k_{[r]}$$

حيث  $\omega(t)$  هي الدالة المولدة للمترجمات العاملية و  $k_{[r]}$  هي المترجمة العاملية ذات الدرجة  $r$ . و  $P(1+t)$  هي الدالة المولدة للعزوم العاملية والمعرفة بالعلاقة (5.1.25). وطبعاً تعريف الدالة المولدة للمترجمات العاملية مقتصر على المتغيرات العشوائية المنقطعة التي تأخذ القيم  $0, 1, 2, \dots$  كما سبق الإشارة إلى ذلك عند تقديم الدالة المولدة للاحتمالات وتلك المولدة للعزوم العاملية. وبذلك تكون العلاقة بين المترجمات العاملية والمترجمات العادية كذلك العلاقة الموجودة بين العزوم العاملية والعزوم العادية والمعطاة بالعلاقات (3.5.27, 28) على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} (5.1.50): k_{[1]} &= k_1 \\ k_{[2]} &= k_2 - k_1 \\ k_{[3]} &= k_3 - 3k_2 + 2k_1 \\ k_{[4]} &= k_4 - 6k_3 + 11k_2 - 6k_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{aligned} (5.1.51): k_1 &= k_{[1]} \\ k_2 &= k_{[2]} + k_{[1]} \\ k_3 &= k_{[3]} + 3k_{[2]} + k_{[1]} \\ k_4 &= k_{[4]} + 6k_{[3]} + 7k_{[2]} + k_{[1]} \\ &\dots \end{aligned}$$

## الفصل الخامس - النوال المميزة

(5 - 1 - 10) أمثلة محلولة: نقدم فيما يلي مجموعة من الأمثلة المحولة كنطبق على ما تقدم في هذا الباب حتى الآن.

مثال (5 - 1 - 10 أ): أوجد كل من الدالة المميزة  $\phi(t)$  والدالة المولدة للعزوم  $M(t)$  والدالة المولدة للاحتماالات  $P(t)$  والترفع  $\mu$  والتباين  $\mu_2$  للتوزيعات التالية:  
(1) التوزيع ذي الحدين:

$$P(J) = \binom{n}{J} P^J q^{n-J}, \quad J = 0, 1, 2, \dots, n, \quad P + q = 1$$

(2) التوزيع البواسوني:

$$P(J) = \frac{\lambda^J}{J!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

(الحل)

(1) التوزيع ذو الحدين:

$$P(t) = \sum_{J=0}^n \binom{n}{J} P^J q^{n-J} t^J = [q + Pt]^n$$

$$M(t) = P(e^t) = [q + Pe^t]^n$$

$$\phi(t) = M(it) = [q + Pe^{it}]^n$$

$$\mu = \frac{1}{i} \phi'(0) = \frac{1}{i} n [q + Pe^{it}]^{n-1} i P e^{it} \Big|_{t=0} = n P$$

$$\mu'_2 = \frac{1}{i^2} \phi''(0) = n(n-1)P^2 + n P$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2 = n P q$$

(2) التوزيع البواسوني:

$$P(t) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{\lambda^J t^J}{J!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-t)}$$

$$M(t) = P(e^t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

$$\phi(t) = M(it) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

$$\mu = \frac{1}{i} \phi'(0) = \frac{1}{i} \lambda i e^{it} e^{-\lambda(1-e^{it})} \Big|_{t=0} = \lambda$$

$$\mu'_2 = \frac{1}{i^2} \phi''(0) = \frac{1}{i^2} \lambda i^2 e^{it} \exp[\lambda(e^{it} - 1)] [\lambda e^{it} + 1] \Big|_{t=0} = \lambda(\lambda + 1)$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

مثال (5 - 1 - 10 ب): في التوزيع الممنهج المعطى بالعلاقة (2. 6. 6b) حيث

$$\Pr(X = c) = 1$$

نجد أن:

$$M(t) = E(e^{tx}) = 1 \cdot e^{tc} + 0 \cdot e^{tx \neq c} = e^{tc}$$

$$\phi(t) = M(it) = e^{itc}$$

مثال (5 - 1 - 10 ج): في التوزيع المعتاد:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

أوجد  $M(t)$  و  $\phi(t)$ .

(الحل)

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-t\sigma)^2/2\sigma^2} dz, \quad Z = x - \mu \\ &= e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

$$\phi(t) = M(it) = e^{it\mu - t^2\sigma^2/2}$$

إذا كانت  $\mu = 0$  يكون التوزيع متماثلاً حول الصفر وتكون  $\phi(t)$  دالة حقيقية طبقاً لنظرية (5 - 1 - 2 ج)

$$= (\mu + t\sigma^2) e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} = [(\mu + t\sigma^2)^2 + \sigma^2] e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$$

$$M''(0) = \mu \text{ و } M''(0) = \mu^2 + \sigma^2 \text{ إذن للتوقع يساوى } \mu$$

$$E(X) = M'(0) = \mu$$

وتباين  $X$  يساوى  $\sigma^2$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = M''(0) - M'(0)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

مثال (5 - 1 - 10 د): في التوزيع البواسوني المعطى في مثال (5 - 1 - 10 أ) أثبت أن جميع عزوم (وبالتالي مترامكات) التوزيع موجودة وأوجد المترامكات وكذلك الدالة المولدة للمترامكات العائلية والمترامكات العائلية لهذا التوزيع.

(الحل)

في مثال (5 - 1 - 10 أ) وجدنا أن الدالة المميزة  $\phi(t)$  للتوزيع البواسوني هي:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \exp[-\lambda(1 - e^{it})] = e^{-\lambda} [e^{(\lambda e^{it})}] = e^{-\lambda} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^j}{j!} \right] \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{ijt} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!}\end{aligned}$$

أي أن:

$$\phi(t) = e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

وحيث أن  $\mu'_r$  هو معامل  $\frac{(it)^r}{r!}$  في مفكوك  $\phi(t)$  إذن

$$\mu'_r = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} S$$

حيث S يمثل مجموع متسلسلة لانهايتية هو المجموع:

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

ويمكن إثبات أن المجموع S محدود إذ بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة التي مجموعها S نجد أن نسبة الحد الذي ترتيبه  $(n+1)$  إلى الحد الذي ترتيبه n هي:

$$R_n = \frac{\lambda^{n+1} (n+1)^r}{(n+1)!} + \frac{\lambda^n n^r}{n!} = \frac{\lambda}{(n+1)} \left[ 1 + \frac{1}{n} \right]^r$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

فإذا كانت  $\lambda$  كمية محدودة نجد أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \rightarrow 0$$

وهذا يدل على أن  $S$  يمثل مجموع متسلسلة لانهائية تقاربية لجميع قيم  $\lambda$  المحدودة. إذن  $\mu'_r$  موجود لجميع قيم  $r$  أي أن جميع العزوم المطلقة والعادية موجودة وبالتالي فإن المتراكمت من جميع الدرجات موجودة. والدالة المولدة للمتراكمت هي:

$$K(t) = \ln \phi(t) = \ln [e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}] = -\lambda + \lambda e^t = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}$$

إن المتراكمة  $k_r$  (وهي معامل  $\frac{(it)^r}{r!}$ ) في مفكوك  $K(t)$  هي:

$$k_r = \lambda$$

لجميع قيم  $r$ . أي أن جميع متراكمت التوزيع متساوية وتساوى  $\lambda$ .

من مثال (5 - 1 - 10) يمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم العاملية بوضع  $(1+t)$  بدلا من  $t$  في الدالة  $P(t)$  فنحصل على الدالة المولدة للعزوم العاملية  $P(1+t)$  في الصورة التالية:

$$P(1+t) = e^{\lambda t}$$

إن الدالة المولدة للمتراكمت العاملية هي:

$$\omega(t) = \ln P(1+t) = \lambda t$$

أي أن المتراكمة العاملية الأولى (معامل  $\frac{t}{1!}$ ) تساوى  $\lambda$  وباقي المتراكمت

العاملية أصفار.

مثال (5 - 1 - 10 هـ): إذا كان  $X$  متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < X < \infty$$

أوجد الدالة المميزة والدالة المولدة للعزوم وجميع العزوم الموجودة لهذا التوزيع.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(الحل)

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{itx} e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{x(1+it)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x(1-it)} dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+it} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-it} \right)\end{aligned}$$

إذن:

$$\phi(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty$$

ويمكن إيجاد مفكوك  $\phi(t)$  في شكل متسلسلة ماكلورين في جوار حول  $t=0$  كما يلي:

لأى عدد صغير موجب  $h$  نجد أن:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= (1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots \\ &= 1 + (it)^2 + (it)^4 + (it)^6 + \dots + (it)^{2m} + \dots\end{aligned}$$

وحيث أن  $\mu_r'$  هو معامل  $\frac{(it)^r}{r!}$  إذن كل العزوم الفردية أصفار أما العزوم

الزوجية فنحصل عليها من العلاقة:

$$\mu_{2m} = (2m)! \quad , \quad m = 1, 2, \dots$$

والدالة المولدة للعزوم هي:

$$M(t) = \phi\left(\frac{t}{i}\right) = \frac{1}{1-t^2}$$

ونلاحظ أيضاً أن الدالة المميزة لهذا التوزيع دالة حقيقية وذلك لأن التوزيع متماثل حول الصفر.

(5-11) إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي باستخدام الدالة المميزة:

رأينا في البند (5-11) أن دالة التوزيع الاحتمالي لأى متغير عشوائى تحدد دالته المميزة تحديداً وحيداً. وفي هذا البند نقدم صيغة تسمى "صيغة التعاكس" Inversion Formula قدمها ليفى (Lévy (1925 وهو ما نقدمه فى نظرية (5-11) التالية

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ومنها نوضح أن لكل دالة توزيع احتمالي توجد دالة مميزة وحيدة كما أن لكل دالة مميزة توجد دالة توزيع احتمالي وحيدة وهذا ما يعرف بنظرية "التقابل الوحيد" Uniqueness Theorem وهو ما نلقمه في نظرية (5-1-11 ب).

نظرية (5-1-11 أ) نظرية للتعاكس:

إذا كان  $X$  متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  ودالته المميزة  $\phi(t)$  حيث  $F(x)$  دالة مستمرة عند النقطتين  $x = a \pm h$  و  $h > 0$  فإن:

$$(5.1.52): F(a+h) - F(a-h) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin ht}{t} e^{-iat} \phi(t) dt$$

(الإثبات)

مستنداً للإثبات لحالة المتغير العشوائي المستمر علماً بأن الإثبات في حالة المتغير العشوائي المتقطع هو نفس الإثبات مع استخدام علامات المجموع  $\Sigma$  بدلاً من التكاملات.

ضع:

$$(5.1.53): J(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin ht}{t} e^{-iat} \phi(t) dt$$

وبالتعويض عن  $\phi(t)$  في المعادلة السابقة من (5.1.3) نحصل على:

$$J(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} f(x) dx \right] dt$$

يمكن تبديل ترتيب علامتي التكامل في العلاقة السابقة وذلك لأن حدود التكامل بالنسبة للمتغير  $t$  محدودة ( $\pm T$ ) والتكامل بالنسبة للمتغير  $x$  متقارب تقارب مطلق — أى أن التكامل محدود (موجود) ويظل محدود بعد تغيير الترتيب، حيث:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} f(x) dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} \right| |f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h \left| \frac{\sin ht}{ht} \right| |f(x)| dx \leq h \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = h \end{aligned}$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبتبادل ترتيب التكامل نحصل على:

$$\begin{aligned} J(T) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T}^T \frac{\sin ht}{t} e^{it(x-a)} f(x) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-T}^T \frac{\sin ht}{t} \{ \cos(x-a)t + i \sin(x-a)t \} f(x) dt \right] dx \end{aligned}$$

وحيث إن  $\frac{\sin ht \sin(x-a)t}{t}$  دالة فردية في الفترة  $-T \leq t \leq T$  و  $\frac{\sin ht \cos(x-a)t}{t}$  دالة زوجية في نفس الفترة إذن

$$J(T) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^T \frac{\sin ht}{t} \cos(x-a)t dt \right] f(x) dx$$

وباستخدام العلاقة:

$$\sin m \cos n = \frac{1}{2} [\sin(m+n) + \sin(m-n)]$$

وبوضع  $m = ht$  و  $n = x(a-t)$  في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} (5.1.54): J(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(x-a+h)t}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(x-a-h)t}{t} dt \right] f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x, T) f(x) dx \end{aligned}$$

حيث  $g(x, T)$  هي الصيغة الموجودة داخل القوس المربع في العلاقة السابقة.

وحيث أنه من المعروف في التحليل الرياضي وحساب التكامل أن التكامل

محدود القيمة bounded لجميع قيم  $T > 0$  وأنه يؤول إلى  $\frac{1}{2}\pi$  عندما  $T \rightarrow +\infty$  إذن:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , \alpha < 0 \\ 0 & , \alpha = 0 \\ \frac{1}{2} & , \alpha > 0 \end{cases}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبهذا يمكن استخدام التكامل السابق لإيجاد النهاية التالية:

$$(5.1.55): \lim_{T \rightarrow \infty} g(x, T) = \begin{cases} 0 & , x < a - h ; x > a + h \\ \frac{1}{2} & , x = a \pm h \\ 1 & , a - h < x < a + h \end{cases}$$

حيث  $g(x, T)$  كما في (5.1.54).

والمطلوب الآن إيجاد  $\lim_{T \rightarrow \infty} J(T)$  للحصول على (5.1.52) حيث  $J(T)$  كما في

(5.1.54) ومن الواضح أنه يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل حيث أن الناتج  $\lim_{T \rightarrow \infty} g(x, T)$  يمثل كمية محدودة كما يتضح من (5.1.55) وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} J(T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, T) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} g(x, T) f(x) dx \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{a-h} + \int_{a-h}^{a+h} + \int_{a+h}^{\infty} \right] \lim_{T \rightarrow \infty} g(x, T) f(x) dx \end{aligned}$$

وبالتعويض من (5.1.55) نجد أن:

$$(5.1.56): \lim_{T \rightarrow \infty} J(T) = \int_{a-h}^{a+h} f(x) dx = F(a+h) - F(a-h)$$

من (5.1.53) و (5.1.56) نحصل على (5.1.52).

هـ. ط. ث

العلاقة (5.1.52) تسمى بـ "صيغة التعاكس" The Inversion Formula. وسوف نستخدم هذه الصيغة في إيجاد النظرية الهامة التالية (نظرية التقابل الوحيد).

نظرية (5-1-11 ب) "نظرية التقابل الوحيد" "Uniqueness Theorem":

دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لأي متغير عشوائي  $X$  تتحدد تحديداً وحيداً

بواسطة دالته المميزة  $\phi(t)$  بالعلاقة:

$$(5.1.57): F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx}}{it} \phi(t) dt$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الإثبات)

للمعدان  $h$  و  $a$  فى نظرية (5-1-11) السابقة عدنان اختياريان والنقطتان  $x = a \pm h$  نقطتان اختياريان أيضاً وفترضنا أن الدالة  $F(x)$  مستمرة عند هاتين النقطتين وبالتالي عند معرفة الدالة المميزة  $\phi(t)$  لى متغير عشوائى  $X$  فإن العلاقة (5.1.52) تعطى احتمال أن المتغير  $X$  يقع داخل الفترة  $x_1 \leq X \leq x_2$  حيث  $x_1 = a - h$  و  $x_2 = a + h$  والنقطتان  $x_1$  و  $x_2$  نقطتى استمرار للدالة  $F(x)$  وذلك بالعلاقة:

$$\Pr(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

نفرض أن نقطة استمرار للدالة  $F(x)$  وان  $x_1 \rightarrow -\infty$  بحيث أن مرور  $x_1$  إلى  $(-\infty)$  يكون من خلال نقط استمرار الدالة  $F(x)$ . إذن متتابعة الفروق  $F(x) - F(x_1)$  يتم تحديدها بواسطة الدالة  $\phi(t)$  وتتقارب إلى نهاية محدودة هى  $F(x)$  كما يتضح مما يلى:

من العلاقة (5.1.52) نجد أن:

$$F(x) - F(x_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \left( \frac{e^{iht} - e^{-iht}}{2it} \right) e^{-itx} \phi(t) dt$$

وبما أن  $x = x_2 = a + h$  و  $x_1 = a - h$  إذن:

$$F(x) - F(x_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left( \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx}}{it} \right) \phi(t) dt$$

وبأخذ نهاية متتابعة الفروق السابقة عندما  $x_1 \rightarrow -\infty$  من خلال نقطة استمرار الدالة  $F(x)$  إذن:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} [F(x) - F(x_1)] &= F(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left( \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx}}{it} \right) \phi(t) dt \end{aligned}$$

هـ. ط. ث.

ملاحظة (5-1-11أ): منطوق النظرية السابقة يفهم منه أنه إذا كان أى متغيران عشوائيان  $X_1$  و  $X_2$  لهما دالتى التوزيع الاحتمالى  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

والدالتين المميزتين  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  فإن التوزيعان  $F_1(x)$  و  $F_2(x)$  يكونا متطابقان (أي أنهما في الواقع توزيع واحد  $F(x)$ ) إذا وفقط إذا كانت الدالتان  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  متطابقتان. لهذا نقول دائماً أن لكل دالة توزيع احتمالي دالة مميزة وحيدة ولكل دالة مميزة دالة توزيع احتمالي وحيدة وهذه علاقة تقابل وحيد - one to one correspondence بين الدالة المميزة  $\phi(t)$  ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لأي متغير عشوائي.

بعد أن أثبتنا في النظرية السابقة أن الدالة المميزة للمتغير العشوائي تحدد دالة توزيعه الاحتمالي تحديداً وحيداً، نقدم فيما يلي نظرية يمكن بواسطتها الحصول على دالة كثافة احتمال أي متغير عشوائي مستمر من دالته المميزة  $\phi(t)$  تحت شرط هام هو أن تكون الدالة  $g(t) = |\phi(t)|$  دالة تكاملية لجميع قيم  $t$  الحقيقية.

نظرية (5 - 1 - 11 ج):

إذا كانت القيمة الموجبة للدالة المميزة  $\phi(t)$  للمتغير العشوائي  $X$  تكاملية في الفترة  $(-\infty, \infty)$  أي تحقق العلاقة:

$$(5.1.58): \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| dt < \infty$$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير  $X$  تكون مستمرة استمراراً مطلقاً Absolutely Continuous، وتكون مشتقتها التفاضلية  $F'(x) = f(x)$  (دالة كثافة الاحتمال) موجودة ومستمرة لجميع قيم  $x$  ويمكن الحصول عليها من العلاقة:

$$(5.1.59): f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \phi(t) dt$$

(الإثبات)

في الواقع يتضح من العلاقة (5.1.58) أن التكامل في الطرف الأيمن من العلاقة (5.1.52) موجود Exists وذلك لأن:

$$(5.1.60): I = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{t} e^{-itz} \phi(t) dt \right| \leq h \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin ht}{ht} \right| \cdot |e^{-itz}| \cdot |\phi(t)| dt$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وحيث لن:  $|e^{-itx}| = 1$  و  $\left| \frac{\sin ht}{ht} \right| \leq 1$  إذن

$$I \leq h \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| dt < \infty$$

حسب فرض النظرية.

ومادام التكامل في الطرف الأيمن من علاقة (5. 1. 52) موجود، إذن بقسمة طرفي هذه العلاقة على  $2h$  نحصل على:

$$\frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{ht} e^{-itx} \phi(t) dt$$

حيث  $x-h$  و  $x+h$  نقطتي اتصال للدالة  $F(x)$  وبأخذ نهاية طرفي العلاقة السابقة عندما  $h \rightarrow 0$  إذن:

$$(5. 1. 61): \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ht}{ht} e^{-itx} \phi(t) dt$$

وحيث أن الدالة المكاملة في العلاقة السابقة تزول إلى  $e^{-itx} \phi(t)$  عندما  $h \rightarrow 0$  وتكامل الطرف الأيمن بعد هذا يظل موجود كما يتضح من (5. 1. 60) إذن التكامل في الطرف الأيمن للعلاقة (5. 1. 61) موجود. لذا يمكن إدخال النهاية  $h \rightarrow 0$  داخل علامة التكامل في العلاقة (5. 1. 61) فنحصل على:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ht}{ht} \right) e^{-itx} \phi(t) dt$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt$$

وحيث أن الطرف الأيمن من العلاقة السابقة يعتبر دالة مستمرة في  $x$  إذن النهاية في الطرف الأيسر موجودة وتساوي المشتقة التفاضلية للدالة  $F(x)$ ، أي دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  وهذا يثبت صحة العلاقة (5. 1. 59)، وحيث أن التكامل في هذه العلاقة متقارب تقارب مطلق ومنظم إذن الدالة  $f(x)$  موجودة ومستمرة لجميع قيم  $x$ .

هـ. ط. ث

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ملاحظة (5-1-11 ب): مما هو جدير بالذكر أن العلاقة (5.1.59) تعتبر معكوس العلاقة (5.1.3) الخاصة بحالة التوزيعات المستمرة حيث أننا في النظرية السابقة نفترض أن دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  دالة مستمرة استمراراً مطلقاً (أي ليست مجرد مستمرة من ناحية اليمين) مما يجعل للنظرية السابقة خاصة بالتوزيعات المستمرة فقط.

ملاحظة (5-1-11 ج): عندما نشترط في دالة التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي أن تكون مستمرة وتفاضلية عند جميع قيم  $x$  فإننا نعني بذلك أنها دالة توزيع احتمالي لمتغير مستمر وأن دالة كثافة احتمال هذا المتغير موجودة ومستمرة عند جميع قيم  $x$ .

ملاحظة (5-1-11 د): في التكامل الآتي:

$$(5.1.62): I(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \phi(t) dt$$

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لها مشتقة تفاضلية  $f(x)$  موجودة نجد من (5.1.59) أن:

$$(5.1.63): \lim_{T \rightarrow \infty} I(T) = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} f(x)/2T = 0$$

أي أن  $I(T) \rightarrow 0$  عندما  $T \rightarrow \infty$  وذلك لجميع قيم  $x$  التي تكون عندها  $F(x)$  دالة مستمرة وتفاضلية أي عندما تكون  $f(x)$  دالة مستمرة وموجودة عند جميع قيم  $x$ . لهذا عند وجود دالة مميزة  $\phi(t)$  ونرغب في معرفة دالة التوزيع الاحتمالي أو دالة كثافة الاحتمال المقابلة للدالة  $\phi(t)$  باستخدام العلاقة (5.1.59) لابد من التأكد قبل استخدام هذه العلاقة من أن  $\phi(t)$  دالة مميزة لمتغير مستمر وذلك بالتحقق من صحة العلاقة (5.1.63).

مثال (5-1-11 أ): ما هي دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$ ، إذا كانت موجودة (محدودة)، للمتغير العشوائي  $X$  الذي له الدالة المميزة التالية:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & , \text{ for } |t| < 1 \\ 0 & , \text{ for } |t| > 1 \end{cases}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الحل)

الدالة المميزة  $\phi(t)$  تكتملاً مطلقاً في الفترة  $(-\infty < t < \infty)$  أى تحقق العلاقة (5. 1. 58) إذن التوزيع الاحتمالى للمتغير  $X$  فى حالة وجوده يكون توزيعاً مستمراً ويمكن استخدام العلاقة (5. 1. 59) لإيجاد دالة كثافة احتماله  $f(x)$  حيث نجد أن:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 (1+t) e^{-itx} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) e^{-itx} dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[ \frac{e^{-itx}}{-itx} (1+t) \right]_{-1}^0 - \frac{1}{-ix} \int_{-1}^0 e^{-itx} dt = \frac{-1}{ix} + \frac{1}{ix} \left[ \frac{e^{-itx}}{-ix} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{-1}{ix} - \frac{1}{(ix)^2} (1 - e^{ix}) \end{aligned}$$

وبالمثل نجد أن:

$$I_2 = \frac{1}{ix} + \frac{1}{(ix)^2} (e^{-ix} - 1).$$

إذن

$$f(x) = \frac{1}{2\pi x^2} (2 - e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{\pi x^2} (1 - \cos x).$$

مثال (5 - 1 - 11 ب): لوجد توزيع المتغير العشوائى  $X$ ، إذا كان موجود، إذا علمت أن دالته المميزة هى:

$$\phi(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

### (الحل)

بما أن  $e^{-|t|} > 0$  لجميع قيم  $t$  إذن  $|\phi(t)| = \phi(t)$  وتحقق العلاقة (5. 1. 58) حيث:

$$\begin{aligned} \int |\phi(t)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt = \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = (e^t)_{-\infty}^0 + (-e^{-t})_0^{\infty} \\ &= 2 < \infty \end{aligned}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وهذا يوضح أن التوزيع، في حالة وجوده، يكون مستمراً ودالة كثافة احتماله معطاة بالعلاقة (5. 1. 59) في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^t e^{-itx} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-itx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{t(1-ix)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t(1+ix)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-ix} e^t \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(-1)}{(1+ix)} e^{-t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1-ix)} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+ix)} \end{aligned}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

والمدى هنا  $(-\infty \leq x \leq \infty)$  لأن  $f(x)$  طبقاً للعلاقة (5. 1. 58) تكون موجودة لجميع قيم  $x$ . وهذا التوزيع يسمى توزيع كوشي.

**ملاحظة (5-1-11هـ):** لكي نحدد  $f(x)$  بواسطة  $\phi(t)$  من العلاقة (5. 1. 59) طبقاً لنظرية (5-1-11جـ) لابد أن تكون الدالة  $\phi(t)$  معرفة لجميع قيم  $t$  في كل الفترة  $-\infty \leq t \leq \infty$ ، حيث أن معرفة  $\phi(t)$  على فترة محدودة غير كافٍ في الحقيقة لتحديد  $f(x)$  تحديداً وحيداً. وهذا تم توضيحه بواسطة Gnedenko حيث قدم دلتين مميزتين متطابقتين في فترة محدودة لـ  $t$  ولكنهما غير متطابقتان لجميع قيم  $t$  وأثبت أن ذلك غير كافٍ لتحديد  $f(x)$  تحديداً وحيداً ولكن يوجد مثال أسهل قدمه Khintchine وهو ما سنقدمه في المثال التوضيحي التالي:

**مثال (5-1-11جـ):** "مثال توضيحي"

نعرف من مثال (5-1-11أ) أن:

$$(5. 1. 64): \phi_1(t) = \begin{cases} 1-|t|, & \text{for } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{for } |t| > 1 \end{cases}$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نعتبر دالة مميزة لمتغير عشوائى مستمر  $X$  دالة كثافة احتماله  $f(x)$  هي:

$$(5.1.65): f(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

وبإيجاد مفكوك الدالة:  $g(t) = |t|$  فى المدى  $(-\infty \leq t \leq \infty)$  فى متسلسلة فوريير Fourier Series نجد أن:

$$(5.1.66): |t| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$

وبما أن  $|t|$  دالة زوجية فى الفترة  $|t| \leq 1$  إذن يمكن حساب المعاملات  $a_0, a_n, b_n$  من الصيغ التالية:

$$(5.1.67): b_n = 0; \quad a_0 = 2 \int_0^1 t \, dt = 1$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt = \frac{2}{n^2 \pi^2} \int_0^{n\pi} u \cos u \, du$$

وبالتكامل بالتجزئ

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} [u \sin u + \cos u]_0^{n\pi} = \frac{2[\cos n\pi - 1]}{n^2 \pi^2}$$

وحيث أن  $\cos n\pi$  تساوى الواحد عندما تكون  $n$  عدد زوجى وتساوى الصفر عندما تكون  $n$  عدد فردى إذن:

$$a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_{2k-1} = \frac{-4}{(2k-1)^2 \pi^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

وبالتعويض عن  $a_0, a_n, b_n$  فى العلاقة (5.1.66) نجد أن:

$$|t| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi t}{(2k-1)^2}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

فإذا عرفنا الدالة  $\phi_2(t)$  بالعلاقة:

$$\phi_2(t) = 1 - |t|$$

فيمكن كتابة  $\phi_2(t)$  في الصورة التالية:

$$(5.1.68): \phi_2(t) = 1 - |t| = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi t}{(2k-1)^2} ; -\infty \leq t \leq \infty.$$

وبتحقق الطرف الأيمن من العلاقة السابقة نجد أنه يمثل الدالة المميزة لمتغير

متقطع  $Y$  دالة احتماله تساوى  $\frac{1}{2}$  عندما  $Y = 0$  وتساوى  $\frac{2}{m^2\pi^2}$  عندما  $Y = m\pi$

لجميع قيم  $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  وحيث أن أعداد صحيحة فردية فيمكن كتابتها في الصورة  $m = 2k-1$  و  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  أي أن  $Y$  متغير متقطع دالة احتماله  $P(Y)$  مطاة بالصيغة التالية:

$$(5.1.69): P(0) = \Pr(Y = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P[(2k-1)\pi] &= \Pr[Y = (2k-1)\pi] \\ &= \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2} ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

ويمكن التكد من أن  $\phi_2(t)$  هي الدالة المميزة للمتغير المتقطع  $Y$  كما يلي:

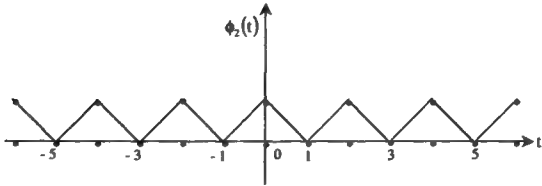
$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= E(e^{itY}) = \frac{1}{2}e^{it \cdot 0} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2} e^{it(2k-1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi t + i \sin(2k-1)\pi t}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t\pi}{(2k-1)^2} \end{aligned}$$

وهي نفس العلاقة (5.1.68).

إن من (5.1.64) و (5.1.68) نجد أن  $\phi_1(t) = \phi_2(t)$  في الفترة  $|t| \leq 1$  وذلك بالرغم من أنهما دالتين مميزتين لتوزيعين مختلفين. ولكن في الفترة  $|t| > 1$  نجد أن

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

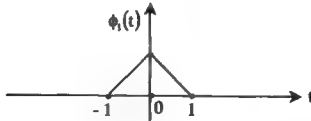
$\phi_1(t) \neq \phi_2(t)$  إذ لن  $\phi_1(t) = 0$  بينما  $\phi_2(t) \neq 0$  حيث لن القيم التي تأخذها  $\phi_2(t)$  في الفترة  $|t| \leq 1$  تتكرر بفترات طول كل منها 2 على طول محور  $t$  كما الشكل التالي:



أى لن:

$$(5.1.70): \phi_2(t) = 1 - |t|, \quad |t| \leq 1.$$

وفى المدى  $|t| > 1$  تكون قيم  $\phi_2(t)$  هي تكرارات فترية لنفس قيمها فى الفترة  $|t| \leq 1$  وذلك على فترات طول كل منها 2. كما يمكن تمثيل  $\phi_1(t)$  فى الشكل التالي:



من الشكلين السابقين نلاحظ أن  $\phi_1(t) = \phi_2(t)$  فى الفترة  $|t| \leq 1$  ولكن خارج هذه الفترة  $\phi_1(t) \neq \phi_2(t)$ .

فى نظرية (5-1-11 جـ) قمنا بالعلاقة (5.1.59) التى نوجد بها دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  للمتغير المستمر  $X$  من دالته المميزة ولكننا لم نقدم صيغة ممتثلة للمتغير المنقطع، لذلك نقدم فيما يلى صيغة لإيجاد دالة لحتمال المتغير المنقطع من دالته المميزة من خلال النظرية التالية:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نظرية (5-1-11 د):

إذا كان  $X$  متغير عشوائي متقطع يأخذ القيم  $X_k = b + hk$  حيث  $k$  عدد صحيح و  $h > 0$  باحتمالات:

$$(5.1.71): P_k(x) = Pr(X = x_k) = P_k \quad ; \quad x = x_k$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

$$P_k \geq 0, \quad \sum_k P_k = 1$$

والدالة المميزة للمتغير  $X$  هي:

$$(5.1.72): \phi(t) = \sum_k e^{itx_k} P_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{it(b+hk)} P_k$$

فإن:

$$(5.1.73): P_k = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(b+hk)} \phi(t) dt$$

(الإثبات)

بفرض أن  $r$  عدد صحيح، وبضرب طرفي العلاقة (5.1.72) السابقة في  $\exp[-it(b+rh)]$  نحصل على:

$$(5.1.74): e^{-it(b+rh)} \phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-it(r-k)h} P_k$$

كما أن:

$$(5.1.75): \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(r-k)h} dt = 0 \quad ; \quad r \neq k$$

$$= \frac{2\pi}{h} \quad ; \quad r = k$$

وبالرجوع إلى العلاقة (5.1.74) يمكن وضعها في الصورة التالية:

$$(5.1.76): \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq r}}^{\infty} e^{-it(r-k)h} P_k + P_r = e^{-it(b+rh)} \phi(t)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبمكاملة طرفى العلاقة السابقة من  $-\frac{\pi}{h}$  إلى  $\frac{\pi}{h}$  مع الأخذ فى الاعتبار أن المتسلسلة اللانهائية فى الجانب الأيسر من العلاقة السابقة متقاربة تقارب مطلق (لأن  $\sum P_k = 1$ )، فيمكن إدخال علامة التكامل داخل المجموع، إذن:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq r}}^{\infty} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(r-k)h} P_k dt + P_r \int_{-\pi/h}^{\pi/h} dt = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(b+rh)} \phi(t) dt$$

وبالتعويض فى العلاقة السابقة عن التكامل الموجود فى (5. 1. 75) نجد أن:

$$2\pi P_r = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(b+rh)} \phi(t) dt$$

وبكتابة  $k$  بدلا من  $r$  فى العلاقة السابقة نحصل على العلاقة (5. 1. 73) المطلوب إثباتها.

هـ. ط. ث

ملاحظة (5 - 1 - 11) و): إذا كان المتغير  $X$  يأخذ قيم صحيحة  $k$  فإن العلاقة (5. 1. 73) تأخذ الصورة:

$$(5. 1. 77): P_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \phi(t) dt$$

إذ أنه عندما  $x_k = b + hk = k$  تكون  $h = 1$  و  $b = 0$ .

لاحظ التشابه بين العلاقة (5. 1. 59) للمتغير المستمر وبين كل من العلاقتين المناظرتين (5. 1. 73) و (5. 1. 77) للمتغير المنقطع.

ملاحظة (5 - 1 - 11) ز):

(1) يتضح من العلاقة بين الدالة المميزة  $\phi(t)$  ودالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  أن سلوك إحداهما عند الأصل يعتمد على سلوك الأخرى عند  $\infty$ . إذ أن المشتقة التفاضلية من الدرجة  $r$  للدالة  $\phi(t)$  عند النقطة  $t = 0$  هى العزم الرائى  $\mu'_r$  الذى يعتمد وجوده على سلوك الدالة  $x^r f(x)$  عندما  $x \rightarrow \pm\infty$  حيث أن

$$x^r f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

عندما  $x \rightarrow \pm\infty$  . وبالعكس إذا كانت المشتقة التفاضلية من الدرجة  $r$  للدالة  $f(x)$  موجودة، تكون مطابقة طبقاً للعلاقة (5.1.59) بالعلاقة:

$$\frac{d^r f(x)}{dx^r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r e^{-itx} \phi(t) dt$$

حيث

$$\left| \frac{d^r f(x)}{dx^r} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^r |\phi(t)| dt$$

والتكامل السابق يعتمد في تقربه على سلوك الدالة  $t^r \phi(t)$  عندما  $t \rightarrow \pm\infty$ .

(2) كذلك لو كان المتغير العشوائي  $X$  مستمراً وله دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  فإن:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

فإذا كانت المشتقة التفاضلية من الدرجة  $n$ ،  $f^{(n)}(x)$  موجودة لجميع قيم  $x$  والدالة  $|f^{(n)}(x)|$  تكاملية بالنسبة لـ  $x$  في المدى  $(-\infty, \infty)$  فيمكن إثبات أن  $\phi(t) \rightarrow 0$  عندما  $t \rightarrow \pm\infty$ .

(الإثبات)

بالتكامل بالتجزئ نجد أن:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx = \frac{e^{itx}}{it} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{it} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{it} [\text{Cost } x + i \text{Sint } x] f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'(x) dx \end{aligned}$$

وبما أن الدالة  $f(x)$  تكاملية في المدى  $(-\infty, \infty)$  فإن لابد أن

$f(\pm\infty) \rightarrow 0$  كما أن  $\text{Cost } x$  و  $\text{Sint } x$  دوال محدودة عندما  $x \rightarrow \pm\infty$  فإن:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = \phi(t) = -\frac{1}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'(x) dx$$

$$\therefore |\phi(t)| \leq \frac{1}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبما أن  $f'(x)$  تكاملية في المدى  $(-\infty, \infty)$  فإن تكاملها يكون كمية محدودة نفرض أنه يساوي كمية ثابتة  $k_1$

$$\therefore |\phi(t)| < \frac{k_1}{|t|}$$

ويتكرر ما سبق نصل إلى أن

$$|\phi(t)| < \frac{k}{|t|^n}$$

حيث  $k$  كمية ثابتة محدودة وعندما  $t \rightarrow \pm\infty$  نصل إلى أن  $\phi(t) \rightarrow 0$ .

هـ. ط. ث

(3) أما إذا كان المتغير  $X$  متقطعاً يأخذ القيم  $x = x_j$  باحتمالات  $P_j$  فإن:

$$\phi(t) = \sum_j P_j e^{itx_j}$$

المتسلسلة السابقة متقاربة تقارب مطلق ومنظم لجميع قيم  $t$  حيث أن

$$\sum_j |P_j e^{itx_j}| = \sum_j P_j = 1$$

وكل حد من حدود هذه المتسلسلة عبارة عن دالة في  $\sin t x_j$ ،  $\cos t x_j$  لذلك فكل حد يعتبر دالة دورية Periodic في  $t$  ولذلك فإنه لا يؤول إلى الصفر عندما  $t \rightarrow \pm\infty$  وكذلك مجموع المتسلسلة لا يؤول إلى الصفر عندما  $t \rightarrow \pm\infty$  وهذا على خلاف الدالة المميزة للمتغير المستمر. وكمثال على ذلك، الدالة المميزة للمتغير المتقطع  $X$  الذي له دالة الاحتمال:

$$P(x) = 1, \quad x = 0 \\ = 0 \quad \text{غلاف ذلك} \quad x \neq 0$$

دالته المميزة

$$\phi(t) = 1 \cdot e^{it \cdot 0} + 0 \cdot e^{itx} \Big|_{x \neq 0} = 1$$

أي أن  $\phi(t) = 1$  وهي بذلك لا تؤول إلى الصفر عندما  $t \rightarrow \pm\infty$ .

ملاحظة (5-1-11 ح) الشروط الواجب توافرها في الدالة لتكون دالة مميزة:

نعرف أن أي دالة موجبة وتكاملية في المدى المعرفة عليه يمكن أن تكون دالة كثافة احتمال. كما أن أي دالة غير تنكصية وتترديد من صفر إلى الواحد الصحيح في

### الفصل الخامس - الدوال المميزة

المدى المعرفة عليه يمكن أن تكون دالة توزيع احتمالي ولكن الشروط الواجب توافرها في دالة ما لكي تكون دالة مميزة أكثر تعقيداً من ذلك. إذ نعرف مما تقدم أن أي دالة مميزة  $\phi(t)$  لابد أن يتوافر فيها مجموعة من الشروط كلها شروط ضرورية وليست كافية لكي تكون دالة مميزة، من هذه الشروط ما يلي:

$$(1) \text{ يجب أن تكون } \phi(t) \text{ دالة مستمرة في } t.$$

$$(2) \text{ يجب أن تكون } \phi(t) \text{ معرفة عند جميع قيم } t.$$

$$(3) \text{ يجب أن تكون } \phi(0) = I.$$

$$(4) \phi(-t) = \overline{\phi(t)} : \text{ أي أن } \phi(-t) \text{ هي الكمية المرافقة للدالة } \phi(t).$$

$$(5) |\phi(t)| \leq I.$$

وهناك شروط ضرورية أخرى غير الشروط السابقة يجب توافرها في دالة ما لكي تكون دالة مميزة منها مثلاً الشرط التالي:

$$(6) \text{ الدالة } \phi(t) \text{ التي يكون مفكوكها في جوار ما للنقطة } t=0 \text{ على الشكل التالي:}$$

$$(5.1.78): \phi(t) = I + O(t^{1+\alpha}) ; \alpha > 0$$

$$\text{حيث } (t^r) \text{ كما هي معرفة في (5.1.27).}$$

أي دالة على الصورة السابقة لا يمكن أن تكون دالة مميزة لمتغير عشوائي  $X$ . وذلك لأنه بالنظر إلى مفكوك ماركوفين للدالة  $\phi(t)$  كما في (5.1.27) عندما  $r=2$  نجد أن:

$$\phi(t) = I + (it)\mu'_1 + \frac{(it)^2}{2}\mu'_2 + O(t^{1+r})$$

وبمقارنة العلاقة السابقة بالعلاقة (5.1.78) نجد أن  $\mu'_1 = \mu'_2 = 0$  وهذا معناه أن الاحتمال الكلي للمتغير العشوائي  $X$  متركزاً عند نقطة واحدة هي  $x=0$  وهذا المتغير كما نعرف دالة احتماله  $P(x)=I$  عندما  $x=0$  وتساوى الصفر خلاف ذلك وبالتالي تكون دالته المميزة  $\phi(t)=I$  لجميع قيم  $t$ . وبناء على ذلك فبن كلاً من الدوال:

$$\phi_1(t) = e^{-t} , \quad \phi_2(t) = \frac{I}{1+t^2}$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

لا يمكن لأى منهما أن تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى، بالرغم من أن كل منهما تحقق الشروط اللازمة من (1) إلى (5) السابقة ولكن مفكوك مكلورين لكل منهما فى جوار للنقطة  $t = 0$  هو على الترتيب:

$$\phi_1(t) = 1 - t^4 + \frac{t^8}{2!} - \frac{t^{12}}{3!} + \dots = 1 + o(t^3)$$

$$\phi_2(t) = (1 + t^4)^{-1} = 1 - t^4 + t^8 - t^{12} + \dots = 1 + o(t^3)$$

نجد أن كل من  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  تحقق شرط (6) السابق حيث  $3 > 1 + \alpha$ .  
لذلك لا يمكن لأى منهما أن تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى.

أما بالنسبة للشروط الكافية اللازمة لكى تكون دالة ما دالة مميزة فقد تم إيجاد العديد منها أبسطها ذلك الشرط الكافى اللازم الذى قدمه كرامير (1937) Cramér فى النظرية التالية التى سنقدمها بدون إثبات:

نظرية (5-11 هـ):

أى دالة  $\phi(t)$  محدودة bounded ومستمرة تكون دالة مميزة لمتغير عشوائى، إذا وفقط إذا، كان:

$$1: \phi(0) = 1$$

$$2: \int_0^A \int_0^A \phi(t-u) \exp\{i Z(t-u)\} dt du$$

يساوى كمية حقيقية غير سالبة لجميع قيم  $Z$  الحقيقية ولجميع قيم  $A > 0$ .

(5-2) الدالة المميزة لمجموع متغيرات عشوائية مستقلة:

(5-2-1): إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان ودالتيهما المميزتان  $\phi_1(t)$  و  $\phi_2(t)$  على الترتيب ومجموعهما  $Z = X_1 + X_2$  فإن الدالة المميزة  $\phi_Z(t)$  للمتغير  $Z$  تكون:

$$\phi_Z(t) = E(e^{itZ}) = E(e^{it(X_1+X_2)}) = E(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2})$$

وبما أن  $X_1$  و  $X_2$  مستقلان فإن المتغيران  $e^{itX_1}$  و  $e^{itX_2}$  يكونا مستقلان أيضاً حسب نظرية (2-20 أ) إذن:

$$(5.2.1): \phi_Z(t) = E(e^{itX_1}) E(e^{itX_2}) = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ويمكن تصميم النتيجة السابقة إلى حالة  $n$  من المتغيرات المستقلة كما في النظرية التالية:

نظرية (5-2-1):

إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, X_2, \dots, X_n$  متغيرات مستقلة ودوالها المميزة هي:

$$\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$$

على الترتيب فإن الدالة المميزة لمجموع المتغيرات المستقلة  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  هي الدالة:

$$(5.2.2): \phi_Z(t) = \phi_1(t) \phi_2(t) \dots \phi_n(t).$$

والنظرية السابقة توضح أن استقلال المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  يعتبر شرطاً كافياً للحصول على النتيجة (5.2.2). ولكنه لا يعتبر شرطاً ضرورياً إذ يمكن أن تكون المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  غير مستقلة ومع ذلك نحصل على نفس النتيجة كما سنوضح ذلك فيما بعد (مثال (5-10-1)).

وإذا كان المتغير العشوائي  $U$  يتكون من علاقة خطية في المتغيرات المستقلة  $X_1, \dots, X_n$  على الصورة التالية

$$(5.2.3): U = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

حيث  $C_1, \dots, C_n$  ثوابت اختيارية - وكانت  $\phi_n(t)$  هي الدالة المميزة للمتغير  $U$  و  $\phi_j(t)$  هي الدالة المميزة للمتغير  $X_j$  لجميع قيم  $j = 1, 2, \dots, n$  فيمكن إثبات أن:

$$(5.2.4): \phi_n(t) = \prod_{j=1}^n \phi_j(C_j t).$$

(5-2-2) خاصية التوليد الذاتي Reproductive Property:

نفرض أن  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان، توزيع كل منهما يعتمد على معلمة  $\theta$ ، ودالتى توزيعهما الاحتمالى  $F(x_1; \theta_1)$  و  $F(x_2; \theta_2)$  على الترتيب حيث  $\theta_1$  و  $\theta_2$  قيمتان من قيم المعلمة  $\theta$ . والمجموع  $Z = X_1 + X_2$  يمثل متغير عشوائى هو مجموع المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$ . فإذا كانت دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $Z$  هي  $F(Z; \theta_1 + \theta_2)$  فلنقول أن دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x; \theta)$  تولد نفسها ذاتياً بالنسبة

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

للمعلمة  $\theta$ . ونفس الكلام يقال عن أى دالة احتمال (المتغير منقطع) أو أى دالة كثافة احتمال (المتغير مستمر) تعتمد على معلمة  $\theta$  كدالة تولد نفسها ذاتياً بالنسبة للمعلمة  $\theta$ . وخاصية التوليد الذاتى يمكن تصنيفها إلى حالة المتغيرات المتعددة المشتركة، إذا كان المتغير العشوائى  $X$  أو المعلمة  $\theta$  أو كلاهما من النوع المتعدد. ويمكن باستخدام الدوال المميزة تقديم معيار مفيد لتحديد إذا ما كانت دالة توزيع احتمالى ما  $F(x; \theta)$  يمكن أن تولد نفسها ذاتياً (أى تتميز بخاصية التوليد الذاتى) وذلك بتقديم النظرية التالية:

نظرية (5-2-1):

إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان ذاتى توزيعهما الاحتمالى  $F(x_1; \theta_1)$  و  $F(x_2; \theta_2)$  ودلتيهما المميزتين  $\phi(t; \theta_1)$  و  $\phi(t; \theta_2)$  على الترتيب، حيث  $\theta_1$  و  $\theta_2$  ثببتان (معلمتان)، فإن لدالة  $F(x; \theta)$  تولد نفسها ذاتياً بالنسبة للمعلمة  $\theta$  - (أى أن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $Z = X_1 + X_2$  تكون  $F(Z; \theta_1 + \theta_2)$  - إذا وفقط إذا كان،:

$$(5.2.5): \phi(t; \theta_1) \phi(t; \theta_2) = \phi(t; \theta_1 + \theta_2)$$

(الإثبات)

الشرط الكافى شرط إذا:

إذا كانت

$$\phi(t; \theta_1 + \theta_2) = \phi(t; \theta_1) \phi(t; \theta_2)$$

فإنه طبقاً لنظرية التقابل الوحيد نظرية (5-1-11 ب) نجد أن:

$$F(Z; \theta_1 + \theta_2) = F(x_1; \theta_1) F(x_2; \theta_2)$$

أى أن الدالة  $F(x; \theta)$  تولد نفسها ذاتياً بالنسبة للمعلمة  $\theta$ .

الشرط الضرورى شرط فقط إذا:

نفرض أن دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x; \theta)$  تولد نفسها ذاتياً بالنسبة للمعلمة  $\theta$ . إذن عند وجود متغيرين مستقلين  $X_1$  و  $X_2$  ذاتى توزيعيهما  $F(x_1; \theta_1)$  و  $F(x_2; \theta_2)$  تكون دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $Z$  (المجموع  $Z = X_1 + X_2$ ) هى  $F(Z; \theta_1 + \theta_2)$  ومن استقلال  $X_1$  و  $X_2$  نعلم أن:

$$F(Z; \theta_1 + \theta_2) = F(x_1; \theta_1) F(x_2; \theta_2).$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وطبقاً للعلاقة (5.1.1) نجد أن:

$$\phi(t; \theta_1 + \theta_2) = \phi(t; \theta_1) \phi(t; \theta_2).$$

هـ. ط. ث

ملاحظة (5-2-1): في هذه الملاحظة نقدم حقيقة هامة هي:

إذا كان  $X$  و  $Y$  و  $Z$  متغيرات عشوائية مستقلة وكان المجموع  $X + Y + Z$  له نفس التوزيع الاحتمالي فليس من الضروري 'بصفة عامة' أن يكون المتغير  $Z$  له نفس توزيع المتغير  $Y$ ، بل قد يكون لكل منهما توزيع مختلف عن الآخر بالرغم من أن توزيع  $X + Y$  هو نفسه توزيع  $X + Z$ . وإثبات هذه الحقيقة يكفي أن نعود إلى مثال (5-1-11) حيث قلنا في هذا المثال متغيران عشوائيان  $X$  و  $Y$  حيث  $X$  متغير مستمر دالة كثافة احتماله ودالته المميزة هما:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2} ; -\infty \leq x \leq \infty$$

و

$$(5.2.6): \phi_x(t) = 1 - |t| ; |t| \leq 1$$

$$= 0 ; |t| > 1$$

و  $Y$  متغير متقطع دالة احتماله هي:

$$Pr(Y=0) = \frac{1}{2}$$

$$Pr(Y=2k-1) = \frac{2}{(2k-1)^2 \pi^2} ; k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ودالته المميزة المعطاة بالعلاقة (5.1.70) هي:

$$(5.2.7): \phi_Y(t) = 1 - |t| ; |t| \leq 1$$

وفى المدى  $|t| > 1$  تكون قيم  $\phi_Y(t)$  عبارة عن تكرارات فترية لنفس قيمها

فى الفترة  $|t| \leq 1$  على فترات متتالية متصلة طول كل منها 2.

وحيث أن المتغيران  $X$  و  $Y$  لا علاقة بينهما فهما مستقلان وبالتالي يمكن كتابة الدالة المميزة للمجموع  $X + Y$  طبقاً للعلاقة (5.1.79) فى الصورة:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ولكن من (5. 2. 6, 7) نجد أن:

$$\phi_X(t)\phi_Y(t) = \phi_{X+Y}(t)$$

لجميع قيم  $t$ .

أى أن:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_{X+X}(t)$$

وبتطبيق (5. 1. 59) على العلاقة السابقة ينضح أن توزيع مجموع المتغيران المستقلان  $X$  و  $Y$  هو نفسه توزيع مجموع متغيران مستقلان كل منهما له توزيع المتغير  $X$  وذلك بالرغم من أن توزيع  $X$  يختلف عن توزيع  $Y$  وهذا يترتب عليه الحقيقة التي ذكرناها فى بداية هذه الملاحظة وهي أنه "إذا كان  $X + Y$  و  $X + Z$  لهما نفس التوزيع فليس من الضروري "بصفة عامة" أن يكون توزيع  $Y$  يساوى توزيع  $Z$ ".

### (3 - 5) متتابعات التوزيعات الاحتمالية:

#### Sequences of Distribution Functions:

يقال على أى متتابعة من التوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\} \equiv F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$  أنها تقاربية إذا كان يوجد دالة  $F(x)$  غير تناقصية حيث  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  عند جميع نقاط استمرار  $F(x)$ .

هذا النوع من التقارب مهم جداً فى التطبيقات الإحصائية لذلك فإنه من الضروري تقديم معيار يمكننا من معرفة إذا ما كانت متتابعة ما من التوزيعات الاحتمالية تتقارب إلى توزيع احتمالى أم لا.

فى الواقع وجود النهاية  $F(x)$  عند جميع نقاط استمرارها يعتبر شرط ضرورى لتقارب المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  إلى توزيع احتمالى ولكنه ليس كافياً، إذ يمكن أن تتقارب المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  دون أن يكون هذا التقارب إلى توزيع احتمالى، إذ أن النهاية  $F(x)$  قد لا تكون دالة توزيع احتمالى. ويمكن توضيح ذلك بالمثال التالى:

مثال (5 - 3 - 1): "مثال توضيحي"

إذا كان المتغير العشوائى  $X$  له دالة كثافة الاحتمال (أو دالة الاحتمال):

$$(5. 3. 1): P_n(x) = 1 \quad ; \quad x = n$$

$$= 0 \quad ; \quad x \neq n$$

### الفصل الخامس - الدوال المميزة

أى أن الاحتمال الكلى مركز عند نقطة واحدة هي النقطة  $x = n$ ، وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالى المقابلة هي:

$$(5.3.2): F_n(x) = 0 \quad ; \quad x < n \\ = 1 \quad ; \quad x \geq n$$

وفى حالتنا هذه تكون متتابة التوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\}$  لها نهاية موجودة هي  $F(x) = 0$  أى أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0$$

لجميع قيم  $x$ .

وهذا واضح لأنه عندما  $n \rightarrow \infty$  فإن الاحتمال الكلى المركز عند النقطة  $x = n$  يتلاشى كما لو كان تحرك مكان تركيزه إلى  $\infty$ . وحيث أن النهاية  $F(x) = 0$  لجميع قيم  $x$  ليست دالة توزيع احتمالى، إذن المتتابة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى نهاية موجودة (محدودة) هي  $F(x) = 0$  لجميع قيم  $x$  ولكنها لا تمثل توزيع احتمالى.

من المثال السابق نعتبر أن أى متتابة من التوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\}$  تكون "تقريبية" إذا كان يوجد دالة غير تناقصية  $F(x)$  (ولا نقول دالة توزيع احتمالى  $F(x)$ ) حيث  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  عند جميع نقاط استمرار الدالة  $F(x)$ .

من الواضح أن  $0 \leq F(x) \leq 1$  وذلك لأن  $F_n(x)$  دالة توزيع احتمالى وبالتالي  $0 \leq F_n(x) \leq 1$  إذن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (0 \leq F_n(x) \leq 1)$$

هى:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq 1$$

أى أن:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

ويمكن الآن تقديم النظرية التالية التى سنحتاج إليها فيما بعد.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نظرية (5-3-1):

أي متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالي:

$$\{F_n(x)\} \equiv F_1(x), F_2(x), \dots$$

تحتوى على متتابعة جزئية تقاربية

$$\{F_{n_j}(x)\} \equiv F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \dots$$

تتقارب إلى نهاية هي:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) = F(x)$$

عند جميع نقاط استمرار هذه النهاية  $F(x)$  التى تكون دقما غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين وتحقق العلاقة  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

(الإثبات)

إذا كانت  $r_1, r_2, r_3, \dots$  هي مجموعة الأعداد المقيسة Rational Numbers السالبة والموجبة بما فيها الصفر وهي كما نعلم مجموعة قابلة للعد Countable، وإذا كانت  $\{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \dots$  متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالي، فإن المتتابعة:

$$F_1(r_1), F_2(r_1), F_3(r_1), \dots$$

تعتبر متتابعة لانهائية لها حد أدنى وحد أعلى Bounded من الأعداد الحقيقية حيث  $0 \leq F_j(r_1) \leq 1$  لجميع قيم  $j$ . وطبقاً لنظرية بولزانو ويستراس تكون هذه المتتابعة — مادامت لانهائية ولها حدين أدنى وأعلى — لها نقطة نهائية واحدة على الأقل has at least one limiting point معنى ذلك أن المتتابعة  $\{F_n(r_1)\}$  يوجد بها على الأقل متتابعة جزئية لها نقطة نهائية. أو بمعنى آخر يمكن القول أن المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  دائماً يوجد بها متتابعة جزئية  $Z_1$  تقاربية عند النقطة  $x = r_1$ . وينفس الأسلوب وعند النقطة  $r_2$  نجد أن المتتابعة  $Z_1$  تحتوى على متتابعة جزئية  $Z_2$  تقاربية عند  $x = r_1$  و  $x = r_2$ . ويتكرر هذه العملية نحصل بالتتابع على المتتابعات الجزئية  $Z_1, Z_2, \dots$  حيث أن المتتابعة الجزئية  $Z_{n-1}$  تحتوى على متتابعة جزئية  $Z_n$  تتقارب عند القيم  $x = r_1, r_2, \dots, r_n$  فإذا كانت المتتابعات الجزئية هي:

$$Z_1 \equiv F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), F_{n_3}(x), \dots$$

$$Z_2 \equiv F_{n_{21}}(x), F_{n_{22}}(x), F_{n_{23}}(x), \dots$$

$$Z_3 \equiv F_{n_{31}}(x), F_{n_{32}}(x), F_{n_{33}}(x), \dots$$

.....

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبأخذ أقطار الشكل السابق يمكن تكوين متتابعة جزئية  $Z$  هي:

$$Z = F_{n_{11}}(x), F_{n_{22}}(x), F_{n_{33}}(x), \dots$$

أو لتبسيط الكتابة يمكن كتابة  $Z$  في الصورة التالية:

$$(5.3.3): Z = F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), F_{n_3}(x), \dots$$

ومن الواضح أن المتتابعة  $Z$  تتقارب عند جميع النقاط  $x$  التي تمثل الأعداد المقيسة. من (5.3.3) يمكن أن نضع:

$$(5.3.4): \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_i) = C_i$$

حيث  $i = 1, 2, 3, \dots$ .

إن المتتابعة  $\{C_i\}$  متتابعة لانتهائية لها حد أدنى وحد أعلى حيث أن  $0 \leq F_{n_j}(x) \leq 1$  وبالتالي:

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_i) \leq 1$$

$$0 \leq C_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

كذلك  $C_i \leq C_k$  إذا كانت  $r_i \leq r_k$  وذلك لأن  $F_{n_j}(x)$  دالة غير تناقصية إذن عندما  $r_i \leq r_k$  تكون:

$$F_{n_j}(r_i) \leq F_{n_j}(r_k)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_i) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_k)$$

$$C_i \leq C_k$$

والآن نعرف دالة  $F(x)$  بأنها:

$$\begin{aligned} F(x) &= \text{Lower bound of } C_i \\ &= C_i \quad \text{الحد الأدنى لـ} \end{aligned}$$

لجميع قيم  $x < r_i$  وتكتب في الصورة:

$$(5.3.5): F(x) = L. b. C_i$$

لجميع قيم  $r_i > x$ .



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ومن التعريف السابق يمكن إثبات أن:

$$(1) F(x) \text{ محدودة } \text{bounded}.$$

$$(2) F(x) \text{ دالة غير تناقصية بالنسبة لـ } x.$$

$$(3) F(x) \text{ دالة مستمرة من ناحية اليمين.}$$

ويمكن توضيح ذلك من التعريف السابق للدالة  $F(x)$  كما يلي:

$$(1) \text{ بما أن } 0 \leq C_i \leq 1 \text{ لجميع قيم } i \text{ إذن}$$

$$0 \leq L.b.C_i \leq 1$$

$$\text{لجميع قيم } r_i > x$$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$(2) \text{ إذا كانت } x_1 < x_2 \text{ فإن:}$$

$$F(x_1) = L.b.C_i ; r_i > x_1$$

$$F(x_2) = L.b.C_i ; r_i > x_2$$

وبما أن مجموعة قيم  $C_i$  لجميع قيم  $r_i > x_2$  تعتبر مجموعة جزئية من مجموعة قيم  $C_i$  لجميع قيم  $r_i > x_1$ ، إذن من تعريف  $F(x)$  نجد أن الحد الأدنى للمجموعة الجزئية أكبر من أو يساوى الحد الأدنى للمجموعة الكلية وبالتالي:  $F(x_2) \geq F(x_1)$  أو  $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$  عندما  $x_2 > x_1$ ، إذن  $F(x)$  دالة غير تناقصية.

$$(3) \text{ وبما أن الدالة } F(x) \text{ محدودة } \text{bounded} \text{ وغير تناقصية ومعطاة بالعلاقة}$$

$$F(x) = L.b.C_i = L.b.\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_i)$$

لجميع قيم  $r_i > x$ ، وحيث أن  $F_{n_j}(\cdot)$  دالة توزيع احتمالي فهي مستمرة من ناحية اليمين — كما ذكرنا في (2 - 5 - 2) رقم (4) — إذن  $F(x)$  أيضاً مستمرة من ناحية اليمين.

والآن سوف نثبت أنه عند كل نقطة استمرار للدالة  $F(x)$  يكون:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) = F(x)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

فإذا كانت  $x$  نقطة استمرار للدالة  $F(x)$  فيمكن اختيار عدد صغير  $0 < h$  بحيث يكون:

$$(5.3.6): F(x+h) - F(x-h) < \epsilon$$

لأي عدد صغير  $0 < \epsilon$  مهما كانت  $\epsilon$  صغيرة.

نفرض أن  $r_i$  و  $r_k$  عددين مقيمان موجودان في الفترتين  $(x-h, x)$  و  $(x, x+h)$  على الترتيب، إذن من العلاقة (5.3.5) نجد أن

$$(5.3.7): F(x-h) \leq C_i \leq F(x) \leq C_k \leq F(x+h)$$

كما أن لكل قيمة  $J$  تكون

$$F_{n_j}(r_i) \leq F_{n_j}(x) \leq F_{n_j}(r_k)$$

ويأخذ نهاية المتتابعة السابقة عندما  $J \rightarrow \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_i) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(r_k)$$

وباستخدام العلاقة (5.3.4) نجد من العلاقة السابقة أن

$$(5.3.8): C_i \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) \leq C_k$$

ومن (5.3.7) و (5.3.8) نجد أن

$$(5.3.9): \begin{cases} C_i \leq F(x) \leq C_k \\ C_i \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) \leq C_k \end{cases}$$

ومن (5.3.6) و (5.3.7) نجد أن

$$(5.3.10): C_k - C_i < \epsilon$$

وبما أن كل من  $F(x)$  و  $\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x)$  تقع داخل الحدين  $C_i$  و  $C_k$  والفرق بينهما

أقل من أي عدد صغير موجب  $\epsilon$  إذن

$$\left| \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) - F(x) \right| < \epsilon$$

حيث  $0 < \epsilon$  عدد صغير أي أن

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) = F(x)$$

هـ. ط. ث

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ملاحظة (5-3-1): النظرية السابقة تنص على أن كل متتابعة من التوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\}$  تقارب إلى دالة  $F(x)$  تحقق الخصائص التالية:

$$(1) \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$(2) \quad F(x) \text{ دالة غير تنافسية.}$$

$$(3) \quad F(x) \text{ دالة مستمرة من ناحية اليمين.}$$

ولكن النظرية لا تنص على أن الدالة  $F(x)$  تحقق شرط هام من شروط دالة التوزيع الاحتمالي وهو أن  $F(-\infty)=0$  و  $F(+\infty)=1$  أي أن  $F(x)$  قد لا تكون دالة توزيع احتمالي.

## (5-4) نظرية التوافق للدوال المميزة:

### Continuity Theorem for Characteristic Functions:

نعرف من نظرية التوافق الوحيد - نظرية (5-1-11ب) - أن هناك علاقة وحيدة One - to - One Correspondence بين الدالة المميزة  $\phi(t)$  ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للمتغير العشوائي  $X$ ، أي أن كل توزيع احتمالي له دالة مميزة وحيدة وكل دالة مميزة تحدد توزيع احتمالي وحيد. أي أن التحويلة التي نمر بها من  $F(x)$  إلى  $\phi(t)$  وبالعكس دافعا وحيدة.

والآن نقدم نظرية تبين أنه تحت شروط معينة تكون هذه التحويلة مستمرة أيضا بالإضافة إلى أنها وحيدة. وهي نظرية في غاية الأهمية للتطبيقات الإحصائية، حيث أننا أحيانا نرغب في معرفة النهاية  $F(x)$  التي تؤول إليها متتابعة من التوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\}$  عندما  $n \rightarrow \infty$ . ولكن كثيرا ما يكون معرفة النهاية  $\phi(t)$  التي تؤول إليها متتابعة الدوال المميزة  $\{\phi_n(t)\}$  المقابلة لهذه التوزيعات الاحتمالية أكثر سهولة من معرفة النهاية  $F(x)$ . في مثل هذه الحالات يمكننا النظرية التي سنتقدمها الآن من معرفة النهاية  $F(x)$  باستخدام النهاية  $\phi(t)$ ، حيث تنص النظرية التالية التي قدمها ليفي وكرامير (1937) على أن النهاية  $F(x)$  التي تؤول إليها المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  متطابقة مع (أو هي ذاتها) دالة التوزيع الاحتمالي المقابلة للنهاية  $\phi(t)$  التي تؤول إليها المتتابعة  $\{\phi_n(t)\}$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نظرية (5-4-1) نظرية التوافق

إذا كانت  $\{x_n\} = x_1, x_2, \dots$  متتابعة من المتغيرات العشوائية لها دوال التوزيع الاحتمالي:

$$\{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \dots$$

والدوال المميزة:

$$\{\phi_n(t)\} = \phi_1(t), \phi_2(t), \dots$$

فإن المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  تقتارب إلى دالة توزيع احتمالي  $F(x)$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ )، إذا وفقط إذا، تقاربت المتتابعة  $\{\phi_n(t)\}$  لجميع قيم  $t$  ( $-\infty < t < \infty$ ) إلى دالة  $\phi(t)$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ ) وكانت  $\phi(t)$  دالة مستمرة عند النقطة  $t=0$ . وإذا تحقق هذا الشرط تكون النهاية  $\phi(t)$  هي الدالة المميزة للنهاية  $F(x)$ .

(الإثبات)

أولاً: الشرط الضروري "وفاً":

لتوضيح أن الشرط ضروري نثبت أنه إذا كانت  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  لجميع قيم  $x$  فبسه "من الضروري" أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$  لجميع قيم  $t$ . ويمكن إثبات ذلك إذا كتبنا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x)$$

وبما أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  لجميع قيم  $x$  و  $e^{itx}$  دالة مستمرة لجميع قيم  $x$  أيضاً وتكاملية بالنسبة للتوزيع  $F(x)$  في الفترة  $(-\infty, \infty)$  إذن يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل حيث أن الناتج بعد ذلك يكون موجود Exists فنحصل على:

$$(5.4.1): \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lim_{n \rightarrow \infty} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \phi(t)$$

وهذا هو الشرط الضروري.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ثانياً: الشرط الكافى "إذا":

نفترض أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$  لجميع قيم  $t$  وأن  $\phi(t)$  مستمرة عند النقطة  $t = 0$  ونثبت الآن أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = f(x)$$

حيث  $F(x)$  دالة توزيع احتمالى.

إذا أثبتنا ذلك فإن الجزء الأول من النظرية يوضح أن  $\phi(t)$  هي الدالة المميزة للتوزيع  $F(x)$  كما فى العلاقة (5. 4. 1) السابقة. سبق أن ذكرنا فى نظرية (5-3-1) أن متتابعة دوال للتوزيع الاحتمالى

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_j(x), \dots$$

تحتوى على متتابعة جزئية:

$$F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \dots, F_{n_j}(x), \dots$$

وهذه الأخيرة تقترب إلى نهاية  $F(x)$  حيث  $F(x)$  دالة غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين كما أنها موجبة ولا تزيد عن الواحد الصحيح. ولكن هذا غير كافٍ لكى تكون  $F(x)$  دالة توزيع احتمالى. فلكى تكون  $F(x)$  دالة توزيع احتمالى لابد بالإضافة إلى الخصائص السابقة أن تكون  $F(+\infty) = 1$  و  $F(-\infty) = 0$ . لذلك سوف نثبت أولاً أن  $F(x)$  دالة توزيع احتمالى وكفى فى هذا أن نثبت أن  $F(+\infty) = 1$  و  $F(-\infty) = 0$ ، وذلك كما يلى:

فى العلاقة (5. 1. 52) من نظرية التعاكس إذا كتبنا  $Z$  بدلاً من  $h$  ووضعنا  $a = 0$  وكاملنا الطرفين بالنسبة لـ  $Z$  من  $0$  إلى  $h$  ( $h > 0$ ) نحصل على العلاقة التالية:

$$(5. 4. 2): \int_0^h F_{n_j}(Z) dz - \int_{-h}^0 F_{n_j}(Z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos ht)}{t^2} \phi_{n_j}(t) dt$$

فى المعادلة السابقة يمكن أخذ نهاية الطرفين عندما  $J \rightarrow \infty$  ويمكن إدخال النهاية داخل علامة التكامل حيث أن هذا مسموح به فى التكاملات السابقة للأسباب الآتية:

للتكاملات فى الجانب الأيسر من (5. 4. 2) مأخوذة على فترة محدودة والدالة المكاملة  $F_{n_j}(x)$  محدودة ( $0 \leq F_{n_j}(x) \leq 1$ ) كما أنها تزول إلى  $F(x)$  عند

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

جميع نقط استمرار  $F(x)$  لذلك يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل إذ أن التكامل بعد ذلك سيظل موجود. بالنسبة للجانب الأيمن من (5.4.2) نجد أن:

$$\left| \frac{(1 - \cos ht)}{t^2} \phi_{n_j}(t) \right| \leq \frac{1 - \cos ht}{t^2}$$

لأن  $|\phi_{n_j}(t)| \leq 1$ ، وحيث أن الدالة  $\frac{1 - \cos ht}{t^2}$  دالة تكاملية بالنسبة لـ  $t$

في المدى  $(-\infty \leq t \leq \infty)$  فإن الدالة  $\frac{1 - \cos ht}{t^2} \phi_{n_j}(t)$  دالة تكاملية بالنسبة لـ  $t$  في المدى  $(-\infty \leq t \leq \infty)$  كما أن  $\phi_{n_j}(t) \rightarrow \phi(t)$  لذلك عند أخذ نهاية الطرف الأيمن من (5.4.2) يمكن إدخال علامة النهاية داخل علامة التكامل. وعلى ذلك إذا قسمنا طرفي المعادلة (5.4.2) على  $h$  وأخذنا نهاية الطرفين عندما  $J \rightarrow \infty$  نحصل على:

$$(5.4.3): \frac{1}{h} \int_0^h F(Z) dZ - \frac{1}{h} \int_{-h}^0 F(Z) dZ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos ht)}{ht^2} \phi(t) dt$$

وبوضع  $y = ht$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos y)}{y^2} \phi\left(\frac{y}{h}\right) dy$$

والآن ببساطة التكامل بالتجزئ للطرف الأيسر من العلاقة السابقة نجد عندما  $h \rightarrow \infty$  أن:

$$(5.4.4): \lim_{h \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{h} \int_0^h F(Z) dZ - \frac{1}{h} \int_{-h}^0 F(Z) dZ \right] = F(+\infty) - F(-\infty).$$

وبالنسبة للطرف الأيمن من (5.4.3) نعلم أن  $\phi(t)$  دالة مستمرة عند النقطة  $t = 0$  (كما هو مفروض في منطوق النظرية) لذلك لأي قيمة من قيم  $t$  تكون:

$$(5.4.5): \lim_{h \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{1}{h}\right) = \phi\left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h}\right) = \phi(0)$$

— وحيث أننا لم نثبت حتى الآن أن  $\phi(t)$  دالة مميزة لذلك لم نضع  $\phi(0) = 1$  —  
— ونلاحظ أيضاً أنه لولا الفرض أن  $\phi(t)$  مستمرة عند النقطة  $t = 0$  ما كنا نستطيع

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

بإخال علامة النهاية في العلاقة (5. 4. 5). ولكن  $\lim_{n_r \rightarrow \infty} \phi_{n_r}(0) = \phi(0)$  علماً بأن  $\phi_{n_r}(0) = 1$  لجميع قيم  $n_r$  حيث أن  $\phi_{n_r}(t)$  دالة مميزة لذلك تكون:

$$\phi(0) = 1$$

وعلى ذلك يمكن أخذ نهاية الدالة المكاملة في الطرف الأيمن من (5. 4. 3) بالنسبة لـ  $h$  عندما  $h \rightarrow \infty$  (وهذا مسموح به لنفس المبررات السابقة) فيؤول الطرف الأيمن من (5. 4. 3) إلى:

$$(5. 4. 6): \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos y)}{t^2} \phi\left(\frac{t}{h}\right) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos y)}{y^2} dy = 1$$

— للحصول على التكامل الأخير السابق من (5. 4. 3, 4, 6) نجد أن:

$$F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

وحيث أن  $F(x)$  دالة غير سالبة وغير تناقصية وموجبة ولا تزيد عن الواحد الصحيح إذن لابد أن يكون:  $F(+\infty) = 1$  و  $F(-\infty) = 0$ . وبالتالي تكون الدالة  $F(x)$  دالة توزيع احتمالي. وباستخدام الجزء الأول من النظرية يترتب على ذلك أن النهاية  $F(x)$  للمتتالية  $\{F_n(x)\}$  دالة توزيع احتمالي وأن الدالة المميزة  $\phi(t)$  المقابلة للدالة  $F(x)$  هي نهاية المتتالية  $\{\phi_n(t)\}$ .

والآن إذا كان يوجد متتالية جزئية أخرى من المتتالية  $F_1(x), F_2(x), \dots$  لها النهاية  $F^*(x)$  فإنه يمكننا بالمثل بمثل إثبات أن  $F^*(x)$  دالة توزيع احتمالي وأن الدالة المميزة لهذا التوزيع تتطابق مع (أو هي ذاتها)  $\phi(t)$  وبذلك تكون الدالتان  $F(x)$  و  $F^*(x)$  لهما نفس الدالة المميزة  $\phi(t)$  وبالتالي حسب نظرية التقابل الوحيد — نظرية (5-1-11) — يكون التوزيعان  $F(x)$  و  $F^*(x)$  متطابقان — أي هما في الواقع توزيع واحد —  $F^*(x) = F(x)$ .

ومعنى هذا أن أي متتالية جزئية ستكون لها نفس النهاية  $F(x)$ . لذلك فإن المتتالية  $F_1(x), F_2(x), \dots$  لها نهاية واحدة هي  $F(x)$  وحيث أن  $F(x)$  دالة توزيع احتمالي إذن النظرية تم إثباتها.

هـ. ط. ث

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

مثال (5-4-1): "مثال توضيحي"

فى مثال (5-4-1) وجدنا أن المتغير ذو الحدين  $X$  الذى دالة احتماله:

$$P(J) = \Pr(X=J) = \binom{n}{J} P^J q^{n-J}; J=0,1,\dots,n, P+q=1, P>0$$

المميزة هى:

$$\phi(t) = [q + Pe^{it}]^n$$

ونوقعه  $\mu = nP$  وانحرافه المعيارى  $\sigma = \sqrt{nPq}$ . نفرض أننا نضع المتغير

ذى الحدين  $X$  فى صورة قياسية:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

حيث نجد من نتيجة (5-4-2) أن:

$$\phi_Y(t) = e^{-it\mu/\sigma} \phi_X(t/\sigma).$$

إن الدالة المميزة للمتغير ذى الحدين عندما يكون فى صورته القياسية تأخذ الصيغة التالية:

$$\phi_n(t) = e^{\frac{-it\mu}{\sqrt{nPq}}} [q + Pe^{it/\sqrt{nPq}}]^n$$

واستخدمنا الرمز  $\phi_n(t)$  ولم نستخدم  $\phi(t)$  للإشارة إلى أن الدالة المميزة تعتمد على المعلمة  $n$ . وسنحاول الآن إيجاد النهاية  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$  والتى سنرمز لها بالرمز  $\phi(t)$ . وحيث أن فى حالتنا هذه الحصول على  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \phi_n(t)$  أسهل من الحصول على  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$  لذلك سوف نستخدم  $\ln \phi_n(t)$  بدلا من  $\phi_n(t)$  للحصول على النهاية  $\phi(t)$ :

$$\ln \phi_n(t) = \frac{-itPn}{\sqrt{nPq}} + n \ln [1 + P(e^{it/\sqrt{nPq}} - 1)]$$

وبكتابة مفكوك  $e^{it/\sqrt{nPq}}$  فى الطرف الأيمن نجد أن:

$$\ln \phi_n(t) = \frac{-itPn}{\sqrt{nPq}} + n \ln \left[ 1 + P \frac{it}{\sqrt{nPq}} - \frac{Pt^2}{2nPq} + O(t^3 n^{-3/2}) \right]$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

حيث  $O(t^3 n^{-1/2})$  تمثل حدود تحتوى فى بسطها على  $t^3$  فما فوق وفى مقامها على  $n^{1/2}$  فما فوق، وبإيجاد مفكوك اللوغاريتم فى الطرف الأيمن:

$$\begin{aligned}\ln \phi_n(t) &= \frac{-itPn}{\sqrt{nPq}} + n \left[ \frac{itP}{\sqrt{nPq}} - \frac{Pt^2}{2nPq} - \frac{(iPt)^2}{2nPq} + O(t^3 n^{-1/2}) \right] \\ &= -\frac{t^2}{2} + O(t^3 n^{-1/2}).\end{aligned}$$

إذن لقيم  $t$  المحدودة نجد أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \phi_n(t) = \ln \phi(t) = -\frac{t^2}{2}$$

$$\therefore \phi(t) = e^{-t^2/2}$$

وطبقاً لنظرية التوافق، نجد أن توزيع المتغير ذو الحدين فى صورته القياسية يؤول إلى التوزيع الذى دالته المميزة  $e^{-t^2/2}$ . وحيث أن  $e^{-t^2/2}$  هى الدالة المميزة للمتغير المعتاد القياسى الذى توقعه صفر وتباينه الوحدة كما يتضح من مثال (5 - 1 - 10 ج) إذن: توزيع المتغير ذو الحدين فى صورته القياسية يؤول إلى التوزيع المعتاد القياسى عندما  $n \rightarrow \infty$ .

ومما هو جدير بالذكر لو أننا حاولنا إيجاد نهاية التوزيع ذو الحدين باستخدام نهاية دالة احتماله عندما  $n \rightarrow \infty$  سنجد أن دالة الاحتمال (لجميع قيم  $t$ ) تؤول إلى الصفر عندما  $n \rightarrow \infty$ ، أى أن التوزيع لا يؤول إلى أى توزيع آخر ومن السهل على القارئ إثبات ذلك. لذلك فإن استخدام نهاية الدالة المميزة هو الذى مكثنا من إيجاد نهاية التوزيع ذو الحدين طبقاً لنظرية التوافق.

ملاحظة (5 - 4 - 1): نعرف من نظرية (5 - 1 - 2) أن الدالة المميزة  $\phi(t)$  مستمرة لجميع قيم  $t$  الحقيقية. وعلى هذا يتضح من نظرية (5 - 4 - 1) السابقة أنه طالما أن النهاية  $\phi(t)$  للمتتابعة  $\{\phi_n(t)\}$  مستمرة عند النقطة الخاصة  $t = 0$  فهى مستمرة لكل قيمة من قيم  $t$ ، أى أن الشرط القليل أن الدالة  $\phi(t)$  مستمرة عند القيمة الخاصة  $t = 0$  هو شرط ضرورى لصحة النظرية. والمثال التالى يوضح أن النظرية لا تكون صحيحة إذا أغفلنا هذا الشرط.

مسألة (5 - 4 - 2): إذا كانت المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى  $X$  حيث:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$F_n(x) = \frac{x+n}{2n} ; -n < x < n$$

$$= 1 ; x \geq n$$

وتساوي الصفر خلاف ذلك.

بين أن:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  ليست دالة توزيع احتمالي، وكذلك النهاية  $\phi(t)$  وهي الدالة المميزة المتوقعة للنهاية  $F(x)$  ليست مستمرة عند النقطة  $t = 0$ .

(الحل)

دالة كثافة الاحتمال المقابلة للدالة  $F_n(x)$  هي:

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} ; -n < x < n$$

خلاف ذلك

$$= 0$$

والدالة المميزة المقابلة هي:

$$\phi_n(t) = \int_{-n}^n \left(\frac{1}{2n}\right) e^{itx} dx = \frac{1}{2n} \int_{-n}^n [\cos tx + i \sin tx] dx$$

وبعبارة أخرى: دالة فردية و  $\cos(\cdot)$  زوجية

$$= \frac{1}{n} \int_0^n \cos tx dx = \frac{\sin(nt)}{nt}$$

وعندما  $n \rightarrow \infty$  نجد أن  $\phi_n(t)$  تتقارب لجميع قيم  $t$  إلى النهاية  $\phi(t)$  حيث:

$$\phi(t) = 1 ; t = 0$$

$$= 0 ; t \neq 0$$

إذن النهاية  $\phi(t)$  غير مستمرة عند النقطة  $t = 0$  - لاحظ أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{2}$$

لكل قيمة ثابتة  $x$ .

إذن النهاية  $F_n(x)$  عندما  $n \rightarrow \infty$  (أي النهاية  $F(x)$ ) ليست دالة توزيع احتمالي.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (5 - 5) تحديد دالة التوزيع الاحتمالي بواسطة العزوم:

نحاول في هذا البند الإجابة على سؤال هام هو السؤال الآتي:

هل يمكن تحديد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  لمتغير عشوائي  $X$ ، تحديداً وحيداً، باستخدام عزوم هذا التوزيع  $\{\mu'_r\}$  إذا كانت هذه العزوم موجودة؟ أو بمعنى آخر، تحت أى شروط يمكن لمتابعة من العزوم  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \dots$  لمتغير عشوائي  $X$  أن تحدد دالة توزيعه الاحتمالي تحديداً وحيداً؟ فلو فرضنا مثلاً أن لدينا مجموعة من الثوابت تمثل عزوم متغير عشوائي معلوم، فهل يمكن لأي متغير عشوائي آخر أن يكون له نفس هذه المجموعة من العزوم؟ من الواضح أنه إذا كان هذا غير ممكناً فإن مجموعة العزوم التي لدينا تحدد توزيعاً احتمالياً تحديداً وحيداً. وفي هذه الحالة يمكن أن تقوم العزوم بنفس الدور الذي تقوم به لدالة المميزة في تحديد دالة التوزيع الاحتمالي تحديداً وحيداً.

فسي الواقع سنرى أنه من الممكن، تحت شروط معينة، تحديد دالة التوزيع الاحتمالي تحديداً وحيداً باستخدام العزوم عندما تكون هذه العزوم موجودة، ولكن ذلك كما ذكرنا، تحت شروط معينة، هذه الشروط تقريباً متوفرة بالنسبة لجميع التوزيعات التي تصادفها في التطبيقات الإحصائية.

وملاصحت العزوم يمكن أن تحدد دالة التوزيع الاحتمالي تحديداً وحيداً، فإن وجود توزيعين عزومهما المتناظرة متساوية حتى درجة معينة لنكن  $n$  مثلاً يدل على أن هذين التوزيعين متشابهين وعندما تريد  $n$  إلى ما لا نهاية ( $\infty$ ) فإن التوزيعان يكونا متطابقين. لذلك يمكن استخدام توزيع معروف كتقريب لتوزيع آخر إذا تساوت عزومهما المتناظرة حتى درجة معينة لنكن  $n$  مثلاً. ومن الناحية العملية يكون هذا التقريب جيد حتى إذا كانت  $n$  تساوى 3 أو 4، أى حتى لو كانت المساواة بين العزوم الثلاثة أو الأربعة الأولى.

والنظرية التالية تقدم لنا شرطاً كافياً (وليس ضرورياً) لتحديد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  بواسطة العزوم عندما تكون العزوم موجودة.

نظرية (5 - 5):

نفرض أن المتغير العشوائي  $X$  له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  وعزوم هذا التوزيع هي:  $\mu'_r$  ;  $J = 0, 1, 2, 3, \dots$  وكلها موجودة. فبإذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mu'_j C^j$$

دالة التوزيع الاحتمالي الوحيدة التي لها هذه العزوم.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الإثبات)

من تعريف الدالة المميزة  $\phi(t)$  للمتغير العشوائي  $X$  ذو التوزيع  $F(x)$  نجد أن

$$\phi(t+u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+u)x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{iux} dF(x)$$

وباستخدام مفكوك مكلورين للدالة  $e^{iux}$  حول الصفر

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(iux)^j}{j!} + \frac{(iux)^n}{n!} e^{i u' x} \right) e^{itx} dF(x) ; 0 < u' < u \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(iu)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} x^j e^{itx} dF(x) + \frac{(iu)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{i u' x} e^{itx} dF(x). \end{aligned}$$

وباستخدام العلاقة (5.1.10):

$$\phi(t+u) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(iu)^j}{j!} \frac{\phi^{(j)}(t)}{(i)^j} + \frac{u^n}{n!} v'_n \frac{(i)^n}{v'_n} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{i u' x} e^{itx} dF(x)$$

حيث  $v'_n$  هو العزم المطلق من الدرجة  $n$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^j}{j!} \phi^{(j)}(t) + \frac{u^n}{n!} v'_n q(t)$$

حيث

$$(5.5.1): q(t) = \frac{(i)^n}{v'_n} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{i u' x} e^{itx} dF(x) ; 0 < u' < u.$$

$$|q(t)| \leq \frac{1}{v'_n} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n dF(x) = \frac{v'_n}{v'_n} = 1$$

وبذلك تكون:

$$(5.5.2): \phi(t+u) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^j}{j!} \phi^{(j)}(t) + \frac{v'_n u^n}{n!} q(t)$$

حيث  $q(t)$  كما في (5.5.1) و  $|q(t)| \leq 1$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

لنأخذ الحد الأخير في الطرف الأيمن من (2. 5. 5) ويؤول إلى الصفر عندما  $n \rightarrow \infty$  يكون معنى ذلك أن  $\phi(t+u)$  يمكن أن نضع في شكل متسلسلة لانتهائية تقاربية. لذلك نبحث إمكانية أن يؤول الحد الأخير إلى الصفر مع كبر  $n$  كما يلي:

نحن نفترض في منطق النظرية أن المتسلسلة  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu'_j C^j}{j!}$  متقاربة تقارب مطلق

وهذا يترتب عليه أن  $\frac{\mu'_n C^n}{n!} \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow \infty$  ولكن الحد الأخير مكتوب بدلالة

$v'_n$  وليس  $\mu'_n$  لذلك لا يمكن مقارنته بالكمية  $\frac{\mu'_n C^n}{n!}$  إلا إذا أخذنا في الاعتبار حالتين، الحالة الأولى عندما تكون  $n$  عدد زوجي والثانية عندما تكون  $n$  عدد فردي.

ولاً: إذا كانت  $n$  عدد زوجي:

$$v'_n = \mu'_n$$

$$\frac{v'_n u^n}{n!} q(t) = \frac{\mu'_n u^n}{n!} q(t)$$

وعندما:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu'_n C^n}{n!} = 0$$

(لأن:  $\mu'_n$  موجود (محدود) و  $C$  ثابت محدود) إذن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_n u^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu'_n u^n}{n!} = 0$$

لجميع قيم  $|u| < C$  ومادامت  $|q(t)| \leq 1$  إذن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_n u^n}{n!} q(t) = 0$$

لجميع قيم  $|u| > C$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ثانياً: إذا كانت  $n$  عدد فردى:

يكون

$$v'_n \geq \mu'_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_n u^n}{n!} = 0 \text{ لا يترتب على ذلك أن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu'_n C^n}{n!} = 0 \text{ إن عندما}$$

ولكن بما أن:

$$E \left[ \lambda |x|^{\frac{n-1}{2}} + |x|^{\frac{n+1}{2}} \right]^2 \geq 0$$

$$\therefore E \left[ \lambda^2 |x|^{n-1} + 2\lambda |x|^n + |x|^{n+1} \right] \geq 0$$

$$\therefore \lambda^2 v'_{n-1} + 2\lambda v'_n + v'_{n+1} \geq 0$$

$$\therefore [\lambda \quad 1] \begin{bmatrix} v'_{n-1} & v'_n \\ v'_n & v'_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

إن لابد أن يكون محدد المصفوفة المربعة أكبر من أو يساوى الصفر أى أن:

$$v'_{n-1} v'_{n+1} - v'^2_n \geq 0$$

$$\therefore v'^2_n \leq v'_{n-1} v'_{n+1}$$

والمتباينة السابقة يمكن كتابتها فى الصورة التالية:

$$(5.5.3): \frac{v'_n u^n}{n!} \leq \left[ \left( \frac{v'_{n-1} u^{n-1}}{(n-1)!} \right) \left( \frac{v'_{n+1} u^{n+1}}{(n+1)!} \right) \frac{(n+1)}{n} \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث  $v'_{n-1}$  و  $v'_{n+1}$  عزوم مطلقة زوجية لأن  $n$  عدد فردى إذن:

$$v'_{n-1} = \mu'_{n-1}, \quad v'_{n+1} = \mu'_{n+1}$$

إذن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_{n-1} u^{n-1}}{(n-1)!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_{n+1} u^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ و } |u| < C \text{ لجميع قيم}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وعلى هذا عندما  $n \rightarrow \infty$  نجد أن الجانب الأيمن من المتباينة (5. 5. 3) يؤول إلى الصفر وكذلك الجانب الأيسر وبالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_n u^n}{n!} = 0$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v'_n u^n}{n!} q(t) = 0$$

لجميع قيم  $|u| < C$ .

وعلى ذلك سواء كانت  $n$  عدد زوجي أو فردى فإن الحد الأخير في المتسلسلة (5. 5. 2) يؤول إلى الصفر وبالتالي يكون:

$$(5. 5. 4): \phi(t+u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!} \phi^{(j)}(t)$$

والمتسلسلة تقاربية على الأقل لجميع قيم  $|u| < C$  وبوضع  $t=0$  مع تذكر أن  $\phi^{(j)}(0) = (i)^j \mu'_j$  نحصل على:

$$(5. 5. 5): \phi(u) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu'_j}{j!} (iu)^j$$

وهذه هي الدالة المميزة للمتغير  $X$  الذى له دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  وعزومه  $\mu'_j$  ولكن مع كتابة  $u$  بدلا من  $t$ . وهذا معناه أنه فى الفترة  $-C < u < C$  تحدد الدالة المميزة  $\phi(u)$  تحديداً وحيداً بالعزوم  $\mu'_j$ . ولكن الدالة  $\phi(u)$  فى هذه الحالة لا تحدد لنا دالة توزيع احتمالى وحيدة إلا إذا كانت معرفة لجميع قيم  $u$  الحقيقية وليست عند الفترة  $-C < u < C$  فقط [انظر ملاحظة (5 - 1 - 11 هـ)] لذلك سنحاول الآن باستخدام أسلوب الاستمرار التحليلي The Method of Analytic Continuation المعروف فى نظرية الدوال التحليلية Analytic Functions إثبات أن الصيغة (5. 5. 5) صحيحة لجميع قيم  $u$  الحقيقية وذلك كما يلى:

الدالة  $\phi(u)$  دالة مستمرة وجميع مشتقاتها التفاضلية موجودة عند جميع نقاط  $u$  فى الفترة  $|u| < C$  لذلك عند النقطتان  $u = \pm \frac{1}{2}C$  تكون المتسلسلة التى يمكن الحصول عليها بمفاضلة معادلة (5. 5. 5) أى عدد من المرات هى متسلسلة تقاربية وبالتالي يمكن حساب كل المشتقات التفاضلية  $\phi^{(n)}(\pm \frac{1}{2}C)$  من معادلة (5. 5. 5) أى من العزوم  $\mu'_j$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

هذه المشتقات التفاضلية تظهر كمعاملات في المتسلسلة  $\phi(\pm \frac{1}{2}C + u)$  المعطاة بالعلاقة (5. 5. 4) والمتسلسلة  $\phi(\pm \frac{1}{2}C + u)$  متسلسلة تقاربية، وحيث أن  $|u| < C$  إذن النقطة  $\frac{1}{2}C + u$  قد تصل إلى  $\frac{1}{2}C + C$  أى إلى  $\frac{3}{2}C$  وبالمثل النقطة  $-\frac{1}{2}C + u$  قد تصل إلى  $-\frac{1}{2}C - C$  أى إلى  $-\frac{3}{2}C$  وبالتالي فإن المدى المعروف عليه الدالة  $\phi(t)$  قد توسع الآن إلى الفترة  $-\frac{3}{2}C < t < \frac{3}{2}C$ . والآن من الوضع السابق، مادامت  $\phi(t)$  معرفة في الفترة  $-\frac{3}{2}C < t < \frac{3}{2}C$ ، يمكن حساب  $\phi^{(n)}(t)$  عند النقطتان  $t = \pm C$  بمفاضلة معادلة (5. 5. 5) مرة واستعمال هذه المشتقات التفاضلية كمعاملات في مفكوك تايلور للدالة  $\phi(\pm C + u)$  من المعادلة (5. 5. 4) سنجد أن المدى المعروف عليه الدالة  $\phi(t)$  قد توسع إلى الفترة  $-2C < t < 2C$ . وهكذا بالاستمرار في تكرار هذا (كما نرغب أى عدد من المرات) يمكن الوصول إلى أن الدالة المميزة  $\phi(t)$  تتحدد تحديداً وحيداً بالعزوم  $\mu'_j$  لجميع قيم  $t$  الحقيقية ويترتب على ذلك من نظرية التقابل الوحيد — نظرية (5- 11 ب) — أن دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  هى الأخرى تتحدد تحديداً وحيداً بالعزوم  $\mu'_j$ .

هـ. ط. ث

سنقدم فيما يلى مجموعة من النتائج للنظرية السابقة كل نتيجة منها تقدم شرطاً كافياً (وليس لازماً) لكى يمكن تحديد توزيع عشوائى بواسطة عزومه.

النتيجة الأولى التالية مفيدة في تحديد دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x)$  لأى متغير محدود  $\text{bounded}$  بواسطة عزومه.

نتيجة (5- 5 - 1): إذا كان المتغير العشوائى  $X$  محدود ( $\text{bounded}$ ) فإن دالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$  تتحدد تحديداً وحيداً بواسطة عزومه  $\mu'_j$  و  $j = 0, 1, 2, \dots$ .

(الاثبات)

إذا كان  $X$  متغير عشوائى محدود يكون معنى ذلك أنه يوجد عددين حقيقين  $a, b$  حيث  $a < b$  و  $a < X < b$  وبالتالي يكون  $F(b) = 1$  و  $F(a) = 0$ . فإذا كانت  $M$  عدد حقيقى موجب تحقق العلاقة:

$$M = \max(|a|, |b|)$$

أى أن  $M$  هى أكبر القيمتين  $|a|$  و  $|b|$  فإن:

$$(5. 5. 6) \quad |\mu'_j| \leq \int_a^b x^j dF(x) = v'_j \leq M^j$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبذلك يكون:

$$(5.5.7): \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu'_j C^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\mu'_j| C^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v'_j C^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(MC)^j}{j!} = e^{MC}$$

وحيث أن  $e^{MC}$  كمية محدودة لجميع قيم  $C$  إذن الشرط الكافي للنظرية (5-5-1) قد تحقق وهذا يثبت صحة النتيجة (5-5-1).

هـ. ط. ث

نتيجة (5-5-2): متتابعة العزوم  $\{\mu'_j\}$  للمتغير العشوائي  $X$  تحدد بصفة

وحيدة دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  إذا كانت النهاية العظمى للكمية  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{v'_n}}{n}$  كمية محدودة. حيث  $v'_n$  هو العزم المطلق من الدرجة  $n$  للمتغير  $X$ .

(الإثبات)

اختبار الجذر التوحي لنتقارب المتسلسلات ينص على أن:

في المتسلسلة  $S = \sum u_n$  إذا كان  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$  فإن المتسلسلة:

(أ) تتقارب تقارب مطلق إذا كان  $L < 1$ .

(ب) تتباعد إذا كان  $L > 1$ .

(جـ) إذا كان  $L = 1$  فإن الاختبار يفشل (لا يصلح).

وبما أن النظرية (5-5-1) تحدد (بصفة وحيدة) التوزيع  $F(x)$  إذا كانت

المتسلسلة  $\sum \mu'_j C^j / j!$  متقاربة تقارب مطلق أى إذا كان  $\sum |\mu'_j| C^j / j! < \infty$  حيث  $C > 0$  وحيث أن:

$$\left| \sum \frac{\mu'_j C^j}{j!} \right| \leq \sum \frac{|\mu'_j| C^j}{j!} \leq \sum v'_j C^j / j!$$

إذن المطلوب لإثبات صحة النتيجة التى نحن بصدها هو أن تكون المتسلسلة  $\sum v'_j C^j / j! < \infty$  أى متقاربة وبما أن كل حدودها موجبة يكون تقاربها مطلقا وبالتالى تكون المتسلسلة  $\sum \mu'_j C^j / j!$  تقاربية تقارباً مطلقاً وبناء على هذا طبقاً لنظرية

### الفصل الخامس - الدوال المميزة

(5 - 5) نتحدد  $F(x)$  تحديداً وحيداً بواسطة العزوم  $\{\mu'_j\}$ . وبذلك يكون هدفنا الآن هو إثبات أن المتسلسلة  $\sum v'_j C^j / j!$  تقاربية. وحسب اختبار الجذر التوئى تكون المتسلسلة  $\sum \frac{v'_j C^j}{j!}$  تقاربية إذا كان

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{\frac{v'_j C^j}{j!}} < 1$$

ولكن:

$$\sqrt[j]{\frac{v'_j C^j}{j!}} = \frac{v_j^{\frac{1}{j}} C}{\sqrt[j]{j!}}$$

حيث  $C$  كمية محدودة موجبة. ومن تقريب ستيرلنج نجد أن:

$$j! \approx \sqrt{2\pi} j^{j+\frac{1}{2}} e^{-j}$$

$$\therefore \sqrt[j]{j!} \approx (2\pi)^{\frac{1}{j}} j^{1+\frac{1}{2j}} e^{-1}$$

$$\therefore \sqrt[j]{\frac{v'_j C^j}{j!}} = \frac{v_j^{\frac{1}{j}} C e}{(\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{j}} \cdot j^{1+\frac{1}{2j}}}$$

عندما  $\frac{1}{j} \rightarrow 0$ ,  $j \rightarrow \infty$  إذن

$$v_j^{\frac{1}{j}} = v^0 = 1$$

وحيث أن  $C$ ,  $e$  كميتان محدودتان، إذن تكون المتسلسلة  $(\sum v'_j C^j / j!)$  تقاربية إذا كان:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{v_j^{\frac{1}{j}} C e}{j [2\pi j]^{\frac{1}{2j}}} < 1$$

أى أن

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{v_j^{\frac{1}{j}}}{j} < \frac{[2\pi j]^{\frac{1}{2j}}}{C e} \right)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وباعتبار أن  $[2\pi J]^{\frac{1}{2J}}$  أكبر من الواحد وتؤول إلى الواحد عندما  $J \rightarrow \infty$  فيمكن اعتبار أن الطرف الأيمن في المتباينة السابقة يساوي كمية محدودة نرمز لها بالرمز  $k$  مثلاً وتأخذ المتباينة السابقة الصورة التالية:

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{v_j^{\frac{1}{2J}}}{J} < \frac{k}{C}, \quad C \neq 0$$

وعلى هذا فإن المتسلسلة  $\sum v_j' C^j / J!$  تكون تقاربية إذا كانت النهاية العظمى

لكمية  $\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{v_j^{\frac{1}{2J}}}{J}$  أقل من  $\frac{k}{C}$  حيث  $k$  ثابت ما و  $C \neq 0$  (أى أن  $\frac{k}{C}$  كمية محدودة). أى

أن المتسلسلة تكون تقاربية (تقارب مطلق) إذا كانت النهاية العظمى للكمية  $\lim_{J \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{v_j'}}{J}$  كمية محدودة.

هـ. ط. ث

ونقدم فيما يلى نتيجة مرادفة للنتيجة السابقة ولكن باستخدام العزوم العادية بدلاً من العزوم المطلقة.

نتيجة (5 - 3): متتابعة العزوم  $\{\mu_j'\}$  للمتغير  $X$  تحدد بصفة وحيدة دالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$  إذا كانت الكمية  $\lim_{J \rightarrow \infty} (\mu_{2J}')^{1/2J} / 2J$  كمية محدودة.

(الإثبات)

نعلم أن العزوم الزوجية دائماً موجبة وتساوى للعزوم المطلقة الزوجية  $v_{2J}' = \mu_{2J}'$  وبالتالي باتباع نفس الإثبات المستخدم فى نتيجة (5 - 2) نجد أن:

$$\left| \sum \mu_j' C^j / J! \right| \leq \sum \frac{v_j' C^j}{J!}$$

ومن السهل إثبات أن للكميتان  $(\mu_{2J}')^{1/2J} / 2J$  و  $(v_j^{\frac{1}{2J}} / J)$  عندما  $J \rightarrow \infty$  تكونا إما محدودتان معاً أو لانهائيتان معاً وبالتالي إذا كانت  $\lim_{J \rightarrow \infty} (\mu_{2J}')^{1/2J} / 2J < m$  حيث  $m$  كمية محدودة تكون  $m' < \lim_{J \rightarrow \infty} (v_j^{\frac{1}{2J}} / J)$  حيث  $m'$  كمية محدودة تعتمد على  $m$  وهذا يحقق

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

الشرط المطلوب في نتيجة (5 - 5 - 2) وبالتالي فإن العزوم  $\mu'_j$  تحدد الدالة  $F(x)$  تحديداً وحيداً.

هـ. ط. ث

مثال (5 - 5 - 1): أثبت أن عزوم التوزيع المعتاد  $(0, \sigma)$  تحدد دالة توزيعه الاحتمالي تحديداً وحيداً.

(الحل)

نعلم من مثال (3 - 5 - 4) أن عزوم التوزيع المعتاد  $(0, \sigma)$  هي:

$$\mu'_{2j+1} = 0 ; \mu'_{2j} = \frac{(2j)!}{2^j j!} \sigma^{2j}$$

إذن حسب نتيجة (5 - 5 - 3)، عزوم التوزيع المعتاد  $(0, \sigma)$  تحدد دالة توزيعه  $F(x)$  تحديداً وحيداً إذا كانت:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\mu'_{2j} / 2j)$$

كمية محدودة. أي إذا كانت

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2j)!}{2^j j!} \right]^{\frac{1}{2j}} \frac{\sigma}{2j}$$

كمية محدودة. وباستخدام تقريب ستيرلنج للمضروب  $(2j)!$  و  $j!$  نجد أن:

$$\begin{aligned} K(j) &= \left[ \frac{(2j)!}{2^j j!} \right]^{\frac{1}{2j}} \frac{\sigma}{2j} \approx \left[ \frac{(\sqrt{2\pi})(2j)^{2j+\frac{1}{2}} e^{-2j}}{(\sqrt{2\pi})2^j (j)^{j+\frac{1}{2}} e^{-j}} \right] \frac{\sigma}{2j} \\ &= \left[ 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2j}} (j)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2j}} \right] \frac{\sigma}{2j} = \frac{\sigma 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2j} e} \end{aligned}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} K(j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sigma 2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2j} e} = 0$$

أي أن:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\mu'_{2j} / 2j) = \lim_{j \rightarrow \infty} K(j) = 0$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

إن العزم  $\{\mu'_j\}$  تحدد دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  للتوزيع المعتاد  $(0, \sigma)$  تحديداً وحيداً طبقاً للنتيجة (5 - 3).

### (5 - 6) تحديد نهائية متتابعة من دوال التوزيع الاحتمالي باستخدام العزوم:

عندما يكون لدينا متتابعة من المتغيرات العشوائية  $\{X_n\} = X_1, X_2, \dots$  وعزوم المتغير  $X_n$  من جميع الدرجات موجودة (محدودة) لجميع قيم  $n$ ، فهل يمكن، تحت شروط معينة، إيجاد النهاية التي تؤول إليها دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X_n$  عندما  $n \rightarrow \infty$ ؟ لقد قدم "كندل" و"راو" 1950 "Rao" and "Kendall" نظريتين فيهما إجابة لهذا السؤال. وفيما يلي هاتين النظريتين.

نظرية (5 - 6 - 1):

إذا كانت:  $\{X_n\} = X_1, X_2, \dots$  متتابعة من المتغيرات العشوائية و  $\mu'_2(n) = \{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \dots$  متتابعة دوال توزيعاتها الاحتمالية، والعزم الثاني  $\mu'_2(n)$  للمتغير  $X_n$  موجود (محدود) لجميع قيم  $n$ ، فإنه يوجد متتابعة جزئية:  $\{F_{n_j}(x)\} = F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \dots$  من المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى دالة توزيع احتمالي.

(الإثبات)

بما أن العزم  $\mu'_2(n)$  محدود، إذن نفرض أنه أقل من قيمة معينة لتكن  $K$  حيث:

$$K > \mu'_2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x)$$

ولأى عدد حقيقي موجب  $a$  يمكن أن نضع المتباينة السابقة في الصورة التالية:

$$K > \int_{-\infty}^{-a} x^2 dF_n(x) + \int_{-a}^a x^2 dF_n(x) + \int_a^{\infty} x^2 dF_n(x).$$

في التكامل الأوسط الدالة المكاملة موجبة أي أن التكامل موجب وبحذفه يقل الطرف الأيمن من المتباينة السابقة

$$\therefore K > \int_{-\infty}^{-a} x^2 dF_n(x) + \int_a^{\infty} x^2 dF_n(x).$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

في التكاملين السابقين  $x^2 > a^2$  دائما

$$\therefore K > a^2 \int_{-\infty}^{-a} dF_n(x) + a^2 \int_a^{\infty} dF_n(x)$$

$$\frac{K^2}{a^2} > \Pr[X_n \leq -a] + \Pr[X_n \geq a]$$

إن

$$(5.6.1): \frac{K^2}{a^2} > F_n(-a) + 1 - F_n(a) \quad n = 1, 2, \dots$$

في المتباينة السابقة يمكن تصغير الطرف الأيمن كيفما نشاء باختيار  $a$  كبيرة الكبر الكافي الذي يجعل الطرف الأيمن أصغر من أى عدد صغير موجب  $0 < \epsilon$ . فإذا اخترنا

في المتباينة السابقة  $a > \frac{K}{\sqrt{\epsilon}}$  فيمكن صياغة المتباينة في الصورة التالية:

$$(5.6.2): 1 - [F_n(x) - F_n(-x)] < \epsilon$$

لجميع قيم  $a < x$  وجميع قيم  $n$ .

ومن نظرية (5-3-1) يمكن إثبات أنه يوجد متباينة جزئية  $\{F_n(x)\}$  من متباينة التوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى دالة  $G(x)$  غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين وتتحصر بين الصفر والواحد الصحيح وذلك عند جميع نقاط استمرار  $G(x)$ . إن من علاقة (5.6.2) لجميع قيم  $a < x$  تكون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - [F_n(x) - F_n(-x)]\} \leq \epsilon$$

أى أن:

$$1 - [G(x) - G(-x)] \leq \epsilon$$

لجميع قيم  $a < x$  وهذا يترتب عليه أن:

$$G(x) - G(-x) = 1$$

وعندما  $x \rightarrow \infty$  فإن:

$$G(+\infty) - G(-\infty) = 1$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبما أن الدالة  $G(x)$  غير تناقصية وموجبة ولا تزيد عن الواحد الصحيح إذن لابد أن:  $G(-\infty)=0$  و  $G(\infty)=1$ . وبما أنها (أي  $G(x)$ ) غير تناقصية ومستمرة من ناحية اليمين وتتحصر بين الصفر والواحد الصحيح بالإضافة إلى ما تم إثباته من أن  $G(-\infty)=0$  و  $G(\infty)=1$  إذن  $G(x)$  دالة توزيع احتمالي، وحيث أنها هي نهاية المتتابعة الجزئية  $\{F_n(x)\}$  إذن هذه المتتابعة وكذلك المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى دالة توزيع احتمالي.

هـ. ط. ث.

النظرية السابقة تفترض أن العزم الثاني  $\mu'_2(n)$  للمتغير  $X_n$  محدود لجميع قيم  $n$  أي لجميع المتغيرات العشوائية  $X_1, X_2, \dots$ . والآن نتناول الحالة التي تكون فيها جميع العزوم:  $E(X_n^j) = \mu'_{j,n}$  موجودة (محدودة) لجميع قيم  $j = 0, 1, 2, \dots$  و  $n = 1, 2, 3, \dots$  وتكون النهاية  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_{j,n} = \mu'_j$  لجميع قيم  $j$  محدودة ومتتابعة العزوم (المحدودة)  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \dots$  تحدد دالة توزيع احتمالي تحديداً وحيداً، ثم نتساءل في ضوء هذه الشروط، هل يمكن أن نتقارب متتابعة للتوزيعات الاحتمالية  $\{F_n(x)\}$  إلى توزيع احتمالي دالة توزيعه تتطابق مع الدالة  $F(x)$ ؟

في الواقع، للنظرية التالية تقدم لنا إجابة لهذا السؤال.

### نظرية (5-6-2):

إذا كانت  $\{X_n\} = X_1, X_2, \dots$  متتابعة من المتغيرات العشوائية و  $\{F_n(x)\} = F_1(x), F_2(x), \dots$  متتابعة دوال توزيعاتها الاحتمالية والعزم ذو الدرجة  $j$ ،  $\mu'_{j,n}$  للمتغير  $X_n$  موجود (محدود) لجميع قيم  $n, j$ . وإذا كانت  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_{j,n} = \mu'_j$  حيث  $\mu'_j$  كمية محدودة لجميع قيم  $j$ . إذن:

(أ) إذا كانت المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى دالة توزيع احتمالي  $F(x)$  فإن  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \dots$  هي متتابعة عزوم هذه الدالة.

(ب) وبالعكس، إذا كانت هذه العزوم تحدد بصفة وحيدة دالة توزيع احتمالي  $F(x)$  فإن المتتابعة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى النهاية  $F(x)$  عند جميع نقط استمرارها.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (الإثبات)

(ا) لإثبات هذا الجزء نفرض أن المتتابة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى دالة توزيع احتمالي  $F(x)$  وبناء على صحة هذا الفرض نبين أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_{J,n} = \mu'_J, \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

حيث  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \dots$  تمثل متتابة عزوم للدالة  $F(x)$ . أى نبين أن:

$$(5.6.3): I(J) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^J dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} x^J dF(x) \right| = 0$$

لجميع قيم  $J = 0, 1, 2, \dots$

ولكن لأى قيمة  $C > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^J dF_0(x) = \int_{-C}^C x^J dF_n(x) + \int_{|x|>C} x^J dF_n(x)$$

ونفس التجزئة يمكن عمله للتكامل  $\int_{-\infty}^{\infty} x^J dF(x)$  وبذلك يمكن وضع معادلة

(5.6.3) فى الصورة:

$$(5.6.4): I(J) \leq I_1 + I_2 + I_3$$

حيث:

$$(5.6.5): (a) I_1 = \left| \int_{-C}^C x^J dF_0(x) - \int_{-C}^C x^J dF(x) \right|$$

$$(b) I_2 = \left| \int_{|x|>C} x^J dF_n(x) \right|$$

$$(c) I_3 = \left| \int_{|x|>C} x^J dF(x) \right|$$

من متباينة كوشى شوأرز نجد أن:

$$I_2 = \left( \int_{|x|>C} x^J dF_n(x) \right)^2 \leq \int_{|x|>C} x^{2J} dF_n(x) \cdot \int_{|x|>C} dF_n(x).$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

التكاملان السابقان موجبان و  $\mu'_{2j,n}$  كمية محدودة إذن:

$$\int_{|x|>C} x^{2j} dF_n(x) = \mu'_{2j,n} - \int_{-C}^C x^{2j} dF_n(x).$$

والكمية السابقة تصغر كلما اخترنا  $C$  كبيرة كبرا كافيا. كذلك

$$\int_{|x|>C} dF_n(x) = 1 - \int_{-C}^C dF_n(x)$$

نقترب من الصفر كلما كبرت  $C$ . وبالتالي عند اختيار  $C$  كبيرة كبرا كافيا نجد أن  $I_2$  تقترب من الصفر لجميع قيم  $n$ . كذلك بما أن  $\mu'_j$  كمية محدودة إذن:

$$\int_{|x|>C} x^j dF(x) = \mu'_j - \int_{-C}^C x^j dF(x)$$

وهذه تقترب من الصفر كلما كبرت  $C$ . وبالتالي عند اختيار  $C$  كبيرة كبرا كافيا نجد أن  $I_3$  تقترب من الصفر. وبما أننا نفترض أن  $F_n(x) \rightarrow F(x)$  عندما  $n \rightarrow \infty$  وأن كلا من  $\mu'_j$  و  $\mu_{j,n}$  محدودان، إذن لأي قيمة ثابتة  $C$  يمكن تصغير  $I_1$  باختيار  $n$  كبيرة كبرا كافيا. مما سبق يتضح أن العلاقة (5.6.3) صحيحة، وبناء عليه تكون المتتابة  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \dots$  هي متتابة عزوم الدالة  $F(x)$  حيث  $F(x)$  هي نهاية المتتابة  $\{F_n(x)\}$  وهذا يثبت صحة الجزء الأول من النظرية.

(ب) لإثبات الوضع العكسي في النظرية:

نفترض أن العزوم  $\mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \dots$  تحدد بصفة وحيدة دالة توزيع احتمالي  $F(x)$  وبناء على صحة هذا الفرض نبين أن الدالة  $F(x)$  هي نهاية المتتابة  $\{F_n(x)\}$ . نعرف من نظرية (5-6-1) - عندما  $\mu'_{2,n}$  تكون محدودة - أن كل متتابة جزئية من المتتابة  $\{F_n(x)\}$  تتقارب إلى دالة توزيع احتمالي. أي أن المتتابة الجزئية رقم  $i$  يكون لها نهاية  $F_i(x)$  هي دالة توزيع احتمالي. ومن النظرية الحالية نعرف أن كل النهايات  $F_i(x)$  لكل المتتابعات الجزئية يجب أن يكون لها نفس العزوم  $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots$  وبما أننا نفترض أن هذه العزوم تحدد (بصفة وحيدة) دالة توزيع احتمالي إذن كل النهايات  $F_i(x)$  تكون متطابقة وتساوي دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  التي لها العزوم  $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots$ . هـ. ط. ث.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ملاحظة (5-6-1): في النظرية السابقة نشترط أن  $\mu'_{J,n}$  كمية محدودة لجميع قيم  $n$ ،  $J$ . فإذا استبدلنا هذا الشرط باشتراط أن  $\mu'_{J,n}$  كمية محدودة لجميع قيم  $J$  وجميع قيم  $n$  التي تزيد عن عدد صحيح موجب  $N$  حيث يمكن أن تعتمد  $N$  على العدد  $J$ ، فإن هذا لا يؤثر على نتائج النظرية وذلك لأننا في النظرية دائماً نتناول الكميات  $\mu'_{J,n}$  وكذلك التوزيعات  $F_n(x)$  عندما تكون  $n$  كبيرة كبراً كافياً أو عندما  $n \rightarrow \infty$ . ولذلك إذا كانت العزوم  $\mu'_{J,n}$  غير محدودة لقيم  $n$  الصغيرة فإن هذا لا يؤثر على نتائج النظرية مادامت تصبح محدودة عندما تزيد  $n$  عن العدد الصحيح الموجب  $N$ .

في النظرية (5-6-2) السابقة لشرطنا أن  $\mu'_{J,n}$  موجود (محدود) لجميع قيم  $J, n$  وهذا شرطاً كافياً وليس لازماً. والمثال التالي يوضح أن نتائج النظرية السابقة تتحقق حتى لو كانت  $\mu'_{J,n}$  ليست موجودة لجميع قيم  $J$ ، أى حتى لو كانت عزوم المتغير العشوائى  $X_n$  ليست موجودة لجميع الدرجات  $J$ .

مثال (5-6-1): "مثال توضيحي"

إذا كان المتغير العشوائى  $X_n$  له التوزيع التالى:

$$f_n(x) = \frac{k}{(1+x^2/n)^{\frac{n+1}{2}}}; \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad n > 1$$

إذن العزم ذو الدرجة  $J$  للمتغير  $X_n$  هو:

$$\mu'_{J,n} = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^J}{(1+x^2/n)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$

التكامل السابق (فى حالة وجوده) يكون مساوياً للصفر عندما تكون  $J$  عدد فردى — أما إذا كانت  $J$  عدد زوجى،  $J = 2r$  حيث  $r$  عدد صحيح غير سالب فإن:

$$\mu'_{2r,n} = k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2r} dx}{(1+x^2/n)^{\frac{n+1}{2}}}$$

وحيث أن الدالة المكاملة زوجية

$$= 2k \int_0^{\infty} \frac{x^{2r} dx}{(1+x^2/n)^{\frac{n+1}{2}}}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ضع:

$$y = \frac{1}{1 + x^2/n}$$

عندما  $y = 0$  ،  $x = \infty$  وعندما  $y = 1$  ،  $x = 0$

$$x^2 = \left( \frac{1-y}{y} \right) n$$

$$x^{2r} = \left( \frac{1-y}{y} \right)^r n^r$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x/n}{(n+x^2)^2} = \frac{-2(1-y)^{\frac{1}{2}}}{y^{-2} y^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}$$

$$dx = \frac{-y^{-\frac{3}{2}}}{2(1-y)^{\frac{1}{2}}} dy$$

ويمكن الآن تحديد  $k$  كما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} = \sqrt{n} \int_0^1 y^{\frac{n}{2}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1} dy \\ &= \sqrt{n} \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore k = \left[ \sqrt{n} \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\mu'_{2r,n} = k n^{r+\frac{1}{2}} \int_0^1 y^{\frac{n-2r}{2}-1} (1-y)^{\frac{2r+1}{2}-1} dy$$

وهذا التكامل موجود فقط عندما  $2r < n$  (تكامل بيتا من النوع الأول) أى إن كل العزوم موجودة حتى العزم الذى درجته  $(n-1)$  فقط.

$$\mu'_{2r,n} = k n^{r+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - r\right) \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وبالتعويض عن قيمة  $k$

$$\mu'_{2r,n} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - r) \Gamma(r + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \cdot n^r$$

وباستخدام تقريب ستيرلنج لدالة جاما حيث:

$$\Gamma(p) \simeq \sqrt{2\pi} p^{p-\frac{1}{2}} e^{-p}$$

إن:

$$\mu'_{2r,n} \simeq \frac{\sqrt{2\pi} (\frac{n}{2} - r)^{\frac{n}{2} - r - \frac{1}{2}} e^{-(\frac{n}{2} - r)}}{\sqrt{2\pi} (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\pi}} \cdot n^r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^r 2^r (1 - \frac{2r}{n})^{\frac{n}{2} - r - \frac{1}{2}} \Gamma(\frac{2r+1}{2})$$

ولكن عندما  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2r}{n})^{\frac{n}{2} - r - \frac{1}{2}} = e^r$$

ويمكن إثبات أن:

$$\Gamma(\frac{2r+1}{2}) = \frac{(2r)! \sqrt{\pi}}{2^{2r} r!}$$

إن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'_{2r,n} = \frac{e^r 2^r e^{-r} (2r)! \sqrt{\pi}}{2^{2r} r! \sqrt{\pi}} = \frac{(2r)!}{2^r (r!)}$$

وهذه هي عزوم التوزيع المعتاد القياسي (انظر مثال (3 - 5 - 4) عندما  $\sigma = 1$ ) وهذه العزوم جميعها موجودة.

إن إذا كان المتغير العشوائي  $X_n$  يتقارب إلى توزيع لحتمالى فلا بد أن يكون هذا التقارب إلى التوزيع المعتاد القياسي. أى أنه يتقارب إلى توزيع احتمالى جميع عزومه موجودة بالرغم من أن عزوم  $X_n$  ليست موجودة كلها فهى موجودة فقط حتى العزم  $\mu'_{n-1}$ .

وتقارب توزيع  $X_n$  إلى التوزيع المعتاد القياسي يمكن فى الواقع استنباطه مباشرة من صيغة دالة كثافة الاحتمال  $f_n(x)$  عندما  $n \rightarrow \infty$  كما يلى:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$\begin{aligned}
 (5.6.5'): \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{\left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{\frac{n+1}{2}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{-\frac{n}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{x^2}{n}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) e^{-x^2/2} \cdot 1
 \end{aligned}$$

وقد سبق إثبات أن:

$$k(n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}{\sqrt{n} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}$$

ويطبق تقريب ستيرلنج على  $\Gamma(\cdot)$  نجد أن:

$$k(n) = \frac{\sqrt{2\pi} (\frac{n}{2} + \frac{1}{2})^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} e^{-(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}}{\sqrt{n} \sqrt{2\pi} (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$(5.6.6): \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

من (5.6.5', 6) نجد أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} ; -\infty \leq x \leq \infty$$

وهذه هي دالة التوزيع المعتاد القياسي.

## (5 - 7) الدالة المميزة للمتغيرات التثاقية المشتركة:

**The c. f. of the Bivariate r. v's:**

(5 - 7 - 1): كل ما ذكرناه عن الدالة المميزة للمتغير المفرد يمكن تعميمه إلى حالة أى عدد من المتغيرات المتعددة المشتركة. ومنبدأ الآن بحالة متغير ثنائي مشترك  $(X_1, X_2)$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نفرض أن  $(X_1, X_2)$  متغير عشوائي ثنائي مشترك له دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x_1, x_2)$  فإن الدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  للمتغير  $(X_1, X_2)$ ، حيث  $t_1$  و  $t_2$  عددين حقيقيين، تعرف بأنها:

$$(5.7.1a): \phi(t_1, t_2) = E(e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}) = \int_{R_2} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dF(x_1, x_2)$$

$$(5.7.1b): \phi(t_1, t_2) = u(t_1, t_2) + i v(t_1, t_2)$$

حيث

$$u(t_1, t_2) = \int_{R_2} \cos(t_1 x_1 + t_2 x_2) dF(x_1, x_2)$$

و

$$v(t_1, t_2) = \int_{R_2} \sin(t_1 x_1 + t_2 x_2) dF(x_1, x_2)$$

علما بأن  $R_2$  هو المستوى  $-\infty \leq x_1 \leq \infty$  و  $-\infty \leq x_2 \leq \infty$ .

ويمكن دراسة خصائص الدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  كنميمة للدالة  $\phi(t)$  في حالة المتغير المفرد كما يلي:

(1)

$$(5.7.2): \phi(0, 0) = 1$$

(2) وبما أن:

$$|\phi(t_1, t_2)| \leq \int_{R_2} |e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)}| dF = \int_{R_2} dF = 1$$

إذن:

$$(5.7.3): |\phi(t_1, t_2)| \leq 1$$

(3) كذلك:

$$(5.7.4): \phi(-t_1, -t_2) = \overline{\phi(t_1, t_2)}$$

حيث الجانب الأيمن هو مرافق الدالة  $\phi(t_1, t_2)$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(4) كما أن الدالة  $\phi(t_1, t_2)$  دالة مستمرة استمراراً منتظماً لجميع قيم  $t_1$  و  $t_2$  وذلك كما يتضح من (5. 7. 1b) حيث أن كل الدوال المكاملة دوال مستمرة استمراراً منتظماً لجميع قيم  $t_1$  و  $t_2$ .

(5- 7- 2) العزم المشترك:

العزم المشترك الذي درجته  $r$  يمكن الحصول عليه، كما في حالة المتغير المفرد، بمفاضلة للدالة  $\phi(t_1, t_2)$  ثم وضع  $t_1 = t_2 = 0$ ، وذلك كما يلي:  
إذا كانت جميع العزوم من الدرجة  $r$  موجودة فيمكن إثبات أن كل المشتقات التفاضلية

$$(5. 7. 5): \frac{\partial^r \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-j} \partial t_2^j} \downarrow, \quad j = 0, 1, 2, \dots, r.$$

$$(t_1, t_2) \rightarrow (0, 0)$$

تكون موجودة (محدودة). وبالتعويض عن  $\phi(t_1, t_2)$  في المعادلة السابقة بصيغتها كما في (5. 7. 1a) نحصل على:

$$(5. 7. 6): \frac{\partial^r \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-j} \partial t_2^j} = (i)^r E[X_1^{r-j} X_2^j e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}]$$

ومن العلاقة السابقة نحصل على العزم المشترك (غير المركزي)  $\mu'_{r-j,j}$  من الدرجة  $r$  كما في الصيغة التالية:

$$(5. 7. 7): \mu'_{r-j,j} = E(X_1^{r-j} X_2^j) = \left(\frac{1}{i}\right)^r \left[ \frac{\partial^r \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-j} \partial t_2^j} \right]_{|t_1, t_2| \rightarrow (0, 0)}$$

ويمكن الحصول على العزوم التي من الدرجة الأولى والثانية كما يلي:

$$(5. 7. 8): (a) \mu'_{10} = E(X_1) = \frac{1}{i} \left[ \frac{\partial \phi(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right]_{|0, 0)}$$

$$(b) \mu'_{01} = E(X_2) = \frac{1}{i} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t_2} \right]_{|0, 0)}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(c) \mu'_{20} = v(X_1) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1^2} \right]_{(0,0)}$$

$$(d) \mu'_{02} = v(X_2) = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_2^2} \right]_{(0,0)}$$

$$(e) \mu'_{11} = \text{Cov}(X_1, X_2) = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 = \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{(0,0)}$$

### (5-8) الدوال المولدة للمترجمات والعزوم والعزوم العاملة الثنائية:

#### (5-8-1) الدالة المولدة للمترجمات الثنائية المشتركة:

إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغير عشوائى ثنائى مشترك دالته المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  فإن الدالة المولدة للمترجمات للمتغير  $(X_1, X_2)$  تعرف بأنها:

$$(5.8.1): K(t_1, t_2) = \ln \phi(t_1, t_2)$$

أى أن:

$$(5.8.2): \phi(t_1, t_2) = \exp[K(t_1, t_2)].$$

وبمفاضلة الدالة المولدة للمترجمات  $(r-j)$  مرة بالنسبة لـ  $t_1$  و  $j$  مرة بالنسبة لـ  $t_2$  ثم التعويض عن  $t_1 = t_2 = 0$  نحصل على المتركمة  $k_{r-j,j}$  وهى متركمة من الدرجة  $r$  فى الصورة التالية:

$$(5.8.3): k_{r-j,j} = \left(\frac{1}{i}\right)^r \left[ \frac{\partial^r K(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-j} \partial t_2^j} \right] \downarrow \\ (t_1 = t_2 = 0)$$

وذلك مع مراعاة شروط وجود كل من المترجمات والعزوم المشتركة. ويمكن الحصول على المترجمات المشتركة من الدرجة الأولى والثانية كما يلى:



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(5.8.4): (a) k_{10} = \frac{1}{i} \left[ \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right]_{(0,0)}$$

$$(b) k_{01} = \frac{1}{i} \left[ \frac{\partial K}{\partial t_2} \right]_{(0,0)}$$

$$(c) k_{20} = \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 K}{\partial t_1^2} \right]_{(0,0)}$$

$$(d) k_{02} = \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 K}{\partial t_2^2} \right]_{(0,0)}$$

$$(e) k_{11} = \left( \frac{1}{i} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 K}{\partial t_1 \partial t_2} \right]_{(0,0)}$$

(5-8-2) الدالة المولدة للعزوم المشتركة:

الدالة المولدة للعزوم المشتركة  $M(t_1, t_2)$ ، في حالة وجودها، يمكن الحصول عليها من الدالة المميزة المشتركة من العلاقة:

$$(5.8.5): M(t_1, t_2) = \phi\left(\frac{it_1}{1}, \frac{it_2}{1}\right)$$

حيث  $|t_1| < h_1$  و  $|t_2| < h_2$  و  $h_1 > 0$ ،  $h_2 > 0$  عدنان حقيقيان صغيران.

ويمكن الحصول على العزم المشترك  $\mu'_{r-j,j}$  من الدرجة  $r$  كما يلي:

$$(5.8.6): \mu'_{r-j,j} = \left[ \frac{\partial^r M(t_1, t_2)}{\partial t_1^{r-j} \partial t_2^j} \right]_{(t_1, t_2, 0)}$$

(5-8-3) الدالة المولدة للعزوم للعاملية المشتركة:

إذا كان المتغيران العشويان  $X_1$  و  $X_2$  متقطعان يأخذان فقط القيم  $0, 1, 2, 3, \dots$

فيمكن الحصول على الدالة المولدة للعزوم للعاملية المشتركة  $P(t_1, t_2)$  من الدالة المولدة للعزوم المشتركة  $M(t_1, t_2)$  بوضع  $\ln t_i$  بدلا من  $t_i$  ( $i = 1, 2$ ) حيث نجد أن:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(5.8.7): P(t_1, t_2) = M(\ln t_1, \ln t_2) = \sum_{j,k} t_1^j t_2^k P_{jk}$$

ونذلك لأن:

$$M(\ln t_1, \ln t_2) = E(e^{x_1(\ln t_1) + x_2(\ln t_2)}) = E(t_1^{x_1} t_2^{x_2}) = P(t_1, t_2).$$

[ $P(t_1, t_2)$  هي الدالة المولدة للاحتمالات للمتغير الثنائي المنقطع المشترك]

### (5 - 9) الدوال المميزة الهامشية:

يمكن الحصول على الدالة المميزة الهامشية للمتغير  $X_1$  (أو للمتغير  $X_2$ ) من العلاقة (5.7.1a) بوضع  $t_2 = 0$  (أو  $t_1 = 0$ ) كما يلي:

$$(5.9.1): \phi(t_1, 0) = E(e^{it_1 X_1}) = \phi_1(t_1)$$

وهذه هي الدالة المميزة للمتغير  $X_1$ .

$$(5.9.2): \phi(0, t_2) = E(e^{it_2 X_2}) = \phi_2(t_2)$$

وهذه هي الدالة المميزة للمتغير  $X_2$ .

ومن صيغة (5.7.7) نجد أن:

$$(5.9.3): (a) \mu'_{r0} = E(X_1^r).$$

$$(b) \mu'_{0j} = E(X_2^j).$$

وهذه هي العزوم في حالة المتغير المفرد.

$$(c) \mu'_{10} = E(X_1) , \mu'_{01} = E(X_2)$$

$$(d) \mu_{20} = v(X_1) ; \mu_{02} = v(X_2).$$

كذلك من (5.7.7) نجد أنه إذا كان المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  مستقلان يكون:

$$(5.9.4): (a) \mu'_{rj} = \mu'_{r0} \cdot \mu'_{0j}$$

$$(b) \mu'_{11} = \mu'_{10} \cdot \mu'_{01}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وإذا كانت المتغيرات مقبسة من مركزها فإن العزوم حول الصفر تكون هي نفسها العزوم المركزية حيث يكون:

$$(c) \mu_{11} = \mu_{10} \cdot \mu_{01} = 0$$

### (5 - 10) نظرية التعاكس للمتغير اللتانى المشترك:

سنقدم فيما يلى تعميم لنظريتى "التعكس" و"التقابل الوحيد" - نظريتى (5 - 1 - 11 أ و 11 ب) - إلى حالة متغير عشوائى ثنائى مشترك  $(X_1, X_2)$ ، والنظرية التالية تعتبر تعميم لهاتين النظريتين المشار إليهما.

نظرية (5 - 10 - 1):

إذا كان  $(X_1, X_2)$  متغير عشوائى مشترك له دالة مميزة مشتركة  $\phi(t_1, t_2)$  ودالة توزيع احتمالى مشتركة  $F(x_1, x_2)$  وكلفت  $F(x_1, x_2)$  مستمرة على مسطح المستطيل  $(a_1 - h_1 \leq x_1 \leq a_1 + h_1)$  و  $(a_2 - h_2 \leq x_2 \leq a_2 + h_2)$ ، فإن:

$$(5. 10. 1): Pr(a_1 - h_1 < X_1 \leq a_1 + h_1 ; a_2 - h_2 < X_2 \leq a_2 + h_2)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{\sin h_1 t_1}{t_1} \frac{\sin h_2 t_2}{t_2} \cdot e^{-i(a_1 t_1 + a_2 t_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

وإذا كانت:

$$\int_{R_2} |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, x_2)$  تكون موجودة ومعرفة عند النقطة  $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$  بالعلاقة:

$$(5. 10. 2): f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

(الإثبات)

الإثبات يكون مشابها تماما لإثبات نظريتى (5 - 1 - 11 أ و 11 ب) فى حالة المتغير المفرد. ونبتاول الآن الحالة التى يكون فيها المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  مستمران، علما بأن حالة المتغيران المتقطعان يمكن الحصول عليها باستبدال علامات التكامل بعلامات المجموع المناسبة.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ضع:

$$J(T) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{\sin h_1 t_1}{t_1} \cdot \frac{\sin h_2 t_2}{t_2} \exp[i(a_1 t_1 + a_2 t_2)] \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

وبالتعويض عن  $\phi(t_1, t_2)$  من علاقة (5.7.1a)

$$J(T) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin h_1 t_1}{t_1} \cdot \frac{\sin h_2 t_2}{t_2} \exp[i t_1 (x_1 - a_1)] \exp[i t_2 (x_2 - a_2)] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} dt_1 dt_2$$

وبأسلوب مشابه لحالة المتغير الواحد نصل إلى:

$$\begin{aligned} J(T) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{\sin h_1 t_1}{t_1} e^{i t_1 (x_1 - a_1)} dt_1 \\ &\quad \int_{-T}^T \frac{\sin h_2 t_2}{t_2} e^{i t_2 (x_2 - a_2)} dt_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ J(T) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin h_1 t_1}{t_1} [\cos t_1 (x_1 - a_1) + i \sin t_1 (x_1 - a_1)] dt_1 \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \int_{-T}^T \frac{\sin h_2 t_2}{t_2} [\cos t_2 (x_2 - a_2) + i \sin t_2 (x_2 - a_2)] dt_2 \right\} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left\{ 2 \int_0^T \frac{\sin h_1 t_1}{t_1} \cos t_1 (x_1 - a_1) dt_1 \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ 2 \int_0^T \frac{\sin h_2 t_2}{t_2} \cos t_2 (x_2 - a_2) dt_2 \right\} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

وباستخدام العلاقة

$$\sin(m) \cos(n) = \frac{1}{2} [\sin(n+m) - \sin(n-m)]$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نجد أن:

$$\begin{aligned} J(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \left\{ \frac{\sin(x_1 - a_1 + h_1)t_1}{t_1} - \frac{\sin(x_1 - a_1 - h_1)t_1}{t_1} \right\} dt_1 \\ &\quad \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^T \left\{ \frac{\sin(x_2 - a_2 + h_2)t_2}{t_2} - \frac{\sin(x_2 - a_2 - h_2)t_2}{t_2} \right\} dt_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1, T) g_2(x_2, T) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

حيث:

$$g_r(x_r, T) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \left\{ \frac{\sin(x_r - a_r + h_r)t_r}{t_r} - \frac{\sin(x_r - a_r - h_r)t_r}{t_r} \right\} dt_r, r = 1, 2.$$

ومن (5. 1. 55) نجد أن:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_r(x_r, T) = \begin{cases} 0 & ; x_r > a_r + h_r \\ \frac{1}{2} & ; x_r = a_r \pm h_r \\ 1 & ; a_r - h_r < x_r < a_r + h_r \end{cases} ; r = 1, 2.$$

$$\therefore \lim_{T \rightarrow \infty} J(T) = \int_{a_1 - h_1}^{a_1 + h_1} \int_{a_2 - h_2}^{a_2 + h_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \Pr[a_1 - h_1 < X_1 \leq a_1 + h_1 ; a_2 - h_2 < X_2 \leq a_2 + h_2]$$

وهذا يبرهن الجزء الأول من النظرية.

بقسمة طرفي المعادلة (5. 10. 1) على  $2h_1, 2h_2$  وأخذ النهاية عندما  $h_1 \rightarrow 0$  و  $h_2 \rightarrow 0$  وعندما  $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$  نجد أن:

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{\Pr(x_1 - h_1 < X_1 \leq x_1 + h_1 ; x_2 - h_2 < X_2 \leq x_2 + h_2)}{2h_1 \cdot 2h_2} \\ &= \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin h_1 t_1}{h_1 t_1} \cdot \frac{\sin h_2 t_2}{h_2 t_2} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وحيث أن القيمة الموجبة للدالة الكاملة في التكامل السابق أقل من أو تساوى  $\int_{R_2} |\phi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 < \infty$  كما أن  $|\phi(t_1, t_2)|$  حسب فرض النظرية إذن يمكن إيجاد علامات النهاية والتكامل في التكامل السابق وبذلك يكون:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

هـ. ط. ث.

والنظرية السابقة توضح لنا أنه بمعلومية  $\phi(t_1, t_2)$  يمكن معرفة:

$$(5. 10. 3): \Pr(x_1 < X_1 \leq x'_1 ; x_2 < X_2 \leq x'_2)$$

عند أى فترة استمرار  $x_i < X_i \leq x'_i$  ،  $i = 1, 2$  ، فى المستوى  $R_2$  . وعلى ذلك فإن المعادلة (5. 10. 3) تحدد دالة التوزيع الاحتمالى المشتركة  $F(x_1, x_2)$  تحديداً وحيداً فى المستوى  $R_2$  . وبما أن دالة التوزيع الاحتمالى  $F(x_1, x_2)$  دالة مستمرة من ناحية اليمين وغير تناقصية بالنسبة لكلا المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  فإن هذا يترتب عليه أن قيم  $F(x_1, x_2)$  عند نقط استمرارها تحدها تحديداً تاماً (وحيداً).

**ملاحظة (5 - 10 - 1):** وب نفس الأسلوب المتبع فى النظرية السابقة يمكن تعميم نظرية التواصل - نظرية (5 - 4 - 1) وكذلك النظريات (5 - 5 - 1) و (5 - 6 - 1 و 2) - إلى حالة متغير ثنائى مشترك وكذلك إلى حالة متغير متعدد مشترك عدد مركباته  $n$  وذلك باستبدال الدوال المميزة ودوال التوزيع الاحتمالى للمتغير المفرد فى النظريات السابقة بالدوال المتعددة المشتركة المناظرة لها سواء فى منطق النظرية أو الإثبات. لذلك سنكتفى بذكر منطق نظرية التواصل فى حالة  $n$  من المتغيرات فى البند (5 - 13) تاركين للقارئ تعميم باقى النظريات المشار إليها.

**ملاحظة (5 - 10 - 2):** لقد ذكرنا فى (5 - 2 - 1) أن استقلال المتغيرات العشوائية  $X_1, X_2, \dots, X_n$  يعتبر شرطاً كافياً للحصول على النتيجة:

$$(5. 10. 3'): \phi_{\sum x_j}(t) = \prod_{j=1}^n \phi_{x_j}(t)$$

ولكنه ليس شرطاً ضرورياً. إذ يمكن أن تكون المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  غير مستقلة ومع ذلك تحقق النتيجة (5. 10. 3). والمثال التالى يوضح ذلك.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

مثال (5-10): 'مثال توضيحي'

فى الدالة المشتركة:

$$(5. 10. 4): f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)}}{\sqrt{xy}} + h(x-y)(xy - x - y + 2)e^{-(x+y)}.$$

حيث  $h$  قيمة صغيرة معينة،  $0 \leq x \leq \infty$ ،  $0 \leq y \leq \infty$

يمكن إثبات أن الدالة  $f(x, y)$  تحقق شروط كثافة الاحتمال أى:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy = 1$$

وبالتالى يمكن اعتبار الدالة  $f(x, y)$  دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغير عشوائى مشترك  $(X, Y)$ . ومن صيغة هذه الدالة يتضح أن المتغيران غير مستقلان حيث أن  $f(x, y) \neq f(x) f(y)$  لا يمكن وضعها على صورة حاصل ضرب عاملين أحدهما دالة فى  $x$  والثانى دالة فى  $y$ .

كما يمكن إثبات أن الدالة المميزة المشتركة للمتغير  $(X, Y)$  هى:

$$(5. 10. 5): \phi(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{(1-2it_1)(1-2it_2)}} + \frac{2ht_1t_2(t_1-t_2)}{(1-it_1)^3(1-it_2)^3}.$$

للحصول على الدالة المميزة للمتغير  $X$ ،  $\phi_x(t)$ ، ضع  $t_2 = 0$  فى (5. 10. 5) إذن:

$$(5. 10. 6): \phi_x(t) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

وبالمثل للحصول على الدالة المميزة للمتغير  $Y$ ،  $\phi_y(t)$ ، ضع  $t_1 = 0$ ، إذن:

$$(5. 10. 7): \phi_y(t) = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

وللحصول على الدالة المميزة للمجموع  $X + Y$  نضع  $t_2 = t_1$  حيث:

$$E(e^{i(t_1X+t_2Y)}) = E[e^{it(X+Y)}] = \phi_{x+y}(t)$$

إذن:

$$(5. 10. 8): \phi_{x+y}(t) = \phi(t, t) = (1-2it)^{-1}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

من (5, 10, 6, 7, 8) نجد أن:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

بالرغم من أن المتغيران  $X$  و  $Y$  غير مستقلان.

### (5 - 11) الدوال المميزة للمتغيرات العشوائية المستقلة:

يمكن من الدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  للمتغير المشترك  $(X_1, X_2)$  معرفة إذا ما كان  $X_1$  و  $X_2$  مستقلان أم لا دون الحاجة إلى معرفة دالة توزيعهما الاحتمالي وذلك كما يتضح من النظرية التالية:

نظرية (5 - 11 - 1):

إذا كان  $(X_1, X_2)$  متغير عشوائي ثنائي مشترك دالته المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  فإن  $X_1$  و  $X_2$  يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كن:

$$(5. 11. 1): \phi(t_1, t_2) = \phi(t_1, 0) \cdot \phi(0, t_2) = \phi_1(t_1) \cdot \phi_2(t_2)$$

حيث  $\phi_1(t_1)$  و  $\phi_2(t_2)$  هما الدالتين المميزتين للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  على الترتيب.  
(الإثبات)

لإثبات أن الشرط (5. 11. 1) ضروري (لازم) نفرض أن المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  مستقلان وبالتالي دالة توزيعهما الاحتمالي المشتركة مساوية لحاصل ضرب دالتي توزيعهما الهامشيتين أي أن:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$$

$$\therefore \phi(t_1, t_2) = \int_{R_2} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dF(x_1, x_2)$$

$$= \int_{\underline{-\infty}}^{\infty} e^{it_1 x_1} dF_1(x_1) \int_{\underline{-\infty}}^{\infty} e^{it_2 x_2} dF_2(x_2) = \phi_1(t_1) \cdot \phi_2(t_2).$$

وهذا يثبت أن الشرط ضروري.

ولإثبات أن الشرط كافي نفترض أن العلاقة (5. 11. 1) صحيحة، وبالتعويض عن ذلك في (5. 10. 1) من نظرية التعلّكس نجد أن:



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(5.11.2): Pr(x_1 - h_1 < X_1 \leq x_1 + h_1 ; x_2 - h_2 < X_2 \leq x_2 + h_2)$$

$$= \prod_{r=1}^2 \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \frac{\sin h_r t_r}{t_r} e^{-iz_r} \phi_r(t_r) dt_r \right]$$

ومن نظرية (5-11-1) للمتغير المفرد نجد أن العلاقة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$(5.11.3): Pr \left[ \prod_{r=1}^2 (x_r - h_r < X_r \leq x_r + h_r) \right] = \prod_{r=1}^2 Pr(x_r - h_r < X_r \leq x_r + h_r)$$

والعلاقة السابقة صحيحة لأي فترة استمرار في  $R_2$ . ومن بند (2-20) نعرف أن العلاقة (5.11.3) تتضمن أن المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  يحققان العلاقة التالية:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)$$

أي أن المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  مستقلان.

هـ. ط. ث.

والسنظرية السابقة يمكن تعميمها إلى أي عدد (محدود) من المتغيرات العشوائية، حيث يمكن إثبات ما يلي:

نظرية (5-11-2):

إذا كان  $(X_1, \dots, X_n)$  متغير متعدد دالته المميزة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  فإن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  تكون مستقلة، إذا وفقط إذا، كان:

$$(5.11.4): \phi(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n \phi_j(t_j)$$

حيث  $\phi_j(t_j)$  هي الدالة المميزة للمتغير  $X_j$  و  $j = 1, 2, \dots, n$ .

(5-12) مفكوك مكلورين للدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$ :

يمكن تقديم مفكوك مكلورين للدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  للمتغير المشترك  $(X_1, X_2)$  في النظرية التالية:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نظرية (5-12-1):

إذا كان العزم المشترك  $\mu'_{rs}$  الذى درجته  $r+s=n$  للمتغير المشترك  $(X_1, X_2)$  موجود، فإن الدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  يمكن وضعها فى شكل متسلسلة ماكلورين بدلالة قوى  $t_1$  و  $t_2$  التصاعدية حول النقطة  $(0, 0) = (t_1, t_2) -$  أى فى جوار للنقطة  $(t_1, t_2) -$  فى الصورة التالية:

$$(5.12.1): \phi(t_1, t_2) = 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \cdot \frac{(it_2)^r}{r!} \mu'_{j-r,r} + o(t_1(n) \cdot t_2(n)).$$

حيث  $o(t_1(n) \cdot t_2(n))$  تمثل حدود تحوى على  $t_1^r t_2^s$  ،  $r+s < n$  وتحقق العلاقة:

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0, t_2 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{o(t_1(n) \cdot t_2(n))}{t^n} = 0$$

والعزم المشترك (حول الأصل)  $\mu'_{j-r,r}$  هو معامل  $\frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \cdot \frac{(it_2)^r}{r!}$  فى متكوك  $\phi(t_1, t_2)$ .

(الإثبات)

بما أن:

$$\phi(t_1, t_2) = \int_{R_2} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dF(x_1, x_2)$$

والدالة  $g(t_1, t_2) = e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)}$  دالة مستمرة ومحدودة لجميع قيم  $(t_1, t_2)$  و  $(x_1, x_2)$  كما أن

$$\frac{\partial^n g(t_1, t_2)}{\partial t_1^{n-v} \partial t_2^v} = g^{(n)}(t_1, t_2), \quad v = 0, 1, 2, \dots, n$$

دالة مستمرة لذلك يمكن وضعها فى شكل متسلسلة ماكلورين كما يلى:

$$\begin{aligned}
 (5.12.2a): g(t_1, t_2) &= g(0, 0) + \left( t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right) g(t_1, t_2) \Big|_{(0,0)} \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^2 g(t_1, t_2) \Big|_{(0,0)} \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left( t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{n-1} g(t_1, t_2) \Big|_{(0,0)} \\
 &\quad + R(n) ; g(0, 0) = 1
 \end{aligned}$$

حيث:

$$(5.12.2b): R(n) = \frac{1}{n!} \left( t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^n g(t_1, t_2) \Big|_{(t'_1, t'_2)}$$

لجميع قيم  $0 < t'_1 < t_1$  و  $0 < t'_2 < t_2$

$$\begin{aligned}
 (5.12.2c): &\left( t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^J g(t_1, t_2) \Big|_{(0,0)} \\
 &= \sum_{r=0}^J \binom{J}{r} \left[ t_1^{J-r} \frac{\partial^{J-r}}{\partial t_1^{J-r}} + t_2^r \frac{\partial^r}{\partial t_2^r} \right] g(t_1, t_2) \Big|_{(0,0)} \\
 &= \sum_{r=0}^J \binom{J}{r} \left[ t_1^{J-r} (i x_1)^{J-r} t_2^r (i x_2)^r \right]
 \end{aligned}$$

من (5.12.2a, b) نجد أن:

$$\begin{aligned}
 (5.12.3): \phi(t_1, t_2) &= 1 \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=0}^j \frac{1}{j!} \binom{j}{r} (i t_1)^{j-r} (i t_2)^r \int_{R_1}^{x_1^{j-r}} x_2^r dF(x_1, x_2) \\
 &\quad + \int_{R_2} R(n) dF(x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

الفصل الخامس - الدوال المميزة

ومن (5. 12. 2b, c) نجد أن:

$$R(n) = \sum_{\nu=0}^n \frac{(it_1 x_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(it_2 x_2)^\nu}{\nu!} e^{it'_1 x_1 + it'_2 x_2}$$

إذن:

$$\int_{R_2} R(n) = \sum_{\nu=0}^n \frac{(it_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(it_2)^\nu}{\nu!} \int x_1^{n-\nu} x_2^\nu e^{it'_1 x_1 + it'_2 x_2} dF(x_1, x_2).$$

ضع:

$$e^{it'_1 x_1 + it'_2 x_2} = I + (e^{it'_1 x_1 + it'_2 x_2} - I)$$

إذن:

$$(5. 12. 4): \int_{R_2} R(n)$$

$$= \sum_{\nu=0}^n \frac{(it_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(it_2)^\nu}{\nu!} \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu [I + (e^{it'_1 x_1 + it'_2 x_2} - I)] dF(x_1, x_2).$$

من (5. 12. 3, 4) نجد أن:

$$\begin{aligned} \phi(t_1, t_2) &= I + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \frac{(it_2)^r}{r!} \mu'_{j-r,r} \\ &+ \sum_{\nu=0}^n \frac{(it_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(it_2)^\nu}{\nu!} \mu'_{n-\nu,\nu} \\ &+ \sum_{\nu=0}^n \frac{(it_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(it_2)^\nu}{\nu!} \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu (e^{it'_1 x_1 + it'_2 x_2} - I) dF(x_1, x_2). \end{aligned}$$

إذن:

$$(5. 12. 5a): \phi(t_1, t_2) = I + \sum_{j=1}^n \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \frac{(it_2)^r}{r!} \mu'_{j-r,r} + O[t_1(n) \cdot t_2(n)]$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

حيث:

$$(5.12.5b): 0 [t_1(n) \cdot t_2(n)]$$

$$= \sum_{\nu=0}^n \frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(i t_2)^\nu}{\nu!} \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu (e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2} - 1) dF(x_1, x_2)$$

$$0 < t_1' < t_1, \quad 0 < t_2' < t_2.$$

وبإخذ نهاية التكامل الموجود فى الطرف الأيمن من المعادلة السابقة عندما  $t_1 \rightarrow 0$  و  $t_2 \rightarrow 0$  حيث أنه من المسموح به تبادل علامتى النهاية والتكامل لأن نتيجة التكامل بعد ذلك تكون محدودة كما يتضح مما يلى:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu (e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2} - 1) dF(x_1, x_2) \\ = \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} (e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2} - 1) dF(x_1, x_2) \\ (0 < t_1' < t_1, \quad 0 < t_2' < t_2) \\ \text{إن } t_2' \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow 0 \\ = \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu (0) dF(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

إن من الواضح أن:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0, t_2 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{0 [t_1(n) \cdot t_2(n)]}{t^n} \\ = \sum_{\nu=0}^n \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0, t_2 \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{(i t_1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{(i t_2)^\nu}{(\nu)!} \int_{R_2} x_1^{n-\nu} x_2^\nu \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow 0}} (e^{i t_1' x_1 + i t_2' x_2} - 1) dF(x_1, x_2) \\ = \sum_{\nu=0}^n \frac{(i)^\nu}{(n-\nu)! \nu!} [0] = 0 \end{aligned}$$

من العلاقة السابقة و(5.12.5a) نصل إلى الإثبات المطلوب.

هـ. ط. ث.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

وإذا كانت كل العزوم من جميع الدرجات موجودة فيمكن كتابة العلاقة (12. 5) في الصورة التالية:

$$(5. 12. 6): \phi(t_1, t_2) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \frac{(it_2)^r}{r!} \mu'_{j-r,r}.$$

### (5 - 13) الدالة المميزة المركزية:

نرمز للدالة المميزة المركزية للمتغير الثنائي المشترك  $(X_1, X_2)$  بالرمز  $\phi_c(t_1, t_2)$  حيث:

$$(5. 13. 1): \phi_c(t_1, t_2) = E[e^{it_1(X_1 - \mu_{10}) + it_2(X_2 - \mu_{01})}] = e^{-(it_1\mu_{10} + it_2\mu_{01})} \phi(t_1, t_2)$$

حيث  $\phi(t_1, t_2)$  هي الدالة المميزة المعطاة بالعلاقة (7. 5) و  $\mu_{10} = E(X_1)$  و  $\mu_{01} = E(X_2)$ . فإذا كانت  $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$  تكون الدالة المميزة المركزية هي نفسها الدالة المميزة العادية  $\phi(t_1, t_2)$  وتكون العزوم المركزية هي العزوم العادية.

وإذا كانت العزوم المشتركة من الدرجة الثانية موجودة فيمكن كتابة مفكوك الدالة المميزة العادية  $\phi(t_1, t_2)$  والدالة المميزة المركزية  $\phi_c(t_1, t_2)$  كما يلي:

$$(5. 13. 2a): \phi(t_1, t_2) = 1 + \frac{i}{1!} (\mu'_{10}t_1 + \mu'_{01}t_2) + \frac{i^2}{2!} (\mu'_{20}t_1^2 + 2\mu'_{11}t_1t_2 + \mu'_{02}t_2^2) + 0[t_1(2) \cdot t_2(2)]$$

و

$$(5. 13. 2b): \phi_c(t_1, t_2) = 1 + \frac{i^2}{2!} (\mu'_{20}t_1^2 + 2\mu'_{11}t_1t_2 + \mu'_{02}t_2^2) + 0[t_1(n) \cdot t_2(n)]$$

حيث  $0[t_1(n) \cdot t_2(n)]$  كما في (12. 5) و

$$\mu'_{10} = E(X_1); \mu'_{01} = E(X_2); \mu'_{11} = E(X_1X_2)$$

$$\mu_{20} = V(X_1); \mu_{02} = V(X_2); \mu_{11} = \text{Cov}(X_1, X_2).$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### (5 - 14) الدالة المولدة للمتراكمات الثنائية المشتركة:

نرمز للدالة المولدة للمتراكمات الثنائية المشتركة بالرمز  $K(t_1, t_2)$  وتعريف بأنها:

$$(5. 14. 1): K(t_1, t_2) = \ln \phi(t_1, t_2)$$

فإذا كانت المتراكمات من جميع الدرجات موجودة فيمكن تعريف مفكوك  $K(t_1, t_2)$  بالعلاقة التالية:

$$(5. 14. 2): K(t_1, t_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \frac{(it_2)^r}{r!} k_{j-r,r}$$

حيث  $k_{j-r,r}$  هي المتراكمة المشتركة من الدرجة  $r$  مع تعريف  $k_{00}$  بالعلاقة التالية:

$$(5. 14. 3): k_{00} = 0$$

حيث أن مفكوك  $K(t_1, t_2)$  لا يوجد به حد مطلق خالي من  $(it_1)$   $(it_2)$  وذلك كما يتضح من العلاقة (5. 14. 5) التالية. ويمكن كذلك كتابة  $K(t_1, t_2)$  في الصورة المرافقة التالية:

$$(5. 14. 4): K(t_1, t_2) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(it_1)^s}{s!} \frac{(it_2)^r}{r!} k_{s,r}$$

من (5. 12. 6) و (5. 14. 1, 2, 4) نجد أن:

$$(5. 14. 5): (a) K(t_1, t_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \frac{(it_2)^r}{r!} k_{j-r,r}$$

أو:

$$(b) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(it_1)^s}{s!} \frac{(it_2)^r}{r!} k_{s,r} ; k_{00} = 0$$

$$= \ln \phi(t_1, t_2)$$

$$(c) = \ln \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=0}^j \frac{(it_1)^{j-r}}{(j-r)!} \frac{(it_2)^r}{r!} \mu'_{j-r,r} \right]$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

لو:

$$(d) = \ln \left[ \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(it_1)^r}{r!} \frac{(it_2)^s}{s!} \mu'_{rs} \right]$$

حيث  $\mu'_{00} = 1$ .

ومن العلاقة السابقة يمكن إيجاد العلاقة بين العزوم المشتركة بدلالة المترجمات المشتركة والعكس بالعكس.

ملاحظة (5-14-1): لقد قمنا شرط كافي لازم لاستقلال متغيرين عشوائيين في نظرية (5-11-1) والآن نقدم شرط كافي لازم آخر لاستقلال متغيرين عشوائيين باستخدام المترجمات المشتركة للمتغيرين فيما يلي:

إذا كان  $(X_1, X_2)$  متغير عشوائي ثنائي مشترك فإن المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  يكونا مستقلان، إذا وفقط إذا، كانت:

$$k_{rs} = 0$$

لجميع قيم  $r, s$  التي تحقق العلاقة  $rs \neq 0$ . بشرط أن تكون المترجمات من جميع الدرجات موجودة - علماً بأن  $k_{rs}$  هي المترجمة المشتركة للمتغير  $(X_1, X_2)$  من الدرجة  $r+s$ . ويمكن إثبات الشرط السابق كما يلي:

نعرف من نظرية (5-11-1) أن المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  يكونا مستقلان إذا وفقط إذا كانت:  $\phi(t_1, t_2) = \phi_1(t_1)\phi_2(t_2)$  ويلخذ لوغاريتم طرفي العلاقة السابقة:

$$\ln \phi(t_1, t_2) = \ln \phi_1(t_1) + \ln \phi_2(t_2)$$

$$K(t_1, t_2) = K_1(t_1) + K_2(t_2)$$

حيث  $K(t_1, t_2)$  هي الدالة المولدة للمترجمات المشتركة للمتغير  $(X_1, X_2)$  و  $K_1(t_1)$  هي الدالة المولدة للمترجمات للمتغير  $X_1$  و  $K_2(t_2)$  هي الدالة المولدة للمترجمات للمتغير  $X_2$ . ومن (5.1.41) و (5.14.5b) يمكن كتابة العلاقة السابقة في الصيغة التالية:

$$(5.14.6): \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(it_1)^r}{r!} \frac{(it_2)^s}{s!} k_{rs} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it_1)^n}{n!} k_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(it_2)^m}{m!} k_{0m} ; (k_{00} = 0)$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

إن المتغيران  $X_1$  و  $X_2$  يكونا مستقلان إذا وفقط إذا تحققت العلاقة (5. 14. 6).  
علماً بأن هذه العلاقة تتضمن أن:

$$k_{rs} = 0 \text{ إذا كانت } rs \neq 0. \text{ وذلك لما بقى:}$$

(1) بمقارنة معامل  $\frac{(it_1)^r}{r!}$  في طرفي العلاقة (5. 14. 6)، نلاحظ أن  $\frac{(it_1)^r}{r!}$  توجد في الطرف الأيسر عندما  $s=0$  وفي الأيمن عندما  $n=r$  وفي هذه الحالة يكون معامل  $\frac{(it_1)^r}{r!}$  في الطرفين هو  $k_{r,0}$  وتكون المتساوية صحيحة.

(2) وبمقارنة معامل  $\frac{(it_2)^s}{s!}$  في الطرفين نجد في الطرف الأيسر عندما  $r=0$  وفي الأيمن عندما  $m=s$  وفي هذه الحالة يكون المعامل في الطرفين هو  $k_{0,s}$  وبالتالي فالمتساوية صحيحة أيضاً.

(3) بمقارنة معامل  $\frac{(it_1)^r}{r!} \frac{(it_2)^s}{s!}$  في الطرفين عندما  $r \neq 0$  و  $s \neq 0$  هذا المعامل في الطرف الأيسر يساوي  $k_{rs}$  وفي الأيمن يساوي الصفر إن العلاقة (5. 14. 6) تستحق إذا كانت  $k_{rs} = 0$  لجميع قيم  $rs \neq 0$ . وبما أن صحة العلاقة (5. 14. 6) تعتبر شرط كافي لازم لاستقلال المتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  إن اشتراط أن  $k_{rs} = 0$  إذا كانت  $rs \neq 0$  يعتبر شرط كافي لازم لاستقلال المتغيرين.

## (5 - 15) العلاقة بين العزوم والمترامكات المشتركة للمتغير المشترك الثاني:

(5 - 15 - 1): إذا كانت العزوم المشتركة من الدرجة  $n$  للمتغير المشترك  $(X_1, X_2)$  موجودة فيمكن إيجاد العلاقة بينها باستخدام العلاقات (5. 14. 5) بين الدالة المولدة للمترامكات المشتركة  $K(t_1, t_2)$  والدالة المميزة  $\phi(t_1, t_2)$  كما يلي:  
من العلاقة (5. 12. 6) يمكن كتابة  $\phi(t_1, t_2)$  في الصورة التالية:

### الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(5.15.1a): \phi(t_1, t_2) = 1 + (\theta_1 \mu'_{10} + \theta_2 \mu'_{01})$$

$$+ \left( \frac{\theta_1^2}{2!} \mu'_{20} + \theta_1 \theta_2 \mu'_{11} + \frac{\theta_2^2}{2!} \mu'_{02} \right)$$

$$+ \left( \frac{\theta_1^3}{3!} \mu'_{30} + \frac{\theta_1^2 \theta_2}{2! 1!} \mu'_{21} + \frac{\theta_1 \theta_2^2}{1! 2!} \mu'_{12} + \frac{\theta_2^3}{3!} \mu'_{03} \right)$$

$$+ \left( \frac{\theta_1^4}{4!} \mu'_{40} + \frac{\theta_1^3 \theta_2}{3! 1!} \mu'_{31} + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2! 2!} \mu'_{22} + \frac{\theta_1 \theta_2^3}{1! 3!} \mu'_{13} + \frac{\theta_2^4}{4!} \mu'_{04} \right) + \dots$$

حيث  $\theta_1 = i t_1$  ;  $\theta_2 = i t_2$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة في الصورة التالية:

$$(5.15.1b): \phi(t_1, t_2) = 1 + Z(\theta_1, \theta_2)$$

حيث  $Z(\theta_1, \theta_2)$  تمثل كل الحدود الموجودة في الطرف الأيمن من (5.15.1a) ماعدا الحد الأول. وبذلك تكون الدالة المولدة للمترجمات المشتركة:

$$(5.15.2): K(t_1, t_2) = \ln[1 + Z(\theta_1, \theta_2)]$$

$$= Z(\theta_1, \theta_2) - \frac{1}{2} Z^2(\theta_1, \theta_2) + \frac{1}{3} Z^3(\theta_1, \theta_2) \\ - \frac{1}{4} Z^4(\theta_1, \theta_2) - \dots$$

وباستخدام قيمة  $Z(\theta_1, \theta_2)$  كما هي في (5.15.1b) يمكن كتابة المعادلة السابقة

في الصورة التالية بدلالة  $\theta_1$  و  $\theta_2$  والعزوم المشتركة  $\mu'_{rs}$  حيث نجد أن:

$$(5.15.3): K(t_1, t_2) = \theta_1 \mu'_{10} + \theta_2 \mu'_{01}$$

حدود من الدرجة الأولى في  $\theta_1$  و  $\theta_2$  + حدود من الدرجة الثانية في  $\theta_1$  و  $\theta_2$  :  
(الصف الثاني من Z):

$$+ \frac{\theta_1^2}{2!} \mu'_{20} + \theta_1 \theta_2 \mu'_{11} + \frac{\theta_2^2}{2!} \mu'_{02}$$

+ من  $-\frac{Z^2}{2}$ :

$$- \frac{1}{2} \theta_1^2 \mu_{10}^2 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \mu_{01}^2 - \theta_1 \theta_2 \mu'_{10} \mu'_{01}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

+ حدود من الدرجة الثالثة في  $\theta_1 \theta_2$ :

من Z:

$$+ \frac{\theta_1^3}{3!} \mu'_{30} + \frac{\theta_1^2 \theta_2}{2! 1!} \mu'_{21} + \frac{\theta_1 \theta_2^2}{1! 2!} \mu'_{12} + \frac{\theta_2^3}{3!} \mu'_{03}$$

من  $-\frac{Z^2}{2}$ :

$$- \frac{\theta_1^3}{2!} \mu'_{10} \mu'_{20} - \theta_1^2 \theta_2 \mu'_{10} \mu'_{11} - \frac{\theta_1 \theta_2^2}{2!} \mu'_{10} \mu'_{20}$$

$-\frac{1}{2}$  ضعف الحد الثاني من Z في الحدود التالية له

$$- \frac{\theta_1^2 \theta_2}{2} \mu'_{01} \mu'_{20} - \theta_1 \theta_2^2 \mu'_{01} \mu'_{11} - \frac{\theta_2^3}{2!} \mu'_{01} \mu'_{02}$$

من  $\frac{Z^3}{3}$ :

$$+ \frac{1}{3} \theta_1^3 \mu'_{10} \mu'_{10} + \frac{1}{3} \theta_2^3 \mu'_{01} \mu'_{01} + \theta_1^2 \theta_2 \mu'_{10} \mu'_{01} + \theta_1 \theta_2^2 \mu'_{10} \mu'_{01}$$

+ حدود من الدرجة الرابعة في  $\theta_1 \theta_2$

(الصف الرابع من Z)

$$+ \frac{\theta_1^4}{4!} \mu'_{40} + \frac{\theta_1^3 \theta_2}{3! 1!} \mu'_{31} + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2! 2!} \mu'_{22} + \frac{\theta_1 \theta_2^3}{1! 3!} \mu'_{13} + \frac{\theta_2^4}{4!} \mu'_{04}$$

(من  $-\frac{Z^2}{2}$ )

$$- \frac{\theta_1^4}{2 \times 4} \mu'_{20} \mu'_{20} - \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2} \mu'_{11} \mu'_{11} - \frac{\theta_2^4}{2 \times 4} \mu'_{02} \mu'_{02}$$

( $-\frac{1}{2}$  ضعف أول عنصر من الصف الأول من Z في كل عناصر الصف الثالث):

$$- \frac{\theta_1^4}{3!} \mu'_{10} \mu'_{30} - \frac{\theta_1^3 \theta_2}{2!} \mu'_{10} \mu'_{21} - \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2} \mu'_{10} \mu'_{12} - \frac{\theta_1 \theta_2^3}{3!} \mu'_{10} \mu'_{03}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(- ½ ضعف العنصر الثانى من الصف الأول من Z فى كل عناصر الصف الثالث):

$$-\frac{\theta_1^3 \theta_2}{3!} \mu'_{01} \mu'_{30} - \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2} \mu'_{01} \mu'_{21} - \frac{\theta_1 \theta_2^3}{2} \mu'_{01} \mu'_{12} - \frac{\theta_2^4}{3!} \mu'_{01} \mu'_{03}$$

(- ½ ضعف العنصر الأول من الصف الثانى من Z فى بقية حدود الصف الثانى):

$$-\frac{\theta_1^3 \theta_2}{2} \mu'_{20} \mu'_{11} - \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2! 2!} \mu'_{20} \mu'_{02}$$

(- ½ ضعف العنصر الثانى من الصف الثانى من Z فى العنصر الذى يليه):

$$-\frac{\theta_1 \theta_2^3}{2} \mu'_{11} \mu'_{02}$$

$$+ \left(\frac{Z^3}{3}\right) \text{ (حدود من } Z^3 \text{)}$$

(3 × ½ أمثال مربع عناصر الصف الأول من Z فى الصف الثانى)

$$+ \frac{\theta_1^4}{2!} \mu'_{10} \mu'_{20} + \theta_1^3 \theta_2 \mu'_{10} \mu'_{11} + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2!} \mu'_{10} \mu'_{02}$$

$$+ \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2!} \mu'_{01} \mu'_{20} + \theta_1 \theta_2^3 \mu'_{01} \mu'_{11} + \frac{\theta_2^4}{2} \mu'_{01} \mu'_{02}$$

(من ضرب 3 حدود من Z فى بعضها) 6 × ½ أمثال (حاصل ضرب 3 حدود)

(× ⅙ الحد الأول من الصف الأول من Z × الحد الثانى من الصف الأول × كل

حد من حدود الصف الثانى من Z)

$$+ \frac{\theta_1^3 \theta_2}{3} \mu'_{10} \mu'_{01} \mu'_{20} + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{3} \mu'_{10} \mu'_{01} \mu'_{11} + \frac{\theta_1 \theta_2^3}{3} \mu'_{10} \mu'_{01} \mu'_{02}$$

(من - ⅙): القوى الرابعة للصف الأول من Z:

$$-\frac{\theta_1^4}{4} \mu'_{10} \mu'_{01} - \frac{\theta_2^4}{4} \mu'_{01}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

+ 4 أمثال مكعب العنصر الأول من Z في العنصر التالي له:

$$- \theta_1^3 \theta_2 \mu_{10}^{\prime 3} \mu_{01}^{\prime}$$

+ 6 أمثال مربع العنصر الأول من Z في مربع العنصر التالي له:

$$- \frac{6 \theta_1^2 \theta_2^2}{4} \mu_{10}^{\prime 2} \mu_{01}^{\prime 2}$$

+ 4 أمثال العنصر الأول من Z في مكعب العنصر التالي له:

$$- \theta_1 \theta_2^3 \mu_{10}^{\prime 3} \mu_{01}^{\prime}$$

+ عناصر من الدرجة الخامسة فما فوق في  $\theta_1 \theta_2$ . (حيث  $\theta_1 = i t_1$  و  $\theta_2 = i t_2$ ).

ولكن الدالة المولدة للمتراكمات  $K(t_1, t_2)$  يمكن كتابتها من العلاقة (2. 14. 5) في الصورة التالية:

$$\begin{aligned} (5. 15. 4): K(t_1, t_2) = & \theta_1 k_{10} + \theta_2 k_{01} + \frac{\theta_1^2}{2!} k_{20} + \theta_1 \theta_2 k_{11} + \frac{\theta_2^2}{2!} k_{0221} \\ & + \frac{\theta_1^3}{3!} k_{30} + \frac{\theta_1^2 \theta_2}{2! 1!} k \\ & + \frac{\theta_1 \theta_2^2}{1! 2!} k_{12} + \frac{\theta_2^3}{3!} k_{03} + \frac{\theta_1^4}{4!} k_{40} + \frac{\theta_1^3 \theta_2}{3! 1!} k_{31} \\ & + \frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2! 2!} k_{22} + \frac{\theta_1 \theta_2^3}{1! 3!} k_{13} \\ & + \frac{\theta_2^4}{4!} k_{04} + \dots \end{aligned}$$

(حيث  $\theta_2 = i t_2$  و  $\theta_1 = i t_1$ )

وبمقارنة معاملات  $\theta_1^r \theta_2^s$  في مفكوك  $K(t_1, t_2)$  في كل من (5. 15. 3) و (5. 15. 4) نحصل على المتراكمة  $k_{rs}$  بدلالة العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) من الدرجة  $r+s$  لجميع قيم  $r$  و  $s$  وذلك كما يلي:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(5 - 15 - 2) المترجمات المشتركة بدلالة العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) للمتغير التتالي المشترك:

أولاً: مترجمات الدرجة الأولى (عدها 2):

بموازنة معاملات  $\theta_1$  و  $\theta_2$  نجد أن:

$$(5. 15. 5): k_{10} = \mu'_{10} ; k_{01} = \mu'_{01}$$

ثانياً: مترجمات الدرجة الثانية (عدها 3):

بموازنة معاملات  $\frac{\theta_1^2}{2!}$  و  $\theta_1 \theta_2$  و  $\frac{\theta_2^2}{2!}$  نجد أن:

$$(5. 15. 6): k_{20} = \mu'_{20} - \mu'^2_{10} ; k_{11} = \mu'_{11} - \mu'_{10} \mu'_{01} ; k_{02} = \mu'_{02} - \mu'^2_{01}.$$

ثالثاً: مترجمات الدرجة الثالثة (عدها 4):

بموازنة معاملات  $\frac{\theta_1^3}{3!}$  و  $\frac{\theta_1 \theta_2^2}{1! 2!}$  و  $\frac{\theta_1^2 \theta_2}{2! 1!}$  و  $\frac{\theta_2^3}{3!}$  نجد أن:

$$(5. 15. 7): k_{30} = \mu'_{30} - 3\mu'_{10} \mu'_{20} + 2\mu'^3_{10}$$

$$k_{21} = \mu'_{21} - 2\mu'_{10} \mu'_{11} - \mu'_{01} \mu'_{20} + 2\mu'^2_{10} \mu'_{01}$$

$$k_{12} = \mu'_{12} - 2\mu'_{01} \mu'_{11} - \mu'_{10} \mu'_{02} + 2\mu'^2_{01} \mu'_{10}$$

$$k_{03} = \mu'_{03} - 3\mu'_{01} \mu'_{02} + 2\mu'^3_{01}$$

رابعاً: مترجمات الدرجة الرابعة (عدها 5):

بموازنة معاملات  $\frac{\theta_1^4}{4!}$  و  $\frac{\theta_1^3 \theta_2}{3! 1!}$  و  $\frac{\theta_1^2 \theta_2^2}{2! 2!}$  و  $\frac{\theta_1 \theta_2^3}{1! 3!}$  و  $\frac{\theta_2^4}{4!}$  نجد أن

$$(5. 15. 8): k_{40} = \mu'_{40} - 3\mu'^2_{20} - 4\mu'_{10} \mu'_{30} + 12\mu'^2_{10} \mu'_{20} - 6\mu'^4_{10}.$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$k_{31} = \mu'_{31} - 3\mu'_{10}\mu'_{21} - \mu'_{01}\mu'_{30} - 3\mu'_{20}\mu'_{11} + 6\mu'^2_{10}\mu'_{11} \\ - 6\mu'^3_{10}\mu'_{01} + 6\mu'_{01}\mu'_{10}\mu'_{20}.$$

$$k_{22} = \mu'_{22} - 2\mu'^2_{11} - 2\mu'_{10}\mu'_{12} - 2\mu'_{01}\mu'_{21} - \mu'_{20}\mu'_{02} + 2\mu'^2_{10}\mu'_{02} \\ + 2\mu'^2_{01}\mu'_{20} - 6\mu'^2_{10}\mu'^2_{01} + 8\mu'_{10}\mu'_{01}\mu'_{11}.$$

$$k_{13} = \mu'_{13} - 3\mu'_{01}\mu'_{12} - \mu'_{10}\mu'_{03} - 3\mu'_{02}\mu'_{11} + 6\mu'^2_{01}\mu'_{11} \\ - 6\mu'_{01}\mu'_{10}\mu'_{02} + 6\mu'_{10}\mu'_{01}\mu'_{02}.$$

$$k_{04} = \mu'_{04} - 3\mu'^2_{02} - 4\mu'_{01}\mu'_{03} + 12\mu'^2_{01}\mu'_{02} - 6\mu'^4_{01}.$$

ملاحظة (5 - 15 - 1): يجب أن نذكر أن  $k_{10}$  و  $k_{20}$  و  $k_{30}$  و  $k_{00}$  هي المترجمات الأولى والثانية والثالثة والرابعة للمتغير المفرد  $X_1$  وبالمثل  $k_{01}$  و  $k_{02}$  و  $k_{03}$  و  $k_{04}$  هي المترجمات الأولى والثانية والثالثة والرابعة للمتغير المفرد  $X_2$ . ويتضح ذلك من مقارنة النتائج السابقة بالعلاقات (5. 1. 44). لذلك فإن  $k_{11}$  و  $k_{21}$  و  $k_{12}$  و  $k_{31}$  و  $k_{22}$  و  $k_{13}$  هي المترجمات التي لم يسبق لنا إيجادها بدلالة العزوم والتي قدمناها هنا لأول مرة.

(5 - 15 - 3) العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) بدلالة المترجمات المشتركة للمتغير التفاضلي المشترك:

يمكن الآن الحصول على العزوم المشتركة (حول الصفر أو حول نقطة) بدلالة المترجمات المشتركة بعملية رجوع عكسية للعلاقات الموجودة في البند (5 - 15 - 1) كما يلي:

ولاً: عزوم الدرجة الأولى (عدها 2):

$$(5. 13. 9): \mu'_{10} = k_{10} ; \mu'_{01} = k_{01}$$

ثانياً: عزوم الدرجة الثانية (عدها 3):

$$(5. 15. 10): \mu'_{20} = k_{20} + k_{10}^2$$

$$\mu'_{02} = k_{02} + k_{01}^2$$

$$\mu'_{11} = k_{11} + k_{10}k_{01}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ثالثاً: عزوم الدرجة الثالثة (عدها 4):

$$(5. 15. 11): \mu'_{30} = k_{30} + 3k_{10}k_{20} + k_{10}^3$$

$$\mu'_{03} = k_{03} + 3k_{01}k_{02} + k_{01}^3$$

$$\mu'_{21} = k_{21} + 2k_{10}k_{11} + k_{01}k_{20} + k_{01}k_{10}^2$$

$$\mu'_{12} = k_{12} + 2k_{01}k_{11} + k_{10}k_{02} + k_{10}k_{01}^2$$

رابعاً: عزوم الدرجة الرابعة (عدها 5):

$$(5. 15. 12): \mu'_{40} = k_{40} + 3k_{20}^2 + 6k_{10}^2k_{20} + 4k_{10}k_{30} - 2k_{01}^4$$

$$\mu'_{04} = k_{04} + 3k_{02}^2 + 6k_{01}^2k_{02} + 4k_{01}k_{03} - 2k_{01}^4$$

$$\begin{aligned} \mu'_{31} = & k_{31} + k_{01}k_{10}^3 + 3k_{10}^2k_{11} + 3k_{01}k_{10}k_{20} + k_{01}k_{30} \\ & + 3k_{11}k_{20} + 3k_{10}k_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'_{13} = & k_{13} + k_{10}k_{01}^3 + 3k_{01}^2k_{11} + 3k_{10}k_{01}k_{02} + k_{10}k_{03} \\ & + 3k_{11}k_{02} + 3k_{01}k_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'_{22} = & k_{22} + 2k_{11}^2 + k_{01}^2k_{10}^2 + k_{10}^2k_{02} + k_{01}^2k_{20} \\ & + 2k_{10}k_{12} + 2k_{01}k_{21} \\ & + k_{02}k_{20} + 4k_{01}k_{10}k_{11} \end{aligned}$$

(5 - 15 - 4) للمتراكمات المشتركة بدلالة العزوم المركزية المشتركة للمتغير

الثلاثي المشترك:

يمكن الحصول على المتراكبات المشتركة بدلالة العزوم المركزية المشتركة وذلك

بوضع  $\mu'_{01} = \mu'_{10} = 0$  وإهمال الشرطية الموجودة فوق الرمز  $\mu$  في كل علاقات البند

(5 - 15 - 2) فنحصل على العلاقات التالية للمتراكبات المشتركة  $k_{rs}$  بدلالة العزوم

المركزية المشتركة  $\mu_{rs}$  لقيم  $r+s \leq 4$ . وينفس الأسلوب يمكن الحصول على نفس

النتائج لقيم  $r+s=5$  و  $r+s=6$  وذلك كما يلي:

أولاً: متراكبات الدرجة الأولى:

$$(5. 15. 13): k_{10} = k_{01} = 0$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ثانياً: مترامكات الدرجة الثانية:

$$(5.15.14): k_{20} = \mu_{20}, k_{02} = \mu_{02}, k_{11} = \mu_{11}$$

ثالثاً: مترامكات الدرجة الثالثة:

$$(5.15.15): k_{30} = \mu_{30}, k_{03} = \mu_{03}$$

$$k_{21} = \mu_{21}, k_{12} = \mu_{12}$$

رابعاً: مترامكات الدرجة الرابعة:

$$(5.15.16): k_{40} = \mu_{40} - 3\mu_{20}^2$$

$$k_{04} = \mu_{04} - 3\mu_{02}^2$$

$$k_{31} = \mu_{31} - 3\mu_{20}\mu_{11}$$

$$k_{13} = \mu_{13} - 3\mu_{02}\mu_{11}$$

$$k_{22} = \mu_{22} - 2\mu_{11}^2 - \mu_{20}\mu_{02}$$

خامساً: مترامكات الدرجة الخامسة:

$$(5.15.17): k_{50} = \mu_{50} - 10\mu_{20}\mu_{30}$$

$$k_{05} = \mu_{05} - 10\mu_{02}\mu_{03}$$

$$k_{41} = \mu_{41} - 6\mu_{20}\mu_{21} - 4\mu_{11}\mu_{30}$$

$$k_{14} = \mu_{14} - 6\mu_{02}\mu_{12} - 4\mu_{11}\mu_{03}$$

$$k_{32} = \mu_{32} - 3\mu_{20}\mu_{12} - 6\mu_{11}\mu_{21} - \mu_{02}\mu_{30}$$

$$k_{23} = \mu_{23} - 3\mu_{02}\mu_{21} - 6\mu_{11}\mu_{12} - \mu_{20}\mu_{03}$$

سادساً: مترامكات الدرجة السادسة:

$$(5.15.18): k_{60} = \mu_{60} - 10\mu_{20}^2 - 15\mu_{20}\mu_{40} + 30\mu_{20}^3$$

$$k_{06} = \mu_{06} - 10\mu_{02}^2 - 15\mu_{02}\mu_{04} + 30\mu_{02}^3$$

$$k_{51} = \mu_{51} - 10\mu_{20}\mu_{31} - 5\mu_{11}\mu_{40} - 10\mu_{30}\mu_{21} + 30\mu_{20}^2\mu_{11}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$k_{15} = \mu_{15} - 10\mu_{02}\mu_{13} - 5\mu_{11}\mu_{04} - 10\mu_{03}\mu_{12} + 30\mu_{02}^2\mu_{11}.$$

$$k_{42} = \mu_{42} - 6\mu_{21}^2 - 6\mu_{20}\mu_{22} - 8\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{02}\mu_{40} - 4\mu_{30}\mu_{12} \\ + 6\mu_{20}^2\mu_{02} + 24\mu_{20}\mu_{11}^2.$$

$$k_{24} = \mu_{24} - 6\mu_{12}^2 - 6\mu_{02}\mu_{22} - 8\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{20}\mu_{04} - 4\mu_{03}\mu_{21} \\ + 6\mu_{02}^2\mu_{20} + 24\mu_{02}\mu_{11}^2$$

$$k_{33} = \mu_{33} - 3\mu_{20}\mu_{13} - 9\mu_{11}\mu_{22} - 3\mu_{02}\mu_{31} - \mu_{30}\mu_{03} \\ - 9\mu_{21}\mu_{12} + 12\mu_{11}^3 + 18\mu_{20}\mu_{11}\mu_{02}.$$

(5 - 15 - 5) العزوم المركزية المشتركة بدلالة المترجمات المشتركة للمتغير التالي المشترك:

ويمكن الحصول على العزوم المركزية المشتركة بدلالة المترجمات المشتركة بعملية رجوع عكسية للعلاقات الموجودة في البند (5 - 15 - 4) كما يلي:

أولاً: العزوم المركزية من الدرجة الأولى:

$$(5. 15. 19): \mu_{10} = \mu_{01} = 0$$

ثانياً: العزوم المركزية من الدرجة الثانية:

$$(5. 15. 20): \mu_{20} = k_{20}, \mu_{02} = k_{02}, \mu_{11} = k_{11}$$

ثالثاً: العزوم المركزية من الدرجة الثالثة:

$$(5. 15. 21): \mu_{30} = k_{30}, \mu_{03} = k_{03}, \mu_{21} = k_{21}, \mu_{12} = k_{12}$$

رابعاً: العزوم المركزية من الدرجة الرابعة:

$$(5. 15. 22): \mu_{40} = k_{40} + 3k_{20}^2$$

$$\mu_{04} = k_{04} + 3k_{02}^2$$

$$\mu_{31} = k_{31} + 3k_{20}k_{11}$$

$$\mu_{13} = k_{13} + 3k_{02}k_{11}$$

$$\mu_{22} = k_{22} + k_{02}k_{20} + 2k_{11}^2$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

خامساً: العزوم المركزية من الدرجة الخامسة:

$$(5. 15. 23): \mu_{30} = k_{30} + 10k_{20}k_{30}$$

$$\mu_{05} = k_{05} + 10k_{02}k_{03}$$

$$\mu_{41} = k_{41} + 6k_{20}k_{21} + 4k_{11}k_{30}$$

$$\mu_{14} = k_{14} + 6k_{02}k_{12} + 4k_{11}k_{03}$$

$$\mu_{32} = k_{32} + 3k_{20}k_{12} + 6k_{11}k_{21} + k_{02}k_{30}$$

$$\mu_{23} = k_{23} + 3k_{02}k_{21} + 6k_{11}k_{12} + k_{20}k_{03}$$

سابعاً: العزوم المركزية من الدرجة السادسة:

$$(5. 15. 24): \mu_{60} = k_{60} + 10k_{30}^2 + 15k_{20}k_{40} + 15k_{20}^2$$

$$\mu_{06} = k_{06} + 10k_{03}^2 + 15k_{02}k_{04} + 15k_{02}^2$$

$$\mu_{31} = k_{31} + 10k_{20}k_{31} + 5k_{11}k_{40} + 10k_{30}k_{21} + 15k_{11}k_{20}^2$$

$$\mu_{13} = k_{13} + 10k_{02}k_{31} + 5k_{11}k_{04} + 10k_{03}k_{12} + 15k_{11}k_{02}^2$$

$$\mu_{42} = k_{42} + 6k_{21}^2 + 3k_{02}k_{20}^2 + 12k_{11}^2k_{20} + 6k_{20}k_{22} + 8k_{11}k_{31} \\ + k_{02}k_{40} + 4k_{30}k_{12}$$

$$\mu_{24} = k_{24} + 6k_{12}^2 + 3k_{20}k_{02}^2 + 12k_{11}^2k_{02} + 6k_{02}k_{22} + 8k_{11}k_{13} \\ + k_{20}k_{04} + 4k_{03}k_{21}$$

$$\mu_{33} = k_{33} + 3k_{20}k_{13} + 9k_{02}k_{20}k_{11} + 6k_{11}^3 + 9k_{11}k_{22} + 3k_{02}k_{31} \\ + k_{30}k_{03} + 9k_{21}k_{12}$$

ملاحظة (5 - 15 - 2): يمكن الحصول على العزوم المركزية المشتركة بدلالة العزوم المشتركة حول الصفر (أو حول نقطة) وذلك بالتعويض عن المترجمات المشتركة في العلاقات (5. 15. 20) حتى (5. 15. 24) بدلالة العزوم حول الصفر (أو حول نقطة) من العلاقات (5. 15. 6, 7, 8). فمثلاً من (5. 15. 20) نجد أن:

$$\mu_{20} = k_{20} , \mu_{02} = k_{02} , \mu_{11} = k_{11}$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ومن (5. 15. 6) نجد أن:

$$k_{20} = \mu'_{20} - \mu_{10}^2, \quad k_{02} = \mu'_{02} - \mu_{01}^2, \quad k_{11} = \mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{01}$$

بأن:

$$(5. 15. 25): \mu_{20} = \mu'_{20} - \mu_{10}^2$$

$$\mu_{02} = \mu'_{02} - \mu_{01}^2$$

$$\mu_{11} = \mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{01}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\mu_{12} = k_{12} = \mu'_{12} - 2\mu'_{01}\mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{02} + 2\mu_{01}^2\mu'_{10}$$

$$\mu_{21} = k_{21} = \mu'_{21} - 2\mu'_{10}\mu'_{11} - \mu'_{01}\mu'_{20} + 2\mu_{10}^2\mu'_{01}$$

وهكذا.

(5 - 16) الدالة المميزة لمتغير عشوائى مشترك عدد مركباته  $n$ :

إذا كان  $\underline{X}' = (X_1, \dots, X_n)$  متغير عشوائى مشترك دالة توزيعه الاحتمالى

$F(x_1, \dots, x_n)$  و  $\underline{t}' = (t_1, \dots, t_n)$  حيث  $t_j$  أعداد حقيقية لجميع قيم  $j = 1, \dots, n$ ، فإن

الدالة المميزة  $(t_1, \dots, t_n)$  للمتغير  $\underline{X}'$  تعرف بالعلاقة التالية:

$$(5. 16. 1): \phi(t_1, \dots, t_n) = \int_{R_n} e^{i \underline{t} \cdot \underline{X}} dF(x_1, \dots, x_n).$$

حيث  $\underline{t} \cdot \underline{X} = \sum_{j=1}^n t_j x_j$  و  $t_1, \dots, t_n$  أعداد حقيقية.

والدالة المولدة للعزوم المشتركة  $M(t_1, \dots, t_n)$  تعرف بأنها:

$$(5. 16. 2): M(t_1, \dots, t_n) = \phi\left(\frac{t_1}{i}, \dots, \frac{t_n}{i}\right).$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

ويمكن تعميم خصائص الدالة المميزة في حالة متغيرين المتقدمة في (5-7) إلى حالة  $n$  من المتغيرات حيث نجد أن:

$$(5.16.3): \phi(0, \dots, 0) = 1$$

$$(5.16.4): |\phi(t_1, \dots, t_n)| \leq 1$$

$$(5.16.5): \phi(-t_1, \dots, -t_n) = \overline{\phi(t_1, \dots, t_n)}$$

حيث الطرف الأيمن في المعادلة السابقة هو مرافق للدالة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$ . وإذا كان العزم المشترك  $\mu'_{j_1, \dots, j_n}$  موجود يمكن الحصول عليه بمفاضلة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  كما يلي:

$$(5.16.6): \mu'_{j_1, \dots, j_n} = \frac{\partial^{(j_1 + \dots + j_n)}}{\partial t_1^{j_1} \dots \partial t_n^{j_n}} \phi(t_1, \dots, t_n) \Big|_{(0, \dots, 0)} \downarrow \\ = \phi^{(j_1 + \dots + j_n)}(0, \dots, 0) / (i!)^{j_1 + \dots + j_n}.$$

وطبقاً إذا كان  $\mu'_{j_1, \dots, j_n}$  موجود تكون جميع العزوم  $\mu'_{j_1, \dots, j_n}$  موجودة لجميع قيم  $r_1 + \dots + r_n \leq j_1 + \dots + j_n$ .

كما يمكن الحصول على الدالة المميزة لأي مجموعة جزئية من المتغيرات المشتركة يقل عددها عن  $n$  من الدالة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  بوضع أصفار بدلاً من قيم  $t$  المناظرة للمتغيرات التي لا توجد في تلك المجموعة الجزئية. فمثلاً الدالة المميزة للمتغير المشترك  $(X_1, X_3)$  تكون:

$$\phi(t_1, 0, t_3, 0, \dots, 0) = \phi(t_1, t_3).$$

ويمكن إيجاد مفكوك ماركوفين للدالة المميزة المشتركة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  في جوار للنقطة  $t' = (0, \dots, 0)$  كتعميم لنظرية (5-12) أو للعلاقة (5.14.5d)، فإذا كانت العزوم من جميع الدرجات موجودة يمكن كتابة مفكوك  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  في الصورة التالية:

$$(5.16.7): \phi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{r_1, \dots, r_n=0}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{(i t_j)^{r_j}}{r_j!} \right] \mu'_{r_1, \dots, r_n}.$$

وإذا كانت العزوم من الدرجة الثانية موجودة ورمزنا لها بالرموز التالية:

$$(5.16.8): \alpha'_j = E(X_j), \quad \alpha'_{jj} = E(X_j^2), \quad \alpha'_{js} = E(X_j X_s)$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

فيمكن من (5. 13. 2a, b) إيجاد مفكوك  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  حتى عزوم الدرجة الثانية في الصورة التالية:

$$(5. 16. 9): \phi(t_1, \dots, t_n) = 1 + \sum_{j=1}^n (i t_j) \alpha'_j + \sum_{j,s=1}^n (i t_j)(i t_s) \alpha'_{js} + 0 \left[ \prod_{j=1}^n t_j(2) \right]$$

حيث

$$\lim_{(t_1, \dots, t_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{0 \left[ \prod_{j=1}^n t_j(2) \right]}{t^n} = 0$$

وإذا كانت عزوم الدرجة الأولى كلها أصفار ( $\alpha_j = 0$ ) فنحصل على الدالة المميزة المشتركة المركزية في الصورة التالية:

$$(5. 16. 10): \phi_c(t_1, \dots, t_n) = 1 + \sum_{j,s=1}^n (i t_j)(i t_s) \alpha_{js} + 0 \left[ \prod_{j=1}^n t_j(2) \right]$$

حيث  $\alpha_{js}$  هو العزم المركزي للمتغير المشترك  $(X_j, X_s)$  و  $0 \left[ \prod_{j=1}^n t_j(2) \right]$

كما في (5. 16. 9). كما أن مفكوك الدالة المولدة للمتراكمات  $K(t_1, \dots, t_n)$  يمكن كتابته في الصورة التالية:

$$(5. 16. 11): K(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^{\infty} \left( \prod_{r=1}^n \frac{(i t_r)^{j_r}}{j_r!} \right) k_{j_1 \dots j_n} = \ln \phi(t_1, \dots, t_n).$$

ومن العلاقة السابقة مع المفكوك (5. 16. 7) يمكن الحصول على العزوم المشتركة بدلالة المتراكمات المشتركة وبالعكس في حالة المتغير المتعدد  $(X_1, \dots, X_n)$ .

ويمكن كذلك تعميم نظريتي التعاكس (5 - 10 - 1) إلى حالة  $n$  من المتغيرات كما يلي:

## الفصل الخامس- الدوال المميزة

نظرية (5- 16- 1):

إذا كان  $(X_1, \dots, X_n)$  متغير عشوائي مشترك دالته المميزة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  ودالة توزيعه الاحتمالي  $F(x_1, \dots, x_n)$  و  $I_n$  فترة في الفراغ ذو الـ  $n$  بعداً  $R_n$  معرفة بالمتباينات:

$$a_r - h_r < X_r \leq a_r + h_r ; h_r > 0 ; r = 1, 2, \dots, n.$$

وكانت الدالة  $F(x_1, \dots, x_n)$  مستمرة على السطح الزائد للفترة المغلقة المحددة بالمتباينات:

$$a_r - h_r \leq X_r \leq a_r + h_r ; h_r > 0 ; r = 1, 2, \dots, n$$

فإن:

$$(5. 16. 12): Pr[(X_1, \dots, X_n) \in I_n] =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi^n} \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \prod_{j=1}^n \left[ \frac{\sin h_j t_j}{t_j} e^{-it_j a_j} \right] \phi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

وعندما تكون:

$$\int_{R_n} |\phi(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_n < \infty$$

نجد أن دالة كثافة الاحتمال  $f(x_1, \dots, x_n)$  تكون موجودة ومستمرة لجميع قيم  $(x_1, \dots, x_n)$  ومعطاة بالعلاقة:

$$(5. 16. 13): f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{-i \sum_{j=1}^n t_j x_j} \phi(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

كذلك يمكن تعميم نظرية التواصل نظرية (5- 4- 1) إلى حالة  $n$  من المتغيرات وسنكتفى هنا بذكر منطوق النظرية:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نظرية (5 - 16 - 2):

إذا كان لدينا متتابعة من التوزيعات الاحتمالية:

$$\{F_n(x_1, \dots, x_m)\} = F_1(x_1, \dots, x_m), F_2(x_1, \dots, x_m), \dots$$

في الفراغ  $R_m$ ، ولها الدوال المميزة:

$$\{\phi_n(t_1, \dots, t_m)\} = \phi_1(t_1, \dots, t_m), \phi_2(t_1, \dots, t_m), \dots$$

فإن المتتابعة  $\{F_n(x_1, \dots, x_m)\}$  تتقارب إلى دالة التوزيع الاحتمالي  $F(x_1, \dots, x_m)$ ، إذا وفقط إذا، كانت المتتابعة  $\{\phi_n(t_1, \dots, t_m)\}$  تتقارب إلى نهاية  $\phi(t_1, \dots, t_m)$  لجميع الأعداد الحقيقية  $t_1, \dots, t_m$ ، حيث تكون هذه النهاية مستمرة عند النقطة  $(0, \dots, 0) = (t_1, \dots, t_m)$  وعندما يستحق هذا الشرط تكون النهاية  $\phi(t_1, \dots, t_m)$  هي الدالة المميزة المشتركة المقلبة للنهية  $F(x_1, \dots, x_m)$ .

ومما هو جدير بالذكر أنه يمكن تعميم نظريات (5 - 5 - 1) و (5 - 6 - 1، 2)، الخاصة بتحديد دوال التوزيع الاحتمالي تحديداً، وحيثاً بعزوم التوزيع، إلى حالة  $n$  من المتغيرات العشوائية المشتركة وكل المطلوب هو كتابة  $\phi(t_1, \dots, t_n)$  و  $F(x_1, \dots, x_n)$  والعزوم المشتركة بدلا من  $\phi(t)$  و  $F(x)$  والعزوم المفردة.

### (5 - 17) تصحيحات شبرد Sheppard's Corrections:

(5 - 17 - 1) تصحيحات شبرد للعزوم العادية:

من المعروف عملياً أن بيانات العينات يتم تفريفها في جداول تكرارية. وكذلك المجتمعات المشاهدة التي تتكون من مشاهدات لكل مشاهدة قيمة عددية محددة. أحيانا يكون معروف لدينا قيم هذه المشاهدات بينما لا نعرف التوزيع الاحتمالي للمجتمع أى لا نعرف توزيعه النظري، وفي هذه الحالة نقرغ بيانات المجتمع في جدول تكرارى نهاماً مثل بيانات العينات. هذه الجداول تسمى بالتوزيعات التكرارية. والتوزيع التكرارى لمجتمع ما يقابل توزيعه الاحتمالي كما أن التوزيع التكرارى لعينة عشوائية من مجتمع ما - عندما تكون العينة كبيرة كبراً كافياً - يعتبر تقدير جيد لتوزيعه الاحتمالي (انظر بند (2 - 22)).

نفرض أن لدينا بيانات مجتمع مشاهد (أى مجتمع من المشاهدات) عدد مفرداته  $n$  أو بيانات عينة كبيرة مسحوبة من هذا المجتمع حجمها  $n$  وأن التوزيع النظري لهذا المجتمع توزيع مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  حيث  $X$  متغير مستمر محدود المدى



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

حيث  $a \leq x \leq b$  عددان حقيقيان محدودان. فإذا تم تصنيف مشاهدات هذا المجتمع (أو هذه العينة الكبيرة) في جدول تكرارى مكون من فئات Intervals عددها  $k$  وطول كل منها  $h$  ( $0 < h$ ) وكانت مراكز الفئات هي  $x_1, \dots, x_k$  حيث:

$$(5.17.1): x_j = a + (j - \frac{1}{2})h ; j = 1, 2, \dots, k.$$

فإن هذا الجدول يكون هو التوزيع التكرارى للمجتمع المقابل لتوزيعه الاحتمالى الذى له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$ .

عند حساب العزوم (أو أى إحصاء آخر) من الجدول التكرارى نفترض عادة أن قيم المتغير  $X$  التى تنتمى إلى الفئة  $J$  تقع كلها فى مركز الفئة  $J$  أى أنها كلها متساوية وكل منها تساوى  $x_j$ . ومعنى هذا الفرض أننا نفترض أن المجتمع له توزيع منقطع حيث يمكن للمتغير  $X$  أن يأخذ أى قيمة  $x_j$  مثلاً باحتمال:

$$(5.17.2): P_j = \int_{x_j - \frac{1}{2}h}^{x_j + \frac{1}{2}h} f(y) dy.$$

وعادة - من الناحية العملية والتطبيقية - نلجأ إلى حساب عزوم المجتمع - أى معلومة من معلوماته - من بيانات جدول تكرارى - سواء كان هذا الجدول يمثل المجتمع كله أو عينة منه. والعزوم التى نحسبها من الجدول التكرارى ليست هى بالضبط العزوم الحقيقية للمجتمع لأننا لا نحسبها من دالة كثافة احتمال المجتمع مباشرة وإنما نحسبها من بيانات المجتمع (أو عينة منه) بعد تقريبها فى جدول تكرارى مع افتراضنا - على غير الحقيقة - أن قيم المتغير التى تنتمى إلى فئة معينة تساوى كلها مركز هذه الفئة. فهى إذن عزوم للتوزيع التكرارى وليست العزوم الحقيقية للتوزيع الاحتمالى للمجتمع. وهذا الاختلاف بين مجموعة العزوم المحسوبة من جدول تكرارى وتلك العزوم الحقيقية للمجتمع يتطلب أن نرمز لكل منها برموز مختلفة. لذلك سنرمز للعزم الرأى الحقيقى حول الصفر للمجتمع بالرمز  $\mu'_r$  وللعزم الرأى حول الصفر للتوزيع التكرارى - أى المحسوب من توزيع تكرارى - بالرمز  $\bar{\mu}'_r$ . ومن (5.17.2) نجد أن العزم الرأى حول الصفر المحسوب من جدول تكرارى هو:

$$(5.17.3): \bar{\mu}'_r = \sum_j P_j x_j^r.$$

والعزم  $\bar{\mu}'_r$  (لجميع قيم  $r$  الصحيحة غير السالبة) ليس هو ما نريد معرفته لأننا فى الواقع نريد معرفة العزوم الحقيقية  $\mu'_r$  (لجميع قيم  $r$  الصحيحة غير السالبة). وبما أننا

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

نفترضنا أن المجتمع له توزيع مستمر دالة كثافة احتمال  $f(x)$  حيث  $a \leq x \leq b$  إذن العزم الرأسي الحقيقي للمجتمع هو:

$$(5.17.4): \mu'_r = \int_a^b x^r f(x) dx$$

من (5.17.3) و (5.17.4) يتضح الاختلاف الموجود بين العزوم الحقيقية ( $\mu'_r$ ) والعزوم المحسوبة من الجداول التكرارية ( $\bar{\mu}_r$ ) والذي نتج عن افتراض تساوى كل القيم التى تنتمى إلى فئة معينة مع مركز هذه الفئة. وتصحيحات "شبرد" تصبح تأثير هذا الفرض ولكن تحت شروط معينة هي:

- (1) أن يكون المتغير  $X$  مستمرا.
  - (2) أن يكون مدى المتغير  $X$  محدود. أى يوجد عددين حقيقيين محدودين  $a$  و  $b$  حيث  $a \leq x \leq b$ .
  - (3) أن يكون ذيلى توزيع المتغير  $X$  ملاصقين للمحور الأفقى للمتغير.
- وكما زاد هذا التلاصق كلما كان تصحيح شبرد أكثر فعالية فى الاقتراب بالعزوم  $\bar{\mu}_r$  إلى العزوم الحقيقية  $\mu'_r$  للمجتمع.

وهذا يعنى أن تصحيحات "شبرد" تكون فعالة فى المجتمع الذى تكون فيه الغالبية العظمى لقيم المتغير  $X$  - أى الجزء الرئيسى من التوزيع - واقعة بين حدين محدودين. ومن الناحية النظرية يمكن تطبيق تصحيحات "شبرد" فى حالة التوزيعات التى يأخذ فيها المتغير قيم لانهائية عندما تكون التكرارات متضائلة عند بداية ونهاية التوزيع بحيث يمكن إهمال قيم المتغير الموجودة فى بداية ونهاية التوزيع لضائلتها وتطبيق تصحيح "شبرد" على الجزء المتبقى من التوزيع وخاصة إذا كان الجزء الرئيسى من التوزيع مركزا فى الوسط وتكرارات الأطراف ضئيلة ومتلاشية. وفى الواقع نجد - فى الغالب الأعم من الحالات التطبيقية - أن الجزء الرئيسى من التوزيع الذى تتركز فيه غالبية القيم محدود، أى يقع بين حدين  $a$  و  $b$  حيث  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين محدودين وهذا ما يتطلبه الشرط (2) السابق. لذلك فإن افتراض أن للمتغير  $X$  - الذى يمثل المجتمع الحقيقى - يحقق الشروط (1) و (2) و (3) السابقة لن يؤثر كثيرا على عمومية تطبيق النتائج التى نتوصل إليها.

نحاول الآن معرفة العلاقة بين عزوم أى توزيع تكرارى ( $\bar{\mu}_r$ ) وما يقابلها من عزوم حقيقية للمجتمع ( $\mu'_r$ ) (لجميع قيم  $r$  حيث  $r$  عدد صحيح غير سالب). سنجد أنه بالنسبة للتوزيعات التى تتوافر فيها الشروط (1) و (2) و (3) السابقة يمكن الحصول على قيم تقريبية للعزوم الحقيقية  $\mu'_r$  بتطبيق تصحيحات معينة على عزوم التوزيع التكرارى  $\bar{\mu}_r$  التى تقابلها.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

من (5. 17. 2) و (5. 17. 3) يمكن كتابة العزم  $\bar{\mu}_r'$  في الصيغة التالية:

$$(5. 17. 5): \bar{\mu}_r' = \sum_{j=1}^k x_j^r \int_{x_j - \frac{1}{2}h}^{x_j + \frac{1}{2}h} f(y) dy$$

بوضع  $y = z + x_j$

$$(5. 17. 6): \bar{\mu}_r' = \sum_{j=1}^k x_j^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z + x_j) dz .$$

الجانب الأيمن من العلاقة السابقة يتكون من مجموع  $(\Sigma)$  وتكامل  $(\int)$  ويمكن — باستخدام صيغة "إيلر — ماكلورين للمجموع" (Euler Maclaurin Sum Formula) تحويل المجموع إلى تكامل. وهذه الصيغة يمكن للقارئ الرجوع إليها في كتب "حساب الفروق المحدودة" (Calculus of Finite Differences) أو إلى كتاب "كرامير" Harold Cramér (1923) "Mathematical Methods of Statistics", P. (123). لذلك سنقدم هذه الصيغة مباشرة لإيجاد  $\bar{\mu}_r'$  دون محاولة إثباتها. وتنص صيغة "إيلر — ماكلورين" على ما يلي:

إذا كان لدينا دالة مستمرة  $g(x)$  ولها مشتقات تفاضلية مستمرة حتى الدرجة  $2m$  لجميع قيم  $x$  في الفترة المغلقة  $[a, b]$  فإن:

$$(5. 17. 7a): \frac{1}{h} \int_a^b g(x) dx = \sum_{j=1}^k g(a + (j - \frac{1}{2})h) - \sum_{j=1}^m \frac{h^{2j-1}}{(2j)!} B_{2j}(\frac{1}{2}) \cdot [g^{(2j-1)}(x)]_a^b - S_{2m} .$$

حيث:  $[g^{(r)}(x)]_a^b$  هي المشتقة التفاضلية من الدرجة  $r$  للدالة  $g(x)$  عند النهاية  $b$  مطروحاً منها المشتقة عند النهاية  $a$ . و  $B_{2j}(\frac{1}{2})$  هي قيمة كثيرة حدود برنولي من الرتبة الأولى والدرجة  $2j$  في المتغير  $X$  عندما  $X = \frac{1}{2}$  و  $m$  أى عدد صحيح غير سالب بشرط أن كل المشتقات التفاضلية في العلاقة (5. 17. 7a) تكون موجودة ومستمرة. و  $S_{2m}$  ترمز للحد الباقي وصيغتها:

$$(5. 17. 7b): S_{2m} = \frac{k h^{2m}}{(2m)!} B_{2m}(\frac{1}{2}) g^{(2m)}(a + k h \theta) ; 0 < \theta < 1 .$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

في المعادلة (5. 17. 7a) إذا وضعنا:

$$g(x) = x^r \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z+x) dz$$

وإذا أهملنا  $S_{2m}$  واعتبرنا أن المشتقات التفاضلية  $[g^{(2j-1)}(x)]_a^b$  تساوى للصفر لقيم  $J = 1, 2, \dots, m$  - وهذا ممكن لأننا افترضنا أن ذيلي الدالة  $f(\cdot)$  ملاصقين للمحور الأفقي وبالتالي فإن  $f(\cdot)$  ومشتقاتها التفاضلية تتلاشى عند الطرفين - إذن نصل بالمعادلة (5. 17. 7a) إلى الصيغة التالية:

$$\frac{1}{h} \int_a^b \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z+x) dz dx = \sum_{j=1}^k [a + (J - \frac{1}{2})h]^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z + a + (J - \frac{1}{2})h) dz$$

ومن (5. 17. 1)

$$= \sum_{j=1}^k x_j^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z + x_j) dz = \bar{\mu}_r'$$

كما يتضح من (5. 17. 6).

$$\therefore \bar{\mu}_r' = \frac{1}{h} \int_a^b x^r \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(z+x) dz dx$$

بوضع

$$x = u - z, \quad u = z + x, \quad a \leq x \leq b, \quad -\frac{1}{2}h \leq z \leq \frac{1}{2}h, \quad a - \frac{1}{2}h \leq u \leq b + \frac{1}{2}h$$

وتصبح المتغيرات الجديدة  $z$  و  $u$  بدلاً من  $x$  و  $z$ . والدالة  $f(\cdot)$  معرفة فقط في المدى  $a \leq u \leq b$  وخارج هذا المدى تساوى للصفر. إذن مدى التكامل على هذه الدالة يظل من  $a$  إلى  $b$  بالرغم من أن  $a - \frac{1}{2}h \leq u \leq b + \frac{1}{2}h$ . أي أن:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_r' &= \frac{1}{h} \int_a^b \left[ \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} (u-z)^r dz \right] f(u) du. \\ &= \frac{1}{h} \int_a^b \frac{(u + \frac{1}{2}h)^{r+1} - (u - \frac{1}{2}h)^{r+1}}{(r+1)} f(u) du \end{aligned}$$

## الفصل الخامس - الجدول المميزة

وبفك  $(u \pm \frac{1}{2}h)^{r+1}$  بذات الحدين واختصار الحدود المتشابهة يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

العزم الرأى (من الدرجة  $r$ ) حول الصفر  $\bar{\mu}'_r$  المحسوب من الجدول التكرارى يأخذ الصيغة:

$$(5. 17. 8): \bar{\mu}'_r = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \binom{r}{2j} \left(\frac{1}{2}h\right)^{2j} \frac{1}{(2j+1)} \mu'_{r-2j}$$

حيث  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى  $\frac{r}{2}$  و  $\mu'_{r-2j}$  هو العزم الحقيقى حول الصفر للمجتمع من الدرجة  $(r-2j)$ .

الصيغة السابقة تعطى عزوم التوزيع التكرارى (العزوم غير المصححة  $\bar{\mu}'_r$ ) بدلالة عزوم المجتمع (أى العزوم الصحيحة  $\mu'_r$ ). ولكن العكس هو المطلوب، أى المطلوب معرفة  $\mu'_r$  بدلالة  $\bar{\mu}'_r$ .

ملاحظة (5 - 17 - 1): يجب ملاحظة أننا وضعا عدة فروض للوصول إلى الصيغة (5. 17. 8) - منها أن مدى المتغير  $X$  (الذى يمثل المجتمع) محدود وأن الحد الباقى  $S_{2m}$  المعطى بالعلاقة (5. 17. 7b) يمكن إهماله - وهذا يعتمد على شكل وسلوك الدالة  $f^{(2m-1)}(x)$  التى تمثل المشتقة التفاضلية من الدرجة  $(2m-1)$  لدالة كثافة المجتمع. لذلك لكى نطبق هذه التصحيحات بدقة يجب أن يكون المدى  $[a, b]$  - مدى المتغير  $X$  - محدود. وحتى فى حالة التوزيعات التى يكون مداها غير محدود يجب أن يكون الجزء الرئيسى من مفردات التوزيع مركز فى وسط المدى والتكرارات على الطرفين صغيرة، أن يقترب تلامص طرفى منحنى التوزيع التكرارى للمجتمع من المحور الأفقى، وبذلك يكون ذيل التوزيع ضئيلا فى تكرارتهما أى يكونا متلاشيان تقريبا وهذا يترتب عليه تحقق الفروض التى فرضناها بالنسبة للمشتقات  $f^{(2m-1)}(x)$  وكذلك إهمال الحد الباقى  $S_{2m}$  المعطى بالعلاقة (5. 17. 7b).

ذكرنا قبل الملاحظة السابقة مباشرة أن المطلوب هو معرفة العزوم الصحيحة  $\mu'_r$  بدلالة عزوم التوزيع التكرارى  $\bar{\mu}'_r$ . لذلك فإن العلاقة (5. 17. 8) التى تعطى  $\bar{\mu}'_r$  بدلالة  $\mu'_r$  لا تقى بهذا الغرض. لهذا قدم "ولد" (1934a) "Wold" صيغة عامة للعزوم الحقيقية  $\mu'_r$  بدلالة عزوم التوزيع التكرارى  $\bar{\mu}'_r$ . ويمكن الحصول على العزوم الحقيقية  $\mu'_r$  لقيم  $r = 1, 2, 3, \dots$  من العلاقة (5. 17. 8) بدلالة عزوم التوزيع التكرارى  $\bar{\mu}'_r$  فى الصيغة التالية:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(5. 17. 9): \mu'_1 = \bar{\mu}_1.$$

$$\mu'_2 = \bar{\mu}_2 - \frac{1}{12} h^2.$$

$$\mu'_3 = \bar{\mu}_3 - \frac{1}{4} \bar{\mu}_1 h^2.$$

$$\mu'_4 = \bar{\mu}_4 - \frac{1}{2} \bar{\mu}_2 h^2 + \frac{7}{240} h^4.$$

$$\mu'_5 = \bar{\mu}_5 - \frac{5}{6} \bar{\mu}_3 h^2 + \frac{7}{48} \bar{\mu}_1 h^4.$$

$$\mu'_6 = \bar{\mu}_6 - \frac{5}{4} \bar{\mu}_4 h^2 + \frac{7}{16} \bar{\mu}_2 h^4 - \frac{31}{1344} h^6.$$

(5 - 17 - 2) تصحيحات شبرد للعزوم المركزية:

العلاقات السابقة (5. 17. 8, 9) خاصة بالعزوم غير المركزية. ويمكن إثبات أنه في حالة العزوم المركزية نحصل على العزوم المركزية الحقيقية  $\mu_r$  بدلالة العزوم المركزية للتوزيع التكرارى  $\bar{\mu}_r$  فى الصيغة التالية:

$$(5. 17. 10): \mu_2 = \bar{\mu}_2 - \frac{1}{12} h^2$$

$$\mu_3 = \bar{\mu}_3$$

$$\mu_4 = \bar{\mu}_4 - \frac{1}{2} \bar{\mu}_2 h^2 + \frac{7}{240} h^4$$

$$\mu_5 = \bar{\mu}_5 - \frac{5}{6} \bar{\mu}_3 h^2$$

$$\mu_6 = \bar{\mu}_6 - \frac{5}{4} \bar{\mu}_4 h^2 + \frac{7}{16} \bar{\mu}_2 h^4 - \frac{31}{1344} h^6.$$

ملاحظة (5 - 17 - 2): يمكن الحصول على العلاقات (5. 7. 10) من العلاقات (5. 7. 9) مباشرة إذا اعتبرنا أن المتغير  $X$  مقيساً من مركزه وبالتالى نضع  $\mu'_1 = \mu_1 = 0$ .

(5 - 17 - 3) تصحيحات شبرد للعزوم العاملة:

لقد قدم "ولد" (1934a) صيغة عامة للعزم العاملى الرأى الحقيقى  $\mu'_{[i]}$  بدلالة العزوم العاملة للتوزيع التكرارى وفيما يلى صيغ العزوم العاملة الحقيقية الستة الأولى بدلالة العزوم العاملة للتوزيع التكرارى:

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

$$(5. 17. 11): \mu'_{[1]} = \bar{\mu}'_{[1]}$$

$$\mu'_{[2]} = \bar{\mu}'_{[2]} - \frac{1}{12} h^2$$

$$\mu'_{[3]} = \bar{\mu}'_{[3]} - \frac{h^2}{4} \bar{\mu}'_{[1]} + \frac{h^4}{4}$$

$$\mu'_{[4]} = \bar{\mu}'_{[4]} - \frac{h^2}{2} \bar{\mu}'_{[2]} + h^3 \bar{\mu}'_{[1]} - \frac{71}{80} h^4$$

$$\mu'_{[5]} = \bar{\mu}'_{[5]} - \frac{5}{6} \bar{\mu}'_{[3]} h^2 + \frac{5}{2} \bar{\mu}'_{[2]} h^3 - \frac{71}{16} \bar{\mu}'_{[1]} h^4 + \frac{21}{8} h^5.$$

$$\mu'_{[6]} = \bar{\mu}'_{[6]} - \frac{5}{4} \bar{\mu}'_{[4]} h^2 + 5 \bar{\mu}'_{[3]} h^3 - \frac{213}{16} \bar{\mu}'_{[2]} h^4 + \frac{93}{4} \bar{\mu}'_{[1]} h^5 - \frac{9129}{448} h^6.$$

(5 - 17 - 4) تصحيحات شيرد للمترجمات:

المترجمة الأولى تساوى التوقع وكل المترجمات الفردية ليس لها تصحيح أما المترجمات الزوجية الحقيقية فيمكن حسابها من مترجمات الجدول التكرارى باستخدام العلاقات التالية:

$$(5. 17. 12): k_1 = \bar{k}_1 = \mu$$

$$k_2 = \bar{k}_2 - \frac{1}{12} h^2$$

$$k_4 = \bar{k}_4 + \frac{1}{120} h^4$$

$$k_6 = \bar{k}_6 - \frac{1}{252} h^6$$

حيث  $k_r$  هى المترجمة الحقيقية من الدرجة  $r$  و  $\bar{k}_r$  هى مترجمة التوزيع التكرارى من الدرجة  $r$ .

(5 - 17 - 5) تصحيحات شيرد للعزوم المشتركة (التوزيعات الثنائية):

لقد قدم 'وولد' (1934b) "World" تصحيحات للعزوم فى حالة المتغيرات المتعددة. وبصفة خاصة نجد فى التوزيعات المشتركة للثنائية - إذا كانت فئات المتغير  $X$  متساوية وطول كل منها  $h_1$  وفئات المتغير  $Y$  متساوية وطول كل منها  $h_2$  - أن:

$$(5. 17. 13): \mu_{11} = \bar{\mu}_{11}, \mu_{21} = \bar{\mu}_{21}$$

$$\mu_{31} = \bar{\mu}_{31} - \frac{1}{4} \bar{\mu}_{11} h_1^2$$

$$\mu_{22} = \bar{\mu}_{22} - \frac{1}{12} \bar{\mu}_{20} h_2^2 - \frac{1}{12} \bar{\mu}_{02} h_1^2 + \frac{1}{144} h_1^2 h_2^2.$$

وطبعاً تصحيحات  $\mu_{12}$  و  $\mu_{13}$  يمكن الحصول عليها من تصحيحات  $\mu_{21}$  و  $\mu_{31}$  بتبديل النليل النليل، كما أن تصحيحات العزوم الهامشية  $\mu_{10}$  و  $\mu_{01}$  يمكن الحصول عليها مباشرة من (5. 17. 10) وبهذا يمكن الحصول على كل العزوم المشتركة حتى الدرجة الرابعة.

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

### تمارين الباب الخامس

(1 - 5): فى التوزيع التالى:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(1 - \cos ax)}{a x^2} ; -\infty \leq x \leq \infty, a > 0$$

أثبت أن الدالة المميزة هى:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & ; |t| \leq a \\ 0 & ; |t| > a \end{cases}$$

(2 - 5): فى التوزيع التالى:

$$f(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), |x| < a$$

أثبت أن الدالة المميزة هى:

$$\phi(t) = 2(1 - \cos at)/a t^2 ; -\infty \leq t \leq \infty$$

(3 - 5):  $X$  متغير عشوائى دالته المولدة للعزوم  $M(\theta)$  و  $-h < \theta < h$ . أثبت أن

$$\Pr(X \geq a) \leq e^{-a\theta} M(\theta), 0 < \theta < h,$$

وأن:

$$\Pr(X \leq a) \leq e^{-a\theta} M(\theta), -h < \theta < 0.$$

(4 - 5): إذا كانت الدالة المولدة للعزوم  $M(\theta)$  للمتغير  $X$  موجودة لجميع قيم  $\theta$  حيث:

$$M(\theta) = (e^\theta - e^{-\theta})/2\theta ; \theta \neq 0, M(0) = 1.$$

استخدم نتائج التمرين السابق لإثبات أن  $\Pr(X \geq 1) = 0$  و

$$\Pr(X \leq -1) = 0.$$



## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(5 - 5):

(أ) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} ; -\infty < x < \infty$$

اثبت أن الدالة المميزة لهذا التوزيع هي:

$$\phi(t) = \frac{1}{1+t^2} , -\infty \leq t \leq \infty$$

(ب) باستخدام العلاقة (5.1.59) أوجد  $f(x)$  بدلالة  $\phi(t)$ .

(5 - 6): إذا كان العزم الرأسي حول الصفر للمتغير العشوائي  $X$  هو:  $\mu'_r = (r)!$  أوجد صيغة الدالة المولدة للعزوم.

(5 - 7): إذا كانت الدالة المميزة لمتغير عشوائي  $X$  هي:

$$\phi(t) = \frac{1}{(1-it)^k} ; -\infty \leq t \leq \infty$$

فأوجد دالة كثافة احتمال المتغير  $X$ .

(5 - 8): متغير عشوائي  $X$  دالة احتماله:

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x , x = 1, 2, 3, \dots$$

أوجد الدالة المولدة للعزوم للمتغير  $X$  وأوجد التوقع والتباين.

(5 - 9): إذا كانت:

$$f(x, y, z) = e^{-x-y-z} ; 0 < x, y, z < \infty$$

هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية  $X, Y, Z$  — فأوجد الدالة المميزة للمتغير  $U = X + Y + Z$  ومنها أوجد العزم الرأسي حول الصفر  $\mu'_r$  للمتغير  $U$ .

(5 - 10): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X$  و  $Y$  هي:

$$f(x, y) = e^{-y} ; 0 < x < y < \infty$$

فأوجد:

(1) الدالة المميزة المشتركة  $\phi(t_1, t_2)$  للتوزيع المشترك  $f(x, y)$ .

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

(2) معامل الارتباط بين  $X$  و  $Y$ .

(3) الدالتين الهامشيتين  $f_1(x)$  و  $f_2(y)$  - أى دالتى كثافة احتمال  $X$  و  $Y$  على الترتيب.

(4) من الدالة  $\phi(t_1, t_2)$  أوجد الدالة المميزة للمتغير  $X$  وكذلك الدالة المميزة للمتغير  $Y$ .

(5) باستخدام  $f_1(x)$  و  $f_2(y)$  تأكد من صحة النتيجة التى حصلت عليها فى 4.

(5 - 11):  $X$  متغير عشوائى دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-x/\sigma} \quad ; \quad 0 \leq x \leq \infty, \sigma > 0.$$

اثبت أن المتركمة الرائبة  $k_r$  للمتغير  $X$  هى:

$$k_r = \sigma^r (r-1)!$$

(5 - 12): بين أن الدالة  $e^{itx}$  يمكن أن توضع على صورة متسلسلة لانهائية كما يلى:

$$e^{itx} = 1 + (e^{it} - 1)x^{[1]} + (e^{it} - 1)^2 \frac{x^{[2]}}{2!} + \dots + (e^{it} - 1)^r \frac{x^{[r]}}{r!} + \dots$$

لجميع قيم  $-\infty \leq x \leq \infty$  حيث:

$$x^{[r]} = x(x-1)\dots(x-r+1).$$

ثم اثبت:

$$\mu'_{[r]} = [D^r \phi(t)]_{t=0}$$

و

$$D = \frac{d}{d(e^{it})}.$$

حيث  $\mu'_{[r]}$  هو العزم العاملى من الدرجة  $r$  و  $\phi(t)$  هى الدالة المميزة للمتغير  $X$ . ومن ثم بين أن العزم العاملى  $\mu'_{[r]}$  للتوزيع ذو الحدين الذى دالة احتماله:

$$P(x) = \binom{n}{x} P^x Q^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n, \quad P + Q = 1$$

## الفصل الخامس - الدوال المميزة

هو:

$$\mu'_{[r]} = n^{[r]} P^r$$

حيث:

$$n^{[r]} = n(n-1)\dots(n-r+1).$$

(5-13): X متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{k}{(1+x^2)^m} \quad ; -\infty \leq x \leq \infty, m \geq 1.$$

اثبت ان:

$$k = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(m-\frac{1}{2})}$$

وإذا كانت m عدد صحيح أكبر من أو يساوى الواحد فأوجد الدالة المميزة والدالة المولدة للمترجمات للمتغير X. ثم أوجد مترجمات X عندما  $2 = m$ .

(5-14):

(أ) اثبت أن الدالة المشتركة:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)}}{\sqrt{xy}} + h(x-y)(xy-x-y+2)e^{-(x+y)} \quad ; 0 \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty.$$

تحقق شروط كثافة الاحتمال - أى أن:

$$f(x, y) > 0 \quad \& \quad \int \int_{x, y} f(x, y) dx dy = 1$$

(ب) اثبت أن الدالة المميزة المشتركة للتوزيع السابق هي:

$$\phi(t_1, t_2) = (1-2it_1)^{-\frac{1}{2}} (1-2it_2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2it_1 t_2 (t_1 - t_2)}{(1-it_1)^3 (1-it_2)^3}.$$

## الفصل الخامس - النوال المميزة

(5 - 15): إذا كان العزم الرائي  $\mu'_r$  للمتغير العشوائي  $X$  هو:

$$\mu'_r = \frac{k}{k+r} ; r = 1, 2, \dots, k > 0 \quad (أ)$$

$$\mu'_r = \frac{(k+r)!}{k!} ; k \text{ عدد صحيح موجب} \quad (ب)$$

فأثبت أن دالة كثافة احتمال  $X$  هي:

(أ)

$$f(x) = k x^{k-1}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

وإن  $X$  له توزيع وحيد.

(ب)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^k}{k!} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

وإن  $X$  له توزيع وحيد.

## الفصل السادس

### توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

#### Distributions of Functions of Random Variables and Transformations

##### (6 - 1) مقدمة:

من المعروف أن أي دالة في متغير عشوائي (أو في عدة متغيرات عشوائية) تعتبر هي الأخرى متغيراً عشوائياً، وفي هذا الباب نهدف إلى إيجاد توزيع دالة ما في متغير عشوائي عندما يكون توزيع هذا المتغير معلوماً أو توزيع دالة ما في عدة متغيرات عشوائية عندما يكون للتوزيع الاحتمالي المشترك لهذه المتغيرات معلوماً. ولتبسيط عرض ما نهدف إليه في هذا الباب نفرض أن لدينا متغيراً عشوائياً  $X$  له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  ونهدف إلى معرفة دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي  $Y$  حيث  $Y$  دالة في  $X$  — لنكن مثلاً  $Y = h(X)$ . كذلك إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  ونرغب في معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات

$$(6.1.1): Y_i = h_i(x_1, \dots, x_n) ; i = 1, 2, \dots, k.$$

— أي نرغب في معرفة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $Y_1, \dots, Y_k$  حيث  $Y_i$  دالة في المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  وذلك لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, k$ . من الناحية النظرية على الأكل يمكن القول أنه إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  للمتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  معلومة — سواء كانت هذه المتغيرات مستقلة أو غير مستقلة — يكون من الممكن — نظرياً — إيجاد دالة كثافة الاحتمال

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

المشتركة للمتغيرات  $Y_1, \dots, Y_k$ ، وذلك لأن دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغيرات  $Y_1, \dots, Y_k$  يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$\begin{aligned} F(y_1, \dots, y_k) &= \Pr[Y_1 \leq y_1, \dots, Y_k \leq y_k] \\ &= \Pr[h_1(X_1, \dots, X_n) \leq y_1, \dots, h_k(X_1, \dots, X_n) \leq y_k] \end{aligned}$$

وذلك لمجموعة القيم الثابتة  $y_1, \dots, y_k$  حيث  $y_i$  قيمة ثابتة هي إحدى قيم المتغير  $Y_i$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, k$ .

والاحتمال السابق ما هو إلا احتمال حادثة معينة محددة بدلالة  $X_1, \dots, X_n$  ويمكن حساب احتمال هذه الحادثة بمكاملة دالة كثافة الاحتمال المشتركة (المعروفة) للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  إذا كانت هذه المتغيرات مستمرة ومنطقة التكامل هي مجموعة النقط التي تتحدد بالعلاقة التالية:

$$h_1(X_1, \dots, X_n) \leq y_1, \dots, h_k(X_1, \dots, X_n) \leq y_k$$

وهي منطقة في الفراغ  $R_n$  الذى يمثل فراغ المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  وبالطبع إذا أمكن إيجاد هذا التكامل يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة  $F(y_1, \dots, y_k)$  للمتغيرات العشوائية  $Y_1, \dots, Y_k$  — وطبعاً إذا كانت المتغيرات من النوع المتقطع نستخدم المجموع بدلاً من التكامل. لهذا نقول أنه من الممكن نظرياً — على الأقل — إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $Y_1, \dots, Y_k$  (التي تعتبر دوالاً فى المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$ ) بدلالة دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  — وجلبول مثل هذه المسائل يعتبر أساساً هاماً لعمل الكثير من الاستدلالات الإحصائية. ولعل مشكلة تقدير معالم التوزيعات الاحتمالية من أهم مشاكل الاستدلال الإحصائي — التى نحتاج فيها إلى إيجاد التوزيع الاحتمالي لدوال فى متغيرات عشوائية — فعادة ما يكون ما يسمى بـ "مقدر" "Estimator" المعلمة المجهولة عبارة عن دالة فى متغيرات عشوائية وهذا المقدر نحتاج عادة لمعرفة دالة كثافة احتماله. ولتوضيح ذلك نقدم مثالين مبسطين أحدهما عن دالة فى متغير عشوائى والثانى عن دالة فى عدة متغيرات عشوائية. وذلك كما يلي:

أولاً: إذا كان  $X$  متغير عشوائى له توزيع معناد توقعه  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$  —  
 $n(\mu, \sigma^2)$  — فنظر بند (2-23-3 ب) وكذلك الباب الثامن (التوزيع المعناد) —  
 والمتغير العشوائى  $Y$  عبارة عن دالة فى المتغير العشوائى  $X$  لتكون  
 $Y = h(X) = \frac{X - \mu}{\sigma}$  — فيمكن إثبات أن الدالة  $Y$  تكون متغيراً عشوائياً له توزيع معناد

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

قياسي  $n(0,1)$  — نلاحظ أن الدالة (أو المتغير العشوائي  $Y$ ) يعتمد على المعلمتين  $\mu, \sigma$  في حين أن توزيعه لا يعتمد عليهما.

ثانياً: إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة وكل منها له توزيع برنولي ذي المعلمة  $P$  — أنظر بند (1 - 26 - أ) والباب السابع بند (7 - 2 - 1) — الذي تحدده دالة كثافة الاحتمال

$$P(x) = P^n (1-P)^{n-x} ; x = 0, 1$$

خلاف ذلك  
= 0

إذا كان المتغير العشوائي  $Z$  يمثل دالة في للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  هي:

$$Z = h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n X_i$$

فيمكن إثبات أن  $Z$  يعتبر متغيراً عشوائياً له توزيع ذي الحدين بمعلمتيه  $n, P$  — ونلاحظ أن الدالة  $Z$  هنا لا تعتمد على المعلمتين  $n, P$  (في حين أن توزيعه يعتمد عليهما) وذلك لأنه عند معرفة قيمة محددة لكل متغير  $X_i$  لتكن  $X_i = x$  لجميع قيم  $i$  نتحدد قيمة

$$Z = \sum_{i=1}^n x_i$$

مناظرة للمتغير  $Z$  هي

والتمييز بين الدالة  $Y$  (في أولاً) والدالة  $Z$  (في ثانياً) ينحصر في أن الدالة  $Y$  تعتمد على معالم مجهولة (هي  $\mu, \sigma$ ) بينما الدالة  $Z$  لا تعتمد على معالم مجهولة — والدالة (أو المتغير العشوائي) التي لا تعتمد على معالم مجهولة تسمى "إحصاء" "Statistic" و"الإحصاءات" "Statistics" من أهم الدوال (في متغيرات عشوائية) التي يزخر بها الاستدلال الإحصائي والتي نحتاج إليها كثيراً لمعرفة توزيعها الاحتمالي — ولأهمية الإحصاء نقدم له التعريف التالي:

تعريف (6 - 1) "الإحصاء" "Statistic":

"أي دالة" "بوراليه مقيسة" في متغير عشوائي أو أكثر لا تعتمد على أي معلمة مجهولة تسمى إحصاء"

وعلى هذا فإن الدالة (أو المتغير العشوائي)  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$  المعطاة سابقاً (في ثانياً)

تعتبر إحصاء بينما المتغير العشوائي  $Y = \frac{x - \mu}{\sigma}$  (المعطى في أولاً) لا يعتبر إحصاء إلا إذا كانت قيمة كل من  $\mu, \sigma$  معلومتان — ومما هو جدير بالذكر أنه بالرغم من أن

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

الإحصاء لا يعتمد على أى مطعة مجهولة إلا أن دالة كثافة احتمالها قد تعتمد على معلمة مجهولة أو حتى عدة معالم مجهولة — فدالة كثافة احتمال الإحصاء  $Z$  المعطى سابقاً (فى ثانياً) يعتمد على المعلمتين  $n, P$ .

**ملاحظة (6 - 1):** فسى التعريف السابق نكرنا كلمة "بوراليه مقيسة" وذلك لأن الإحصاء دائماً يعرف بأنه دالة "بوراليه مقيسة" فى متغيرات عشوائية — وهنا كلمة "بوراليه مقيسة" وضعت لتؤكد أن الإحصاء نفسه متغير عشوائى — وذلك لأننا كما سبق عند تعريف المتغير العشوائى — قصرنا تعريف المتغير العشوائى على الدوال البوراليه المقيسة فقط فأى دالة غير مقيسة تكون خارجة عن نطاق نظرية الاحتمالات وبالتالي لا يمكن اعتبارها متغيراً عشوائياً، وحيث أن كل الدوال التى سنتعامل معها فى هذا الكتاب هى دوال "بوراليه مقيسة" لذلك عند ذكر لفظ "دالة" دون أى إضافة يكون المقصود به "دالة بوراليه مقيسة" كما سبق الإشارة إلى ذلك فى الملاحظة (2 - 5 - 1) وذلك لعدم الإسراف فى استخدام نظرية القياس دون الحاجة إليها.

ونقدم فيما يلى بعض الإحصاءات الهامة التى سوف نتعرض لإيجاد توزيعاتها الاحتمالية فيما بعد.

(1) الوسط الحسابى  $\bar{X}$  لـ  $n$  من المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  يعرف باستخدام الصيغة التالية:

$$(6.1.2): \bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

(2) والتباين  $S^2$  لهذه المتغيرات يمكن تعريفه باستخدام الصيغة التالية إذا كانت  $n$  عدد المتغيرات كبيرة:

$$(6.1.3): S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

أما إذا كانت  $n$  صغيرة أقل من 30 مفردة مثلاً نفضل استخدام الإحصاء التالى لتباين المتغيرات العشوائية

$$(6.1.4): S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

(3) العزم الرأى حول للصفر

$$(6.1.5): m_r = \frac{1}{n} \sum X_i^r$$



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

والعزم الرأى حول المركز

$$(6.1.6): M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r$$

والتوزيعات الاحتمالية للإحصاءات تعتبر من أهم التطبيقات الإحصائية لهذا الموضوع الإحصائي الذي نحن بصدد دراسته في هذا الباب وهو توزيعات دوال في متغيرات عشوائية - وتبرز هذه الأهمية من أن دالة كثافة احتمال الإحصاء توضح لنا إلى أى درجة يكون الإحصاء له قيمة قريبة من المعلمة المجهولة التي يمثلها. وسنقدم في هذا الباب ثلاثة أساليب مختلفة لإيجاد التوزيع الاحتمالي لأى دالة (أو عدة دوال) في متغير عشوائي (أو في عدة متغيرات عشوائية).

هذه الأساليب الثلاثة هي

(أ) أسلوب دالة للتوزيع الاحتمالي

(ب) أسلوب الدالة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم)

(ج) أسلوب تحويل المتغيرات.

### (6 - 2) أسلوب دالة التوزيع الاحتمالي:

#### Cumulative - Distribution Function Technique:

(6 - 2 أ) حالة المتغير المفرد: نتناول أولاً حالة المتغير المفرد  $X$  الذى له دالة كثافة احتمال  $f(x)$ ، ونفرض أن المتغير  $Y$  يمثل دالة حقيقية فى المتغير  $X$  نسير عنها بالعلاقة  $Y = h(X)$  حيث تكون هذه الدالة محدودة ومعروفة تعريفاً وحيداً بالنسبة للمتغير  $X$  والمطلوب الحصول على دالة كثافة احتمال المتغير العشوائى  $Y$ .

العلاقة الدالية  $Y = h(X)$  تمثل عملية التقابل بين المتغيرين العشوائيين  $X$  و  $Y$  - فلو اعتبرنا أن المجموعة  $S_x$  تمثل مجموعة معينة على محور  $X$  والمجموعة  $S_y$  تمثل المجموعة المقابلة لجميع قيم  $Y$  (على محور  $Y$ ) التى تحقق العلاقة  $Y = h(X)$  لجميع قيم  $X$  عندما  $S_x > X$ .

إذن  $S_y \supset Y$  عندما تكون  $S_x \supset X$  - أى أن الحادثنان  $S_y \supset Y$  و  $S_x \supset X$  متكافئتان - وعلى ذلك لأى مجموعة  $S_y$  يكون:

$$(6.2.1): \Pr(Y \in S_y) = \Pr(X \in S_x)$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

حيث  $S_x$  هي المجموعة المقابلة للمجموعة  $S_y$ .

فإذا اخترنا، كحالة خاصة، المجموعة  $S_y$  على أنها الفترة المغلقة من أعلى  $S_y = (-\infty, y]$  ورمزنا بالرمز

$$(6.2.2): S_{xy} = \{X = x : h(x) \leq y\}$$

لمجموعة النقط  $X$  (على محور  $X$ ) التي تحقق العلاقة  $Y = h(X) \leq y$  فإننا نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  في الصورة:

$$(6.2.3): G(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X \in S_{xy}]$$

(حيث  $S_{xy}$  كما هي معطاة سابقاً بالعلاقة (6.2.2))

فإذا كان المتغير العشوائي  $X$  له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $Y$  توضع في الصورة التالية

$$(6.2.4): G(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X \in S_{xy}]$$

$$= \begin{cases} \int_{x \in S_{xy}} f(x) dx & f(x) \text{ إذا كان } X \text{ متغير مستمر دالة كثافة احتماله} \\ \sum_{x \in S_{xy}} P(x) & P(x) \text{ إذا كان } X \text{ متغير منقطع دالة احتماله} \end{cases}$$

التكامل (أو المجموع) مأخوذ على جميع قيم  $X$  التي تتبع للمجموعة  $S_{xy}$  المعطاة بالعلاقة (6.2.2). بهذا يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  (حيث  $Y$  دالة في  $X$ ) بدلالة توزيع المتغير  $X$ ، ومنها يمكن إيجاد دالة كثافة احتمال  $Y$ .

مثال (6-2-1):  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x ; x = 1, 2, 3, \dots$$

أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y = X^3$ . ومنها أوجد دالة كثافة احتمال  $Y$ .

(الحل)

باستخدام العلاقة (6.2.3) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  هي:

$$G(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X^3 \leq y] = \Pr[X \leq \sqrt[3]{y}] = F(\sqrt[3]{y}).$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

حيث  $F(\cdot)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$ .

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^k ; \quad x \text{ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي } x$$

إذن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y = X^3$  هي:

$$G(y) = F(\sqrt[3]{y}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt[3]{y} \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^k ; \quad \sqrt[3]{y} \text{ أكبر عدد صحيح أكبر من أو يساوي } \sqrt[3]{y}$$

$$\lfloor \sqrt[3]{y} \rfloor ; y = 1, 8, 27, \dots$$

ومن علاقة (2. 6. 4) يمكن الحصول على دالة احتمال  $Y$  من الدالة  $G(y)$  في الصورة:

$$g(y_1) = G(y_1) - G(y_1 - 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{y_1}} ; y = 1, 8, 27, \dots$$

ملاحظة (6 - 2 - 1): يمكن حل المثال السابق بطريقة أبسط وأسهل:

$$g(y) = \Pr[Y = y] = \Pr[X^3 = y] = \Pr[X = \sqrt[3]{y}]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[3]{y}} , \quad y = x^3 = 1, 8, 27, \dots$$

ولكن الحل السابق يساعد على تفهم استخدام أسلوب دالة للتوزيع الاحتمالي في إيجاد توزيع دالة في متغير عشوائي بمطومية دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

مثال (6 - 2 - 2):  $X$  متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = x^2/9 ; \quad 0 < x < 3$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير  $Y = X^3$ .

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$F(x) = \Pr[X \leq x] = \int_0^x \frac{t^2}{9} dt = x^3/27 ; \quad 0 \leq x \leq 3$$

وباستخدام العلاقة (2. 6. 3) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y = X^3$  هي:

$$G(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X^3 \leq y] = \Pr[X \leq \sqrt[3]{y}] = F(\sqrt[3]{y})$$

$$= y/27 ; \quad 0 \leq y \leq 27.$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وبمفاضلة  $G(y)$  نحصل على دالة كثافة احتمال  $Y$ :

$$g(y) = \frac{1}{27} ; 0 \leq y \leq 27$$

(6 - 2 ب) حالة المتغير المستند: يمكن تعميم حالة المتغير المفرد إلى حالة المتغير المتعدد المكون من أي عدد من المتغيرات كما يلي:

نفرض أن  $\underline{X}_n' = (X_1, \dots, X_n)$  متغير عشوائي متعدد (مشترك) يتكون من المركبات  $X_1, \dots, X_n$  وأن  $\underline{Y}_k' = (Y_1, \dots, Y_k)$  متغير عشوائي متعدد يتكون من المركبات (أو المتغيرات)  $Y_1, \dots, Y_k$  وكل متغير من هذه المتغيرات يمثل دالة حقيقية وحيدة القيمة Single Valued بالنسبة للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  ومعطاة بعلاقة دالية محددة في الصورة:

$$Y_j = h_j(X_1, \dots, X_n) ; j = 1, 2, \dots, k.$$

فإذا كانت  $S_k(Y)$  تمثل مجموعة معينة في الفراغ  $R_k$  (فراغ المتغير المتعدد  $\underline{Y}_k$ ) وكانت  $S_n(X)$  هي المجموعة التي تمثل جميع قيم المتغير المتعدد  $\underline{X}_n$  في الفراغ  $R_n$  عندما يكون  $\underline{Y}_k \subset S_k(Y)$  حيث:  $\underline{Y}_k \subset S_k(Y)$  ;  $j = 1, 2, \dots, k$  فإن:

$$(6.2.5): \Pr[\underline{Y}_k \subset S_k(Y)] = \Pr[\underline{X}_n \subset S_n(X)]$$

فإذا اخترنا (كحالة خاصة) المجموعة  $S_k(Y)$  على أنها فترة في الفراغ  $R_k$  هي الفترة المحددة بالملاقات التالية:

$$-\infty \leq Y_1 \leq y_1, \dots, -\infty \leq Y_k \leq y_k$$

حيث  $y_i$  عدد حقيقي يمثل إحدى قيم المتغير  $Y_i$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, k$  وإذا استخدمنا الرمز:

$$(6.2.6): S_n(x, y) = \{(x_1, \dots, x_n) : h_j(x_1, \dots, x_n) \leq y_j ; j = 1, 2, \dots, k\}$$

أي أن  $S_n(x, y)$  هي مجموعة النقط  $(x_1, \dots, x_n)$  في الفراغ  $R_n$  التي تحقق العلاقات:  $h_j(X_1, \dots, X_n) = Y_j \leq y_j ; j = 1, 2, \dots, k$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المتعدد  $\underline{Y}_k$  يمكن أن تكتب في الصورة:

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$(6.2.7): G(y_1, \dots, y_k) = \Pr[Y_1 \leq y_1, \dots, Y_k \leq y_k] = \Pr[X_n \subset S_n(x, y)]$$

حيث  $S_n(x, y)$  هي مجموعة النقط في الفراغ  $R_n$  المعرفة بالعلاقة (6.2.6).

فإذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة للمتغير المتعدد  $X_n$  هي  $F_n(\underline{x}) = \Pr[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير المشترك  $Y_k$  تأخذ الصورة:

$$(6.2.8): G(y_1, \dots, y_k) = \Pr[Y_1 \leq y_1, \dots, Y_k \leq y_k] = \int_{\underline{x}_n \subset S_n(x, y)} dF_n(\underline{x}).$$

والتكامل السابق مأخوذ بمفهوم ليبج ستيلج في الفراغ  $R_n$  ومنطقة التكامل محدودة  $S_n(x, y) \subset S_n(x, y)$  حيث  $\underline{x}_n \subset S_n(x, y)$  كما في (6.2.6).

مثال (6-2 ب-1): إذا كانت:  $x > 0, y > 0$ ،  $f(x, y) = 4xy e^{-(x^2+y^2)}$  دالة كثافة احتمال المتغيران الموجبان  $X$  و  $Y$ ، فابعد دالة كثافة احتمال  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Z$  هي:

$$\begin{aligned} G(z) &= \Pr[Z \leq z] = \int_{Z \leq z} g(z) dz \\ &= \iint_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{y^2=0}^{z^2} \left\{ \int_{x^2=0}^{z^2-y^2} e^{-x^2} dx^2 \right\} e^{-y^2} dy^2 \\ &= 1 - e^{-z^2} - z^2 e^{-z^2} \quad ; \quad 0 \leq z \leq \infty \end{aligned}$$

ودالة كثافة احتمال  $z$  هي:

$$g(z) = \frac{dG(z)}{dz} = 2z^3 e^{-z^2} \quad ; \quad 0 \leq z \leq \infty.$$

(6-2 ج-): نقدم فيما يلي بعض الحالات الخاصة ذات الأهمية الكبيرة والتي تصادفنا كثيراً أثناء دراستنا في بقية هذا الكتاب.

## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

### (6-2 جـ 1) حالة الدالة الخطية $Y = aX + b$ :

أى دالة فى متغير عشوائى تعتبر هى الأخرى متغير عشوائى ويكون لها دالة توزيع احتمالى معطاة بالعلاقة (6.2.4) السابقة. والدالة  $Y = aX + b$  دالة خطية فى المتغير العشوائى  $X$  فإذا كان  $X$  له دالة توزيع احتمالى  $F(x)$  فيمكن منها الحصول على دالة التوزيع الاحتمالى  $G(y)$  للمتغير  $Y$ ، إذ أن العلاقة  $Y \leq y$  مكافئة تماماً للعلاقة  $X \leq \frac{y-b}{a}$  عندما  $a > 0$  أو العلاقة  $X \geq \frac{y-b}{a}$  عندما  $a < 0$ . إذن باستخدام المعادلة (6.2.4) مع اعتبار أن  $S_{xy}$  تمثل مجموعة النقط  $X$  التى تحقق العلاقة التالية:

$$X \leq \frac{y-b}{a} ; a > 0$$

$$X \geq \frac{y-b}{a} ; a < 0$$

يمكن الحصول على دالة التوزيع الاحتمالى  $G(y)$  للمتغير العشوائى  $Y$  فى الصورة التالية:

$$(6.2.9): G(y) = \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right) & ; a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right) & ; a < 0 \end{cases}$$

حيث  $F(x)$  هى دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى  $X$ . والعلاقة (6.2.9)

السابقة عندما  $a < 0$  تكون صحيحة تماماً إذا كانت النقطة  $x = \frac{y-b}{a}$  نقطة استمرار

للدالة  $F(x)$  أما إذا كانت نقطة عدم استمرار فيجب تحديد  $F\left(\frac{y-b}{a}\right)$  على أساس أن

الدالة  $F(x)$  دالة مستمرة من ناحية اليمين. وإذا كان المتغير العشوائى  $X$  متغيراً مستمراً له دالة كثافة الاحتمال  $f(x) = F'(x)$  حيث  $f(x)$  دالة موجودة Exists ومستمرة لجميع قيم  $x$  فإن المتغير العشوائى  $Y$  يكون هو الآخر له دالة كثافة الاحتمال

$$(6.2.10): g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحویل المتغيرات

مثال (6 - 2 - 1): إذا كان  $X$  متغير عشوائي منقطع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{3} ; x = 1, 2, 3$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي وكثافة الاحتمال للمتغير  $Y = 2X + 1$ .

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$F(x) = \sum_{x_i=0}^x f(x_i)$$

$$F(x) = 0 ; x < 1$$

$$= \frac{1}{3} ; 1 \leq x < 2$$

$$= \frac{2}{3} ; 2 \leq x < 3$$

$$= 1 ; x \geq 3$$

وبما أن  $Y = 2X + 1$  فيمكن استخدام العلاقة (2. 9) السابقة حيث

$a = 2, b = 1$  لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  كما يلي:

$$G(y) = \Pr[Y \leq y] = F\left[\frac{y-b}{a}\right] = F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$\therefore G(y) = F\left(\frac{y-1}{2}\right) = \begin{cases} 0 ; \frac{y-1}{2} < 1 & ; y < 3 \\ \frac{1}{3} ; 1 \leq \frac{y-1}{2} < 2 & ; 3 \leq y < 5 \\ \frac{2}{3} ; 2 \leq \frac{y-1}{2} < 3 & ; 5 \leq y < 7 \\ 1 ; 3 \leq \frac{y-1}{2} & ; y \geq 7 \end{cases}$$

ومن العلاقة (2. 6. 4) نوجد دالة الاحتمال للمتغير  $Y$  كما يلي:

$$g(y_j) = G(y_j) - G(y_j - 0)$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

حيث  $y_j$  هي القيم التي يأخذها المتغير  $Y$  - أي هي نقاط القفز - وهي كما يظهر من صيغة دالة للتوزيع الاحتمالي  $G(y)$  هي النقاط:

$$Y = 3, 5, 7$$

إن

$$g(y_1) = g(Y = 3) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$g(y_2) = g(Y = 5) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$g(y_3) = g(Y = 7) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

وهذا يمكن وضعه في الصورة المبسطة التالية

دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي  $Y$  هي:

$$g(y_j) = \frac{1}{3}, \quad y_j = 3, 5, 7$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

مثال (6 - 2 - 2):  $X$  متغير عشوائي مستمر دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي وكثافة الاحتمال للمتغيرين التاليين

$$Y = 2X + 1$$

$$Z = -2X + 1$$

(الحل)

دالة للتوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$F(x) = \int_0^x e^{-u} du = (-e^{-u})_0^x = 1 - e^{-x}; \quad x > 0$$

وباستخدام العلاقة (6. 2. 9) السابقة - علماً بأن  $Y = 2X + 1$  - تكون  $a = 2, b = 1$  وتكون دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  هي:



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$G(y) = \Pr[Y \leq y] = F\left(\frac{y-b}{a}\right) = F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{y-1}{2}\right)} \quad ; \quad \frac{y-1}{2} > 0 \quad ; \quad y > 1$$

$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

وبمفاضلة  $G(y)$  بالنسبة لـ  $y$  نحصل على دالة كثافة احتمال المتغير  $y$  في الصورة:

$$g(y) = G'(y)$$

$$g(y) = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{y-1}{2}\right)} \quad , \quad y > 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

وبالمثل تكون دالة كثافة احتمال المتغير  $Z$  في الصورة:

$$h(Z) = \frac{1}{|-2|} f\left(\frac{Z-1}{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{\left(\frac{Z-1}{2}\right)} \quad ; \quad -\infty \leq Z \leq 1$$

ملاحظة (6 - 2 - 1) العلاقة التبادلية الوحيدة  $(1 - 1)$ :

One - to - One Correspondence  $(1-1)$ :

العلاقة الدالية  $Y = aX + b$  تسمى علاقة تبادلية وحيدة - ونرمز لها بالرمز  $(1 - 1)$  - وذلك لأنه لكل قيمة من قيم  $X$  توجد قيمة وحيدة للمتغير  $Y$  تشق من

العلاقة  $Y = aX + b$  والعكس صحيح حيث نجد أن  $X = \frac{y-b}{a}$  ومنها تكون لكل

قيمة من قيم  $Y$  قيمة وحيدة للمتغير  $X$  تشق من العلاقة العكسية  $X = \frac{y-b}{a}$ .

وبصفة عامة نعتبر العلاقة الدالية  $Y = h(X)$  علاقة تبادلية وحيدة إذا كانت لكل

قيمة من قيم  $X$  توجد قيمة واحدة مناظرة للمتغير  $Y$  تشق من العلاقة  $Y = h(X)$  وكذلك لكل قيمة من قيم  $Y$  توجد قيمة واحدة مناظرة للمتغير  $X$  تشق من العلاقة

## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

المعكسية المقابلة  $X = h^{-1}(Y)$  حيث  $h^{-1}(x)$  هي الدالة العكسية The Inverse Function للدالة  $h(x)$  وأمثلة العلاقات التبادلية الوحيدة كثيرة منها:

$$Y = \frac{1}{1+X} ; (\therefore x = \frac{1}{Y} - 1) ; ; Y = e^x ; (\therefore x = \ln Y).$$

بينما العلاقة  $Y = X^2$  لا تعتبر علاقة تبادلية وحيدة إذا كانت  $-\infty \leq X \leq \infty$  وذلك لأنه عندما  $X$  تساوى قيمة معينة لتكن  $X = 5$  مثلاً تكون  $Y = \pm\sqrt{5}$  ولكن نفس هذه العلاقة  $Y = X^2$  تعتبر نقابلية وحيدة إذا كانت  $0 \leq X \leq \infty$ .

$$(6-2 \rightarrow 2-2) : Y = X^2 \text{ العلاقة الدالية}$$

إذا كان  $X$  متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال  $f(x)$  ودالة التوزيع الاحتمالي  $F(x)$  ونرغب فى إيجاد دالة كثافة احتمال متغير عشوائي آخر  $Y$  تربطه بالمتغير  $X$  العلاقة  $Y = X^2$ . هذه العلاقة توضح أن المتغير  $Y$  دائماً غير سالب، وعلى ذلك فإنه لأى قيمة من قيم  $Y$  لتكن  $Y = y > 0$  تكون العلاقة  $Y \leq y$  مكافئة للعلاقة  $-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}$  وتكون دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  هي:

$$G(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X^2 \leq y] = \Pr[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}]$$

فإذا كانت النقطة  $X = -\sqrt{y}$  نقطة استمرار للدالة  $F(x)$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $Y$  تكون:

$$(6.2.11): G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) ; y \geq 0$$

$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال  $F'(x) = f(x)$  موجودة ومستمرة لجميع قيم  $x$  فإن دالة كثافة احتمال المتغير  $Y$  تكون:

$$(6.2.12): g(y) = G'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})] ; y > 0$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

مثال (6 - 2 - 3):  $X$  متغير عشوائي له دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \frac{1}{2a} ; -a \leq X \leq a , a > 0$$

$= 0$  خلاف ذلك

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي  $Y = X^2$ .

(الحل)

العلاقة  $Y = X^2$  ليست تبادلية وحيدة في الفترة  $-a \leq X \leq a$  ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$F(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^x du = \begin{cases} \frac{x+a}{2a} & ; -a \leq X \leq a \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

إذن من العلاقة (6. 2. 11) نجد أن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  هي:

$$\begin{aligned} G(y) &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) ; 0 \leq y \leq a^2 \\ &= \frac{\sqrt{y}+a}{2a} - \frac{-\sqrt{y}+a}{2a} \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{y} , 0 \leq y \leq a^2 \end{aligned}$$

ويمكن إيجاد دالة كثافة احتمال  $Y$  بمفاضلة  $G(y)$  بالنسبة لـ  $y$  فنحصل على:

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{2a\sqrt{y}} ; 0 \leq y \leq a^2$$

كما يمكن الحصول عليها من العلاقة (6. 2. 12) مباشرة كما يلي:

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2a\sqrt{y}} ; 0 \leq y \leq a^2$$

(6 - 2 - 3) العلاقة الدالية  $Y = F_X(x)$

إذا كان  $X$  متغير عشوائي له دالة التوزيع الاحتمالي  $F_X(x)$  وتربطه بالمتغير  $Y$

العلاقة  $Y = F_X(x)$  ونرغب في الحصول على دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

عندما تكون الدالة  $F_X(x)$  دالة مستمرة — فإن النظرية التالية تقدم لنا دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$ .

نظرية (6-2 ج-3 أ):

إذا كان  $X$  متغير عشوائي له دالة توزيع احتمالي  $F_X(x)$  وهي دالة مستمرة — فإن المتغير  $Y = F_X(x)$  يكون له توزيع منتظم في الفترة  $(0 \leq Y \leq 1)$ . والعكس صحيح، إذا كان المتغير  $Y$  له توزيع منتظم في الفترة  $0 \leq Y \leq 1$ ، فإن المتغير  $X = F_X^{-1}(Y)$  يكون له دالة التوزيع الاحتمالي المستمرة  $F_X(x)$  — حيث  $(F_X^{-1}(Y))$  هي الدالة العكسية للدالة  $(F_X(\cdot))$ . (انظر التوزيع المنتظم في البند (2-23-3)) وكذلك التوزيع المنتظم بالفصل الثامن).

(الإثبات)

بما أن الدالة  $F_X(x)$  دالة غير تناقصية فإن الدالة العكسية  $F_X^{-1}(y)$  تكون هي أصغر قيمة  $x$  تحقق العلاقة  $F_X(x) \leq y$  وذلك لأي قيمة معينة  $y$  من قيم المتغير  $Y$  في الفترة  $0 \leq Y \leq 1$  — وعلى ذلك تكون دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  هي:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[F_X(X) \leq y] = \Pr[X \leq F_X^{-1}(y)] \\ = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

لجميع قيم  $0 \leq y \leq 1$ .

والعكس صحيح — إذا كان المتغير  $Y$  له توزيع منتظم فإن:

$$\Pr[X \leq x] = \Pr[F_X^{-1}(Y) \leq x] = \Pr[Y \leq F_X(x)] = F_X(x)$$

هـ. ط. ث.

والنظرية السابقة لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الإحصائية وخصوصاً تلك التي نستخدم فيها أسلوب المحاكاة Simulation حيث نرغب في توليد قيم لمتغير عشوائي معين. فعندما نحتاج لتوليد قيمة لمتغير عشوائي  $X$  له دالة توزيع احتمالي مستمرة  $F_X(\cdot)$  — فيمكننا توليد قيمة للمتغير العشوائي  $Y$  ذو التوزيع المنتظم في الفترة  $(0,1)$  — فلو كانت هذه القيمة هي  $y$  مثلاً فإننا نحسب  $F_X^{-1}(y)$  ونأخذ هذه القيمة على أنها القيمة  $x$  المولدة للمتغير  $X$  — أي أن القيمة المولدة للمتغير  $X$  تكون

$$x = F_X^{-1}(y)$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحویل المتغيرات

والقيم  $y$ 's المولدة للمتغير العشوائي  $Y$  ذو التوزيع المنتظم تسمى بالأعداد العشوائية وهذه القيم يمكن الحصول عليها باستخدام الحاسبات الآلية أو الجداول الإحصائية مثل جداول الأعداد العشوائية.

مثال (6-2 جـ-4): إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له توزيع أسى بمعلمة  $\lambda$  ودالة توزيعه الاحتمالي

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} ; 0 \leq x \leq \infty$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

بين كيف يمكن توليد مجموعة من القيم العشوائية للمتغير  $X$  باستخدام التوزيع المنتظم في الفترة  $(0,1)$ .

(الحل)

من النظرية السابقة يكون المتغير  $Y = F_X(X)$  له توزيع منتظم في الفترة  $0 \leq Y \leq 1$ ، والعلاقة التي تربط المتغير  $Y$  بالمتغير  $X$  هي:

$$Y = 1 - e^{-\lambda X}, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq Y \leq 1$$

وحيث أن العلاقة العكسية هي:

$$X = F_X^{-1}(Y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y).$$

وبذلك يكون المتغير  $(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$  له توزيع أسى دالة توزيعه الاحتمالي  $1 - e^{-\lambda x}$  في الفترة  $0 \leq x \leq \infty$ . إذن إذا كان المتغير العشوائي  $Y$  له توزيع منتظم في الفترة  $0 \leq Y \leq 1$  فإن المتغير  $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - Y)$  يكون له توزيع أسى دالة توزيعه الاحتمالي

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq \infty$$

وبذلك عند توليد قيمة معينة  $y$  للمتغير ذو التوزيع المنتظم  $Y$  (باستخدام الحاسب الآلي) فيمكن توليد قيمة للمتغير  $X$  باستخدام العلاقة:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$$

والقيمة  $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$  ستكون منحصرة بين  $(0, \infty)$  وتمثل إحدى القيم المولدة للمتغير الأسى الذي دالة توزيعه الاحتمالي  $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $0 \leq x \leq \infty$ .

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

### (6 - 2 - 4) توزيع المجموع والفرق لمتغيرين عشوائيين مستمرين:

#### Distribution of Sum and Difference of Two Continuous Random Variables:

إذا كان  $X, Y$  متغيران مستمران لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المستمرة  $f_{12}(x, y)$  المعرفة على فراغهما المشترك (المستوى)  $R_2$  ونرغب في الحصول على دالة كثافة احتمال كل من المتغيرين  $U$  و  $Z$  حيث  $U = X - Y$  ،  $Z = X + Y$  — لنكن  $F_U(u)$  ،  $F_Z(z)$  هما دالتي كثافة الاحتمال المطلوبتين. وأن  $F_U(u)$  ،  $F_Z(z)$  هما دالتي التوزيع الاحتمالي المناظرتين للمتغيرين  $U$  و  $Z$ . فإذا كانت  $z$  قيمة معينة من قيم المتغير  $Z$  — فإن:

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \Pr[X + Y \leq z]$$

الحادثة  $X + Y \leq z$  تمثلها مجموعة النقاط التي تقع أسفل الخط المستقيم  $X + Y = z$  في الفراغ  $R_2$  — إذن:

$$F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f_{12}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{z-z} \left[ \int_{-\infty}^{z-z} f_{12}(x, y) dy \right] dx$$

وبالتعويض عن  $y = w - x$  في التكامل السابق الموجود داخل القوسين والذي نعتبر فيه أن  $x$  مقدار ثابت — فإننا نحول المتغير المكامل  $y$  إلى متغير آخر  $w$  ويكون

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^z f_{12}(x, w - x) dw \right] dx$$

وبفرض أنه يمكن إجراء التفاضل على الطرفين نجد أن دالة كثافة الاحتمال

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left\{ \int_{-\infty}^z \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, w - x) dx \right] dw \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, z - x) dx \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(Z - y, y) dy$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وبهذا نصل إلى أن دالة كثافة احتمال المتغير  $Y = X + Z$  هي:

$$(6.2.13): f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, Z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(Z-y, y) dy$$

ويمكن تعميم النتيجة السابقة للحصول على دالة كثافة احتمال أكثر من متغيرين.

وبأسلوب مماثل يمكن إثبات أن دالة كثافة احتمال المتغير  $U = X - Y$  هي:

$$(6.2.14): f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(x, x-u) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{12}(u+y, y) dy$$

نتيجة (6-2) — (4-أ): إذا كان المتغيران المستمران  $X, Y$  مستقلين و  $Z = X + Y$  فإن دالة كثافة احتمال المتغير  $Z$  تكون:

$$(6.2.15): f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy$$

وكذلك عندما  $U = X - Y$  تكون دالة كثافة احتمال المتغير  $U$  هي:

$$(6.2.16): f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(x-u) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u+y) f_2(y) dy$$

ونذلك لأن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيران  $X, Y$  — الدالة  $f_{12}(\cdot, \cdot)$  — يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب دالتين هما  $f_1(\cdot)$ ،  $f_2(\cdot)$ .

نقدم فيما يلي مثالين الأول عن توزيع المجموع والفرق لمتغيرين غير مستقلين والثاني عندما يكون المتغيرين مستقلين.

مثال (6-2) — (5): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X, Y$  هي:

$$f(x, y) = 3x ; 0 < y < x \leq 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

فأوجد دالة كثافة احتمال كل من:

$$Z = X + Y \quad \text{أولاً:}$$

$$U = X - Y \quad \text{ثانياً:}$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(الحل)

من صيغة الدالة  $f(x, y)$  السابقة يتضح أن المتغيران  $X, Y$  غير مستقلان حيث أن مدى كل منهما يعتمد على الآخر.

أولاً: بما أن  $Z = X + Y$  إذن  $Y = Z - X$  ومن العلاقة (6. 2. 13) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير  $Z$  هي:

$$f_Z(z) = \int_x f_{12}(x, Z-x) dx ; 0 < Z-x = y < x \leq 1$$

وللمسألة الآن أصبحت مسألة حساب التكامل السابق — إذن:

$$f_Z(z) = \int_x 3x dx$$

حيث أن الحدود

$$0 < y < x \leq 1$$

تتحول إلى:

$$0 < Z-x < x \leq 1 ; 0 < Z < 2$$

$$(أ) \text{ عندما } 0 < Z < 1 \text{ تكون: } \frac{Z}{2} < x < Z$$

$$(ب) \text{ عندما } 1 \leq Z < 2 \text{ تكون: } \frac{Z}{2} \leq x < 1$$

وعلى ذلك فإن:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{Z/2}^Z 3x dx & , 0 < Z < 1 \\ \int_{Z/2}^1 3x dx & ; 1 < Z < 2 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{8} Z^2 & ; 0 < Z < 1 \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{Z^2}{4}\right) & ; 1 < Z < 2 \end{cases}$$



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ثانياً: عندما  $U = X - Y$  تكون  $Y = X - U$  — (بما أن  $Y < X$  إذن  $U > 0$  وحدها الأعلى 1 أى أن  $0 < U < 1$ ) — ومن العلاقة (6. 2. 14) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير  $U$  هي:

$$f_U(u) = \int_x f(x, x-u) dx ; 0 < x-u < x \leq 1$$

حيث:  $0 < x < 1$  و  $0 < u < 1$  و  $0 < x-u < x \leq 1$  وبما أن  $0 < x-u$  إذن  $u < x$  وحدود المتغير  $X$  هي  $u < x \leq 1$

$$\begin{aligned} \therefore f_U(u) &= \int_u^1 3x dx, 0 < u < 1 \\ &= \frac{3}{2}(1-u^2); 0 < u < 1 \end{aligned}$$

المثال التالي يتناول حالة متغيران مستقلان.

مثال (6 - 2 - ج - 6):  $X, Y$  متغيران عشوائيان مستقلان وتوزيع كل منهما منتظم في الفترة  $0 < X < 1$  و  $0 < Y < 1$  — (انظر التوزيع المنتظم بند (2 - 23 - أ 3) وكذلك التوزيع المنتظم بالباب الثامن) — أوجد دالة كثافة احتمال كل من:

أولاً: المتغير العشوائي  $Z = X + Y$

ثانياً: المتغير العشوائي  $U = X - Y$

(الحل)

أولاً: دالة كثافة احتمال  $Z$  نحصل عليها كما في المثال السابق تماماً ولكن باستخدام العلاقة (6. 2. 15) بدلاً من (6. 2. 13)

$$f_Z(z) = \int_x f_1(x) f_2(z-x) dx$$

حيث  $0 < x < 1$ ,  $0 < z-x < 1$ ,  $0 < z < 2$

عندما  $0 < z < 1$  تكون  $0 < x < z$

عندما  $1 < z < 2$  تكون  $z-1 < x < 1$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وتكون دالة كثافة احتمال  $Z$  هي:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z dx = Z & ; 0 < Z < 1 \\ 0 & \\ \int_{Z-1}^1 dx = 2 - Z & ; 1 < Z < 2 \end{cases}$$

ثباتاً: عندما  $U = X - Y$  فإننا نحصل على دالة كثافة احتمال  $U$  كما في المثال السابق تماماً ولكن باستخدام العلاقة (6.2.16) بدلاً من (6.2.14):

$$f_U(u) = \int_x f_1(x) f_2(x-u) dx$$

$$-1 < u < 1, 0 < x-u < 1, 0 < x < 1$$

$$\text{عندما } -1 < u < 0 \text{ تكون } 0 < x < 1+u$$

$$\text{عندما } 0 < u < 1 \text{ تكون } u < x < 1$$

أي أن:

$$u < X < 1$$

إذن:

$$f_U(u) = \begin{cases} \int_0^{1+u} dx = 1+u & ; -1 < u < 0 \\ 0 & \\ \int_u^1 dx = 1-u & ; 0 < u < 1 \end{cases}$$

ملاحظة (6-2 - 4 أ): يمكن تعميم الأسلوب السابق لتوزيع مجموع متغيرين عشوائيين إلى حالة  $n$  من المتغيرات باستخدام أسلوب الاستنتاج الرياضي.

(6-2 - 5) توزيع حاصل الضرب وخارج القسمة لمتغيرين عشوائيين مستمرين:

**Distribution of Product and Quotient of Two Continuous r. v.'s:**

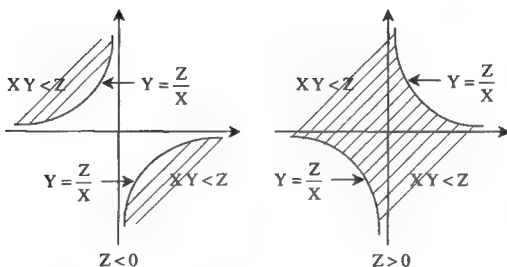
نفرض أن  $X, Y$  متغيران عشوائيان مستمران لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المستمرة  $f_{12}(x, y)$  المعرفة على فراغهما المشترك  $R_2$  ونرغب في الحصول على دالتي كثافة احتمال كل من المتغيرين  $U$  و  $Z$  حيث  $U = X/Y$  و  $Z = XY$ . لنرمز

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

لهايتين الدالتين بالرمزين  $f_U(u)$  و  $f_Z(z)$  ولدالتى التوزيع الاحتمالى المناظرتين لهما بالرمزين  $F_U(u)$  ،  $F_Z(z)$  . فإذا كانت  $z$  إحدى قيم المتغير العشوائى  $Z$  فإن دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير  $Z$  عند القيمة  $Z = z$  تكون:

$$F_Z(z) = \Pr[Z \leq z] = \iint_{x,y \leq z} f_{12}(x,y) dx dy$$

والرسمان التاليان يساعدان على توضيح حدود التكامل عندما تكون القيمة المعينة  $Z < 0$  أو  $Z > 0$ .



شكل (6-2 - 5 أ)

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^0 \left[ \int_{\frac{z}{x}}^{\infty} f_{12}(x,y) dy \right] dx + \int_0^{\frac{z}{x}} \left[ \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f_{12}(x,y) dy \right] dx$$

فى التكامل السابق ضع  $\theta = xy$  إذن  $y = \frac{\theta}{x}$  وعند ثبات  $x$  تكون  $dy = \frac{d\theta}{x}$  وعندما  $Y = \infty$  فإن  $\theta = xy = -\infty$  (إذا كانت  $x$  سالبة  $-\infty < x < 0$ ) ، وعندما  $\theta = xy = \infty$  (إذا كانت  $x$  موجبة  $0 < x < \infty$ ) - إذن:

## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= \int_{-\infty}^0 \left[ \int_z^{\infty} f_{12} \left( x, \frac{\theta}{x} \right) \frac{d\theta}{x} \right] dx + \int_0^z \left[ \int_{-\infty}^z f_{12} \left( x, \frac{\theta}{x} \right) \frac{d\theta}{x} \right] dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z \frac{1}{(-x)} f_{12} \left( x, \frac{\theta}{x} \right) d\theta dx + \int_0^z \int_x^z \frac{1}{x} f_{12} \left( x, \frac{\theta}{x} \right) d\theta dx \\
 &= \int_{-\infty}^z \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{-x} f_{12} \left( x, \frac{\theta}{x} \right) d\theta + \int_0^z \frac{1}{x} f_{12} \left( x, \frac{\theta}{x} \right) d\theta \right\} dx \\
 &= \int_{-\infty}^z \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{|x|} f \left( x, \frac{\theta}{x} \right) d\theta \right] dx
 \end{aligned}$$

وبمفاضلة الدالة  $F(z)$  بالنسبة لـ  $z$  نحصل على دالة كثافة الاحتمال  $f_Z(z)$  في الصورة التالية:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f \left( x, \frac{z}{x} \right) dx$$

ويمكن تلخيص ما سبق في الآتي:

إذا كان  $X, Y$  متغيران عشوائيان مستمران لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة المستمرة  $f_{12}(x, y)$  المعرفة على فراغهما المشترك  $R_2$  وكان المتغيران  $U = X/Y$  و  $Z = XY$  فإن دالة كثافة احتمال المتغير  $Z = XY$  هي:

$$(6. 2. 17): f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{12} \left( x, \frac{z}{x} \right) dx$$

وبالمثل:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{12} \left( \frac{z}{y}, y \right) dy$$

والصيغة الثانية التي تحتوي على متغير التكامل  $y$  نشق بنفس طريقة الصيغة الأولى.

وإذا كان المتغيران  $X, Y$  مستقلان فإن العلاقة (6. 2. 17) السابقة تأخذ الشكل التالي:

الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$(6. 2. 18): f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

أو:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_1\left(\frac{z}{y}\right) f_2(y) dy$$

كما يمكن بأسلوب مماثل إثبات أن دالة كثافة احتمال المتغير  $U = X/Y$  هي:

$$(6. 2. 19): f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{12}(uy, y) dy$$

حيث  $f_{12}(x, y)$  هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X, Y$ . فإذا كان المتغيران  $X, Y$  مستقلان فإن دالة كثافة احتمال المتغير  $U = X/Y$  تكون:

$$(6. 2. 20): f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_1(uy) f_2(y) dy$$

حيث  $f_1(x), f_2(y)$  هما دالتى كثافة الاحتمال الهامشيتين للمتغيرين  $X$  و  $Y$  على الترتيب.

مثال (6 - 2 - 7):  $X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان مستقلان توزيعهما كما يلى:

$$f_1(x) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_2(y) = 1 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1$$

أوجد دالة كثافة احتمال كل من

$$\text{أولاً: } Z = XY$$

$$\text{ثانياً: } U = X/Y$$

(الحل)

أولاً: من العلاقة (6. 2. 18) نجد أن دالة كثافة احتمال  $Z = XY$  هي:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

حيث:

$$f_1(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_2\left(\frac{z}{x}\right) = 1, \quad 0 \leq \frac{z}{x} \leq 1$$

والعلاقين  $0 \leq \frac{z}{x} \leq 1, 0 \leq x \leq 1$  نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير

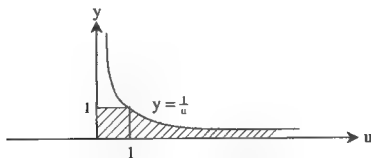
إن:

$$f_Z(z) = \int_{x=z}^1 \frac{1}{x} dx = -\ln Z \quad ; \quad 0 \leq Z \leq 1$$

ثانياً: من العلاقة (6. 2, 20) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير  $U = X/Y$  هي:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_1(uy) f_2(y) dy$$

حيث  $0 \leq y \leq 1$  و  $0 \leq uy \leq 1$ ، علماً بأن  $0 \leq u \leq \infty$  إذا تحققت هذه القيود يكون  $f_1(uy) = f_2(y) = 1$  وخلاف ذلك تكون صفر. عندما  $0 \leq u \leq 1$  يمكن أن نأخذ  $y$  أى قيمة فى المدى  $0 \leq y \leq 1$  دون أن يؤثر ذلك على العلاقة  $0 \leq uy \leq 1$  ولكن عندما  $u > 1$  لى تضمن توفر القيد  $0 \leq uy \leq 1$  لابد أن تكون  $y \leq \frac{1}{u}$  والرسم التالى يوضح هذه الحدود



(المنطقة المظلة هى منطقة التكامل)

شكل (6 - 2 → 5 ب)

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$\therefore f_u(u) = \begin{cases} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} & ; 0 \leq u \leq 1 \\ \int_n^1 y dy = \frac{1}{2u^2} & ; 1 \leq u \leq \infty \end{cases}$$

(6 - 2 - 6) توزيع أصغر قراءة وكبر قراءة:

### Distribution of Minimum and Maximum:

نفرض أن  $X_1, \dots, X_n$  مجموعة عددها  $n$  من المتغيرات العشوائية وأن  $Y_1 = \min[X_1, \dots, X_n]$  ،  $Y_n = \max[X_1, \dots, X_n]$  أي أن  $Y_1$  تمثل أصغر قيمة يمكن أن يأخذها أي من المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  و  $Y_n$  تمثل أكبر قيمة. فيمكن تقديم توزيع كل من المتغيرين  $Y_1$  و  $Y_n$  بدلالة توزيع المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  في النظريتين التاليتين:

نظرية (6 - 2 - 6 أ):

إذا كانت  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة و  $Y_1 = \min[X_1, \dots, X_n]$  و  $Y_n = \max[X_1, \dots, X_n]$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y_1$  هي:

$$(6.2.21): G_1(y) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(y)]$$

حيث  $F_i(\cdot)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X_i$  ،  $(i = 1, 2, \dots, n)$

ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y_n$  هي:

$$(6.2.22): G_n(y) = \prod_{i=1}^n F_i(y)$$

فإذا كانت المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  لها نفس التوزيع الاحتمالي بدالة توزيع احتمالي موحدة  $F(\cdot)$  فإن:

$$(6.2.23): G_1(y) = 1 - [1 - F(y)]^n$$

$$(6.2.24): G_n(y) = [F(y)]^n$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وإذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي بدالة كثافة احتمال موحدة  $f(\cdot)$  ودالة توزيع احتمالي موحدة  $F(\cdot)$  فإن دالتي كثافة احتمال  $Y_1$  و  $Y_n$  تكون:

$$(6.2.25): g_1(y) = n [1 - F(y)]^{n-1} f(y)$$

$$(6.2.26): g_n(y) = n [F(y)]^{n-1} f(y).$$

(الإثبات)

$$G_1(y) = \Pr[Y_1 \leq y] = 1 - \Pr[Y_1 > y] = 1 - \Pr[\min(X_1, \dots, X_n) > y]$$

وعندما  $\min(X_1, \dots, X_n) > y$  تكون جميع قيم  $X$ 's أكبر من  $y$  أي أن:

$$G_1(y) = 1 - \Pr[X_1 > y, \dots, X_n > y]$$

وحيث أن المتغيرات  $X$ 's مستقلة

$$\begin{aligned} G_1(y) &= 1 - \prod_{i=1}^n \Pr[X_i > y] = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \Pr(X_i \leq y)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(y)] \end{aligned}$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6.2.21)

وعندما تكون  $X$ 's لها توزيع موحد دالة توزيعه الاحتمالي  $F(y)$  يكون:

$$G_1(y) = 1 - [1 - F(y)]^n$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6.2.23)

وبمفاضلة العلاقة السابقة بالنسبة لـ  $y$  نحصل على العلاقة (6.2.25).

وبالمثل يمكن إثبات العلاقات المقابلة في حالة المتغير  $Y_n$  علماً بأن:

$$G_n(y) = \Pr[Y_n \leq y] = \Pr[\max(X_1, \dots, X_n) \leq y]$$

وعندما  $\max(X_1, \dots, X_n) \leq y$  يكون كل قيم  $X$  كل من أو تساوى  $y$

$$G_n(y) = \Pr[X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y]$$



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ومن الاستقلال

$$G_n(y) = \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq y) = \prod_{i=1}^n F_i(y)$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6. 2. 22)

وعندما تكون كل قيم  $X$  لها نفس التوزيع الاحتمالي بدالة توزيع احتمالي موحدة  $F(\cdot)$  يكون

$$G_n(y) = [F(y)]^n$$

وهذا يثبت صحة العلاقة (6. 2. 24) وبمفاضلة العلاقة السابقة نصل إلى العلاقة (6. 2. 26)

هـ. ط. ث.

مثال (6 - 2 - 8):  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  تمثل ثلاث مفردات لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له توزيع احتمالي تمثله دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = 5x^4 ; 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

فإذا كان المتغير  $Y$  يمثل أكبر مفردة في العينة فأوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة احتمال المتغير  $Y$ .

(الحل)

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$F(x) = \int_0^x 5x^4 dx = x^5 , \quad 0 \leq x \leq 1$$

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Y$  يمكن الحصول عليها من العلاقة (6. 2. 24) كما يلي:

$$G_n(y) = [F(y)]^n , \quad n = 3$$

$$\therefore G_3(y) = [y^5]^3 = y^{15} , \quad 0 \leq y < 1$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ودالة كثافة الاحتمال:

$$g_3(y) = 15y^{14}, \quad 0 < y < 1$$

### (6 - 3) أسلوب الدالة المميزة (أو الدالة المولدة للعزوم):

(6 - 3 أ): نعرف من نظرية التقابل الوحيد نظرية (5 - 1 - 11 ب) أن هناك علاقة وحيدة (1 - 1) بين الدالة المميزة ودالة التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي، سواء كان متغيراً مفرداً - نظرية (5 - 1 - 11 ب) - أو كان متغيراً متعدداً - نظرية (5 - 16 - 1). ففى حالة المتغير المفرد - نجد أن لكل دالة توزيع احتمالي  $F(x)$  للمتغير  $X$  توجد دالة مميزة وحيدة  $\phi(t)$  - ولكل دالة مميزة  $\phi(t)$  توجد دالة توزيع احتمالي وحيدة  $F(x)$  - كذلك فى حالة المتغير المتعدد - نجد أن لكل دالة توزيع احتمالي  $F(x_1, \dots, x_k)$  للمتغير المتعدد  $(X_1, \dots, X_k)$  توجد دالة مميزة وحيدة  $\phi(t_1, \dots, t_k)$  ولكل دالة مميزة  $\phi(t_1, \dots, t_k)$  توجد دالة توزيع احتمالي وحيدة  $F(x_1, \dots, x_k)$  وعلى ذلك إذا كان لدينا متغير مشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  له توزيع احتمالي معروف ونرغب فى معرفة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $(Y_1, \dots, Y_k)$  حيث  $Y_i = g_i(X_1, \dots, X_n)$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, k$ . فإبنا نقوم بإيجاد الدالة المميزة  $\phi(t_1, \dots, t_k)$  للمتغير المشترك  $(Y_1, \dots, Y_k)$  بدلالة توزيع المتغير المشترك  $(X_1, \dots, X_n)$  - فإذا كانت الدالة المميزة  $\phi(t_1, \dots, t_k)$  التى نحصل عليها بهذه الطريقة من الدوال المعروفة لدينا سيكون هناك توزيع احتمالي وحيد مناظر لها - هذا التوزيع يكون هو توزيع المتغير المشترك  $(Y_1, \dots, Y_k)$ .

وهذا الأسلوب يكون فعالاً فى حالة المتغير المفرد (عندما  $k = 1$ ) حيث أن الدالة المميزة وكذلك دالة كثافة الاحتمال لكثير من المتغيرات المفردة معروفة لدينا تماماً، وبالتالي عندما نحصل على دالة مميزة من النوع المعروف لدينا لن تكون هناك أى صعوبة لتحديد دالة التوزيع الاحتمالي المناظرة، ولكن الأمر يزداد صعوبة فى حالة المتغير المتعدد، حيث أننا لا نعرف إلا عدد قليل جداً من الدوال المميزة المشتركة - لذلك فلن استخدم أسلوب الدالة المميزة فى حالة المتغير المتعدد أن يكون مجدياً وإنما سيكون ذو استخداماً محدوداً فقط، ينحصر فى الحالات التى تكون دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة المقابلة معروفة لدينا. وبالرغم من ذلك عند معرفة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير يمكن باستخدام العلاقة (b) من نظرية التقابل الوحيد للمتغير المفرد أو المشترك إيجاد دالة كثافة احتمال هذا المتغير وهذا يعطى قوة كبيرة لهذا الأسلوب بالرغم من

### الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

صعوبة إيجاد التكامل الذى تتضمنه هذه العلاقة. ونقدم فيما يلى بعض الأمثلة التى توضح لنا كيفية استخدام هذا الأسلوب.

مسئـال (6 - 3 - 1): إذا كان  $X$  متغير معناد قياسى و  $Y = X^2$  أوجد توزيع المتغير  $Y$  علما بأن دالة كثافة احتمال  $X$  هى:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; -\infty \leq x \leq \infty$$

(الحل)

الدالة المميزة للمتغير  $Y$  هى:

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= E(e^{itY}) = E(e^{itX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2it)} dx \end{aligned}$$

ضع:

$$x\sqrt{1-2it} = z, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-2it}}$$

$$\phi_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \frac{dz}{\sqrt{1-2it}} = (1-2it)^{-\frac{1}{2}}$$

والدالة السابقة  $\phi_Y(t)$  هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع جاما معلمته  $n = \frac{1}{2}$  و  $\alpha = 1$  كما يتضح من (8. 3. 18) فيما بعد — (كما أن نفس الدالة  $\phi_Y(t)$  هى الدالة المميزة لمتغير له توزيع كا<sup>2</sup> بدرجة حرية واحدة  $\chi_{(1)}^2$  كما يتضح من (8. 14. 8) فيما بعد) — إذن من صيغة دالة كثافة احتمال المتغير ذو توزيع جاما كما فى (8. 3. 14) عندما  $n = \frac{1}{2}$  و  $\alpha = 1$  — (أو من صيغة دالة كثافة المتغير ذو توزيع كا<sup>2</sup> عندما درجات الحرية  $n = 1$ ) نجد أن دالة كثافة احتمال المتغير  $Y$  له توزيع جاما بمعلمة  $\frac{1}{2}$  أو توزيع كا<sup>2</sup> بدرجة حرية واحدة ودالة كثافة احتماله هى:

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad 0 < y < \infty$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

مثال (6-3-2):  $X_1, X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان لهما توزيع أسى ودالة كثافة احتمال كل منهما

$$f(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i}, \quad 0 < x_i < \infty, \quad i=1,2, \quad \lambda > 0$$

أوجد دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي

$$Y = X_1 + X_2$$

(الحل)

$$\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(X_1+X_2)})$$

ومن الاستقلال

$$\begin{aligned} &= E(e^{itX_1}) E(e^{itX_2}) = \phi_1(t) \phi_2(t) = \prod_{j=1}^2 \lambda \int_0^{\infty} e^{itx_j - \lambda x_j} dx_j \\ &= \lambda^2 \prod_{j=1}^2 \int_0^{\infty} e^{-x_j(\lambda - it)} dx_j = \left[ \frac{\lambda}{\lambda - it} \right]^2 \end{aligned}$$

وهذه هي الدالة المميزة لمتغير له توزيع جاما - (انظر توزيع جاما بالباب الثامن) - بمعلمتيه  $\lambda$  و 2 أى أن دالة كثافة احتمال  $Y$  هي:

$$g(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \quad 0 < y < \infty, \quad \lambda > 0$$

ومن أهم تطبيقات أسلوب الدالة المميزة هو إيجاد توزيع مجموع عدة متغيرات مستقلة وهو ما سنتقدمه في البند التالي.

(6-3 ب) توزيع مجموع (ومتوسط) عدة متغيرات مستقلة:

### Distribution of Sums of Random Variables:

نعلم أنه إذا كانت  $X_1, \dots, X_n$  عدة متغيرات مستقلة لها الدوال المميزة التالية  $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$  على الترتيب فإن المجموع  $Z = X_1 + \dots + X_n$  يكون دالته المميزة هي:

$$\phi(t) = \phi_1(t) \phi_2(t) \dots \phi_n(t)$$

والعلاقة السابقة مفيدة جداً في كثير من التطبيقات الإحصائية مثل دراسة توزيعات المعاينة وخاصة عندما تكون المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  لها توزيع موحد ونرغب في إيجاد

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

توزيع الدالة  $Z = g_1(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \dots + X_n$  أو الدالة

$$\bar{x} = g_2(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

المتوسط  $\bar{x}$  في حين يكون من الصعب إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير  $Z$  أو المتغير  $\bar{x}$  مباشرة في حين أنه عند معرفة الدالة المميزة للمتغير  $Z$  (المجموع) أو المتغير  $\bar{x}$  (المتوسط) يكون من السهل معرفة التوزيع الاحتمالي للمتغير.

مثال (6 - 3 - 3): إذا كانت  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة فالوجد

$$\text{التوزيع الاحتمالي للمجموع } Z = \sum_{i=1}^n X_i \text{ والمتوسط } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ إذا كان:}$$

أولاً:  $X_j$  له توزيع بواسوني بمعلمة  $\lambda_j$ . ثم لوجد توزيع كل من  $Z$  و  $\bar{x}$  عندما تكون  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . (النظر للتوزيع البواسوني ومثال (5 - 1 - 10)).

ثانياً:  $X_j$  له توزيع لسي دالة كثافة احتماله:

$$f_j(x) = \lambda_j e^{-\lambda_j x} \quad ; x > 0$$

(الحل)

أولاً: نعلم من التوزيع البواسوني ومن مثال (5 - 1 - 10) أن الدالة المميزة للمتغير  $X_j$  ذو التوزيع البواسوني بمعلمة  $\lambda_j$  هي:

$$\phi_{X_j}(t) = \exp[\lambda_j (e^{it} - 1)]$$

ومن نظرية (5 - 2 - 1) تكون الدالة المميزة للمجموع  $Z$ :

$$\phi(Z) = \prod_{i=1}^n \exp[\lambda_i (e^{it} - 1)] = \exp\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i (e^{it} - 1)\right]$$

وهذه هي الدالة المميزة لمتغير له توزيع بواسون بمعلمة  $\lambda = \sum \lambda_j$ . أي أن توزيع مجموع  $n$  من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها توزيع بواسون يكون له توزيع بواسون بمعلمة تساوي مجموع معالم المتغيرات. من هذا يتضح أن توزيع بواسون يولد نفسه ذاتياً.

إذن:

$$P_{\sum X_i}(r) = \Pr[\sum x_i = r] = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \quad ; \lambda = \sum \lambda_j \quad ; r = 0, 1, 2, \dots$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وبالمثل يمكن الحصول على توزيع المتوسط  $\bar{X}$  كما يلي:

$$\therefore \Pr\left[\sum x_i = r\right] = \Pr\left[\frac{1}{n} \sum x_i = \frac{r}{n}\right]$$

إذن توزيع المتوسط  $\bar{X}$  هو:

$$\Pr\left[\bar{X} = \frac{r}{n}\right] = \Pr\left[\sum_{i=1}^n X_i = r\right] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

لجميع قيم  $\bar{X} = \frac{r}{n} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$

أو بوضع  $J = \frac{r}{n}$  يمكن كتابة توزيع المتوسط  $\bar{X}$  في الصورة:

$$P_{\bar{X}}(J) = \Pr[\bar{X} = J] = \frac{\lambda^n}{(nJ)^n} e^{-\lambda}; \quad J = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$$

ثانيا: الدالة المميزة للمتغير  $X_J$  هي:

$$\phi_{X_J}(t) = E(e^{itX_J}) = \lambda_J \int_0^{\infty} e^{it\lambda_J x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

إذن الدالة المميزة للمجموع  $Z$  طبقاً لنظرية (5 - 2 - 1) هي:

$$\phi_Z(t) = \left[ \frac{\lambda}{\lambda - it} \right]^n$$

وهذه هي الدالة المميزة لمتغير له توزيع جاما بمعلمتين  $n$  و  $\lambda$  - (انظر توزيع جاما بالباب الثامن) - إذن دالة كثافة احتمال  $Z$  هي:

$$f(Z) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} Z^{n-1} e^{-\lambda Z}; \quad 0 \leq Z < \infty, \quad \lambda > 0, \quad n > 0.$$

مثال (6 - 3 - 4): إذا كان  $X_1, \dots, X_k$  متغيرات مستقلة ذات توزيع معتاد

$n(\mu_j, \sigma_j^2) \sim X_j$  - انظر للتوزيع المعتاد بالباب الثامن - فأوجد توزيع المتغير  $Z$  الذي يمثل علاقة خطية في المتغيرات  $X$ 's حيث:

$$Z = \sum_{j=1}^k C_j X_j$$

و " $C_j$ " ثوابت إحداهما على الأقل يختلف عن الصفر.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(الحل)

نعلم من توزيع المتغير المعتاد أن دالته المميزة هي:

$$\phi_{X_j}(t) = \exp \left[ i t \mu_j - \frac{t^2}{2} \sigma_j^2 \right]$$

(انظر مثال (5 - 1 - 10) جـ).

إذن الدالة المميزة للمتغير  $C_j X_j$  هي:

$$\phi_{C_j X_j}(t) = E(e^{it C_j X_j}) = \exp \left[ i t C_j \mu_j - \frac{t^2}{2} C_j^2 \sigma_j^2 \right]$$

أي أن  $C_j X_j$  لها توزيع معتاد  $n(C_j \mu_j, C_j^2 \sigma_j^2)$

إذن الدالة المميزة للمتغير  $Z$  هي:

$$\phi_Z(t) = E(e^{itZ}) = E[e^{it \sum_{j=1}^k C_j X_j}]$$

ومن الاستقلال

$$= \prod_{j=1}^k E(e^{it C_j X_j})$$

ومما سبق نجد أن:

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= \prod_{j=1}^k \exp \left[ i t C_j \mu_j - \frac{t^2}{2} C_j^2 \sigma_j^2 \right] \\ &= \exp \left[ i t \sum_{j=1}^k C_j \mu_j - \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^k C_j^2 \sigma_j^2 \right] \end{aligned}$$

وهذه هي الدالة المميزة لمتغير له توزيع معتاد  $n\left(\sum_{j=1}^k C_j \mu_j, \sum_{j=1}^k C_j^2 \sigma_j^2\right)$  أي أن

$$Z = \sum_{j=1}^k C_j X_j \rightsquigarrow n\left(\sum_{j=1}^k C_j \mu_j, \sum_{j=1}^k C_j^2 \sigma_j^2\right)$$

أي أن  $Z$  متغير له توزيع معتاد توقعه  $\sum_{j=1}^k C_j \mu_j$  وتباينه  $\sum_{j=1}^k C_j^2 \sigma_j^2$ .

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ملاحظة (6 - 3 ب 1): المثال السابق يوضح أن أى علاقة خطية في متغيرات معتادة مستقلة يكون لها توزيع معتاد - وفى الواقع حتى فى حالة عدم الاستقلال يمكن إثبات أن أى علاقة خطية في متغيرات معتادة (حتى لو لم تكن مستقلة) يكون لها توزيع معتاد. إذ يمكن إثبات ما يلى:

إذا كان  $\underline{x}' = (X_1, \dots, X_k)$  متغير مشترك له توزيع معتاد مشترك  $n(\underline{\mu}, V)$  حيث  $\underline{\mu}$  يمثل متجه التوقعات و  $V$  تمثل مصفوفة التغاير للمتغير المشترك  $\underline{x}' = (X_1, \dots, X_n)$  - فإن المتغير  $Z = \sum_{j=1}^k C_j X_j$  يكون له توزيع معتاد مفرد  $n(\underline{C}'\underline{\mu}, \underline{C}'V\underline{C})$  وسيتم إثبات ذلك فى باب التوزيع المعتاد المتعدد بالفصل التاسع.

نتيجة (6 - 3 ب 1): فى مثال (6 - 3 - 4) السابق - إذا وضعنا  $k = 2$  و  $C_1 = C_2 = 1$  فإن:

$$X_1 + X_2 \rightarrow n(C_1\mu_1 + C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2)$$

أما إذا كانت  $k = 2$ ،  $C_1 = 1$ ،  $C_2 = -1$  فإن:

$$X_1 - X_2 \rightarrow n(C_1\mu_1 - C_2\mu_2, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2)$$

وإذا وضعنا  $C_1 = C_2 = \dots = C_k = \frac{1}{k}$  فإن

$$\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \rightarrow n(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

### (6 - 4) تحويل المتغيرات (التحويلة $Y = g(X)$ ):

هذا هو الأسلوب الثالث الذى نقدمه لإيجاد توزيع دوال فى متغيرات عشوائية بعد أن قدمنا أولاً أسلوب دالة التوزيع الاحتمالى ثم أسلوب الدالة المميزة. وفى هذا الأسلوب نتناول أولاً حالة المتغير المفرد (منقطع ثم مستمر) ثم نتناول ثانياً حالة المتغيرات المتعددة (منقطعة ثم مستمرة). وفى عرضنا هذا يجب أن نفرق بين الترميزين التاليين، الأول  $Y = g(X)$  وهذا يعبر عن المتغير العشوائى  $Y$  كدالة  $g(\cdot)$  فى المتغير  $X$ ، والترميز الثانى  $y = g(x)$  وهذا يعبر عن تحويل رياضية عادية أو دالة رياضية (بورالية مقيسة). وسنرمز بالرمز  $g^{-1}(y)$  لقيمة  $x$  التى عندها  $y = g(x)$  وذلك إذا كانت العلاقة بين  $x$  و



## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$y$  علاقة تبادلية وحيدة (1-1). أى أن  $g^{-1}(\cdot)$  هى الدالة للعكسية للدالة  $g(\cdot)$  إذا كانت العلاقة بين  $x$  و  $y$  علاقة تبادلية وحيدة.

(6-4) حالة المتغير المفرد المنقطع: نفرض أن  $X$  متغير منقطع بأخذ القيم (mass points)  $X = x_1, x_2, \dots$  باحتمالات  $P_X(x_i)$  (دالة احتمال  $X$ )  $i = 1, 2, \dots$  والمتغير العشوائى  $Y$  تربطه بالمتغير  $X$  الدالة  $Y = g(X)$ . من الواضح أن دالة احتمال  $Y$  يمكن الحصول عليها بتطبيق قوانين الاحتمالات باستخدام دالة احتمال  $X$  و  $P_X(x)$  والتحويلة  $g(\cdot)$  وذلك كما يلى:

بفرض أن قيم المتغير  $Y$  (mass points) هى  $y_1, y_2, \dots$  وهذه القيم يمكن الحصول عليها من قيم  $X$  بالتحويلة  $g(\cdot)$  حيث  $y_i = g(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ويمكن الآن الحصول على دالة احتمال  $Y$  وهى  $P_Y(y)$ . وهنا يجب أن نفرق بين حالتين:

الحالة الأولى: عندما تكون العلاقة  $y = g(x)$  علاقة تبادلية وحيدة (1-1) وفى هذه الحالة تكون دالة احتمال  $Y$

$$P_Y(y_i) = \Pr[Y = y_i] = \Pr[g(X) = y_i] \\ = \Pr[X = g^{-1}(y_i)] = P_X[g^{-1}(y_i)]$$

وبذلك تكون دالة احتمال  $Y$  هى:

$$(4.6.1): P_Y(y_i) = P_X[g^{-1}(y_i)] \quad ; Y = y_1, y_2, \dots$$

حيث:  $i = 1, 2, \dots$  و  $y_i = g(x_i)$  و  $P_Y(y_i)$  تساوى الصفر خلاف ذلك.

الحالة الثانية: عندما تكون العلاقة  $y = g(x)$  ليست وحيدة حيث يوجد عدة قيم  $X$  مقابلة لكل قيمة من قيم  $y$  وهنا لا يمكن التعبير عن الدالة العكسية  $g^{-1}(\cdot)$  بصيغة واحدة — وفى هذا الحالة تكون:

$$P_Y(y_i) = \Pr[Y = y_i] = \Pr[g(X) = y_i] = \sum_{x: g(x)=y_i} P_X(x_i)$$

أى أن دالة كثافة احتمال  $Y$  هى:

$$(6.4.2): P_Y(y_i) = \sum_{x: g(x)=y_i} P_X(x_i) \quad , Y = y_1, y_2, \dots \\ = 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

**الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات**

مثال (6 - 4 - 1):  $X$  متغير عشوائي له دالة الاحتمال

$$P_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

أوجد دالة احتمال كل من:

$$Y = 2X + 1 \quad (أ)$$

$$Z = (X - 1)^2 \quad (ب)$$

(الحل)

(أ) عندما  $Y = g(X) = 2X + 1$  إذن  $Y$  يمكن أن تأخذ القيم

$$y_1 = g(x_1) = g(0) = 1$$

$$y_2 = g(x_2) = g(1) = 3$$

$$y_3 = g(x_3) = g(2) = 5$$

$$y_4 = g(x_4) = g(3) = 7$$

$$y_5 = 9, \quad y_6 = 11$$

وباستخدام العلاقة (6. 4. 1) تكون دالة كثافة احتمال  $Y$  هي:

$$P_Y(y) = \Pr[Y = y_i] = \Pr[2X + 1 = y_i] = \Pr[X = \frac{1}{2}(y_i - 1)]$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{6}; \quad y = 1, 3, 5, 7, 9, 11$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

(ب) عندما  $Y = (X - 1)^2$  ، إذن  $Y$  يمكن أن تأخذ القيم:

$$y_1 = g(x_1) = (0 - 1)^2 = 1$$

$$y_2 = g(x_2) = (1 - 1)^2 = 0$$

وبالمثل:

$$y_3 = 1, \quad y_4 = 4, \quad y_5 = 9, \quad y_6 = 16$$

أى أن:

$$Y = 0, 1, 4, 9, 16$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وباستخدام العلاقة (6. 4. 2) نحصل على دالة احتمال  $Y$  كما يلي:

$$P_Y(0) = P_X(0) = \frac{1}{6}, \quad P_Y(1) = P_X(0) + P_X(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$P_Y(4) = P_X(3) = \frac{1}{6}, \quad P_Y(9) = P_X(4) = \frac{1}{6}, \quad P_Y(16) = P_X(5) = \frac{1}{6}$$

أى أن دالة احتمال  $Y$  هي:

$$f_Y(y) = \frac{1}{6} \quad y = 0, 4, 9, 16$$

$$= \frac{2}{6} \quad y = 1$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

(6 - 4 ب) حالة المتغير المفرد المستمر:

أولاً: عندما تكون العلاقة  $Y = g(X)$  علاقة تبادلية وحيدة:

إذا كان  $X$  متغير عشوائى مستمر له دالة كثافة الاحتمال  $f_X(x)$  والمجموعة  $A = \{x : f_X(x) > 0\}$  تمثل مدى المتغير  $X$ . والمتغير  $Y$  يرتبط بالمتغير  $X$  بالعلاقة  $Y = g(X)$  حيث أن الدالة  $y = g(x)$  دالة بوار اليه مقيسة تتوافر فيها الشروط التالية:

(أ) أنها علاقة تبادلية وحيدة (1-1).

(ب) وأن المشتقة التفاضلية  $g'(x)$  تمثل دالة مستمرة everywhere continuous

فإذا كانت  $g'(x) \neq 0$  فى الفترة  $x_1 < x \leq x_2$  التى تعتبر مجموعة جزئية من المدى  $A$ . وكانت  $y_1 = g(x_1)$  و  $y_2 = g(x_2)$  والدالة العكسية المقابلة للدالة  $y = g(x)$  هى  $x = g^{-1}(y)$ ، فإن  $g^{-1}(y)$  تكون دالة وحيدة القيمة — طبقاً للفروض السابقة — ومشتقتها التفاضلية  $[g^{-1}(y)]'$  تعتبر دالة محدودة ومستمرة فى الفترة  $y_1 < y \leq y_2$ . وهى الفترة المقابلة للفترة  $x_1 < x \leq x_2$ ، والفترتين متكافئتين أى أن:

$$\Pr[x_1 < X \leq x_2] = \Pr[y_1 < Y \leq y_2]$$

وعلى ذلك يكون:

$$\Pr[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

وباستخدام التحويلة  $y = g(x)$  نجد أن:

$$(6. 4. 3): \Pr[x_1 < X \leq x_2] = \int_{y_1}^{y_2} f_X[g^{-1}(y)] \cdot [g^{-1}(y)]' dy$$

## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

فإذا كانت المشتقة  $\left[g^{-1}(y)\right]' > 0$  فإن الدالة  $g^{-1}(y)$  تكون تزايدية وبالتالي تكون  $y_1 < y_2$  ويكون التكامل الموجود في الطرف الأيمن من المعادلة (6. 4. 3) معبراً عن  $\Pr[y_1 < Y \leq y_2]$  حيث  $Y = g(X)$  وحيث أن:

$$(6. 4. 4): \Pr[x_1 < X \leq x_2] = \Pr[y_1 < Y \leq y_2] = \int_{y_1}^{y_2} f_Y(y) dy$$

إن بمقارنة المعادلتين (6. 4. 3)، (6. 4. 4) يتضح أن دالة كثافة احتمال المتغير

$$Y = g(X) \text{ عندما } \left[g^{-1}(y)\right]' > 0 \text{ هي:}$$

$$(6. 4. 5): f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left[g^{-1}(y)\right]'; \left[g^{-1}(y)\right]' > 0$$

أما إذا كانت  $\left[g^{-1}(y)\right]' < 0$  فإن الدالة  $g^{-1}(y)$  تكون تناقصية وبالتالي تكون  $y_2 < y_1$  وعلى ذلك فإن المعادلة (6. 4. 3) السابقة تكتب في الصورة:

$$\begin{aligned} (6. 4. 6): \Pr[x_1 < X \leq x_2] &= - \int_{y_2}^{y_1} f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left[g^{-1}(y)\right]' dy \\ &= \int_{y_2}^{y_1} f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \left[g^{-1}(y)\right]' \right| dy \\ &= \Pr[y_2 < Y \leq y_1] = \int_{y_2}^{y_1} f_Y(y) dy \end{aligned}$$

ومن المعادلة السابقة يتضح أنه عندما  $\left[g^{-1}(y)\right]' < 0$  تكون دالة كثافة احتمال المتغير  $Y$  هي:

$$(6. 4. 7): f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \left[g^{-1}(y)\right]' \right|; \left[g^{-1}(y)\right]' < 0$$

وبمقارنة المعادلتين (6. 4. 5)، (6. 4. 7) نصل إلى أن: المتغير العشوائي  $Y = g(X)$  له دالة كثافة الاحتمال

$$(6. 4. 8a): f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \left[g^{-1}(y)\right]' \right|.$$

والصيغة (6. 2. 10) تعتبر حالة خاصة من الصيغة (6. 4. 8) السابقة.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ويمكن كتابة دالة كثافة الاحتمال (6. 4. 8a) في الصيغة المرادفة التالية:

$$(6. 4. 8b): f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x \rightarrow y}$$

حيث:

$$f_X(x) \Big|_{x \rightarrow y} = f_X[g^{-1}(y)] , \quad \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x \rightarrow y} = \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

ثانياً: عندما لا تكون العلاقة  $Y = g(X)$  علاقة تبادلية وحيدة:

سبق أن عرفنا العلاقة للتبادلية الوحيدة بأنها تحدد لكل نقطة في مدى المتغير  $X$  نقطة وحيدة في مدى المتغير  $Y$  وبالعكس لكل نقطة في مدى المتغير  $Y$  تحدد نقطة وحيدة في مدى المتغير  $X$ ، ولكن العلاقة لا تكون وحيدة عندما توجد لكل قيمة من قيم  $Y$  أكثر من قيمة من قيم  $X$ . فلو كانت المجموعة  $A = \{x: f_X(x) > 0\}$  تمثل مدى المتغير  $X$  الذى دالة كثافة احتماله  $f_X(x)$ ، والمجموعة  $B = \{y: f_Y(y) > 0\}$  تمثل مدى المتغير  $Y$  الذى دالة كثافة احتماله  $f_Y(y)$ ، وإذا كانت التحويلة  $y = g(x)$  تحدد لكل نقطة من المجموعة  $A$  نقطة وحيدة فقط في المجموعة  $B$ ، ولكنها قد تحدد لكل نقطة في المجموعة  $B$  أكثر من نقطة واحدة في المجموعة  $A$  فإننا نقول أن التحويلة  $y = g(x)$  ليست تبادلية وحيدة، وبالتالي لا يمكن تطبيق العلاقة (6. 4. 8a) السابقة لإيجاد دالة كثافة احتمال المتغير  $Y$ . ولكن لو أمكن تقسيم المجموعة  $A$  إلى عدد محدود (أو حتى قابل للعد) من

المجموعات المنفصلة  $A = \bigcup_{j=1}^m A_j$ ،  $A_1, A_2, \dots, A_m$  حيث تكون التحويلة  $y = g(x)$

تحويلة تبادلية وحيدة بين كل واحدة من المجموعات  $A_j$  والمجموعة  $B$ . فإذا كانت

$x = g_j^{-1}(y)$  هى الدالة العكسية للدالة  $y = g(x)$  عندما  $x \in A_j$ ، فإن دالة كثافة

احتمال المتغير العشوائى  $Y = g(X)$  تكون:

$$(6. 4. 9): f_Y(y) = \sum_{j=1}^m f_{X_j}[g_j^{-1}(y)] \cdot \left| g_j^{-1}(y) \right| ; y \in B$$

= 0      خلاف ذلك

والعلاقة (6. 2. 12) تعتبر حالة خاصة من العلاقة (6. 4. 9) السابقة.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

مسئال (6 - 4 ب - 1): إذا كان  $X$  متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة الاحتمال  $f_X(x)$  فأوجد دالة كثافة احتمال المتغير  $Y = g(X) = X^2$  عندما تكون:

$$f_X(x) = e^{-x} ; 0 < x < \infty \quad (أ)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} ; -\infty < x < \infty \quad (ب)$$

(الحل)

(أ) هنا  $0 < x < \infty$  وبالتالي فإن العلاقة  $y = g(x) = x^2$  تكون علاقة تبادلية وحيدة، وبالتالي يمكن تطبيق المعادلة (6. 4. 8a) حيث:  $x = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$  إذن دالة كثافة احتمال  $Y$  كما في معادلة (6. 4. 8a) هي:

$$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} , 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

(ب) هنا  $-\infty < x < \infty$  أي أن مدى المتغير  $X$  يشتمل على قيم موجبة وقيم سالبة، لذا فإن التحويلة  $y = g(x) = x^2$  ليست تبادلية وحيدة. فإذا قسمنا مدى المتغير  $X$  إلى المجموعتين المنفصلتين  $A_1 = \{x: x \in A, x < 0\}$  و  $A_2 = \{x: x \in A, x > 0\}$ ، و  $A = A_1 \cup A_2$  إذن  $y = g(x) = x^2$  تعتبر علاقة تبادلية وحيدة في كل من  $A_1$  و  $A_2$  على حدة - ويجب ملاحظة أنه عندما  $x \in A_1$  تكون  $x = g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$  وبالمثل عندما  $x \in A_2$  تكون  $x = g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$  و  $\left[g_1^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$  و  $\left[g_2^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$  وبتطبيق العلاقة (6. 4. 9) نجد أن دالة كثافة احتمال  $Y$  هي:

$$(6. 4. 10) : f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} , 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال فى متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(6 - 4 جـ) حالة المتغيرات المتعددة المنقطعة:

أولاً: عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية وحيدة (1 - 1):

بفرض أن  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية منقطعة لها دالة الاحتمال المشتركة  $P(x_1, \dots, x_n)$  والمجموعة  $S_x$  هى مجموعة النقط فى الفراغ  $R_n$  التى عندها  $P(x_1, \dots, x_n) > 0$ ، ونرغب فى الحصول على دالة الاحتمال المشتركة  $g(y_1, \dots, y_n)$  للمتغيرات العشوائية المنقطعة  $Y_1, \dots, Y_n$  التى ترتبط بالمتغيرات  $X$ 's بالعلاقات التالية:

$$(6.4.11): Y_1 = h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, Y_n = h_n(X_1, \dots, X_n)$$

حيث العلاقات  $h_j(\cdot, \dots, \cdot)$  تعتبر تحويلات (دوال) تبادلية وحيدة (1 - 1) لجميع قيم  $j = 1, 2, \dots, n$  - وعلى هذا يمكن الحصول على الدوال العكسية لهذه الدوال التبادلية الوحيدة فى الصورة:

$$(6.4.12): X_1 = h_1^{-1}(Y_1, \dots, Y_n), \dots, X_n = h_n^{-1}(Y_1, \dots, Y_n)$$

فإذا رمزنا لمجموعة النقطة  $(y_1, \dots, y_n)$  التى عندها  $g(y_1, \dots, y_n) > 0$  بالرمز  $S_y$  فإن العلاقة بين المجموعتين  $S_x$ ،  $S_y$  تكون علاقة تبادلية وحيدة، وبتطبيق قواعد الاحتمالات نجد أن:

$$\begin{aligned} g(y_1, \dots, y_n) &= \Pr[Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] \\ &= \Pr[X_1 = h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n), \dots, X_n = h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)] \\ &= P[h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)] \end{aligned}$$

أى أن دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $Y_1, \dots, Y_n$  هى:

$$\begin{aligned} (6.4.13): g(y_1, \dots, y_n) &= P[h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)] \quad (y_1, \dots, y_n) \in S_y \\ &= 0 \quad \text{خلاف ذلك} \end{aligned}$$

حيث أن  $P(\cdot, \dots, \cdot)$  هى دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  والدوال  $h^{-1}(\cdot, \dots, \cdot)$  كما هى معرفة بالعلاقة (6.4.12).

ومن دالة الاحتمال  $g(y_1, \dots, y_n)$  يمكن الحصول على دالة الاحتمال الهامشية لأى عدد مطلوب من المتغيرات وذلك بالجمع على باقى المتغيرات غير المطلوبة. وحيث

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

أن أسلوب تحويل المتغيرات يتطلب أن يكون عدد المتغيرات الجديدة مساوياً لعدد المتغيرات القديمة — لذلك نقدم من المتغيرات الجديدة عدداً مساوياً لعدد المتغيرات القديمة — وبعد ذلك نحصل من الدالة  $g(y_1, \dots, y_n)$  على أى دالة هامشية لأى عدد نرغبه من المتغيرات بالجمع على باقى المتغيرات غير المطلوبة.

ثانياً: عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية غير وحيدة:

فى هذه الحالة يمكن باستخدام نظرية الاحتمالات وبأسلوب مماثل لما اتبعناه فى حالة المتغير المفرد يمكن إثبات أن دالة الاحتمال المعطاة بالعلاقة (6. 4. 13) السابقة تأخذ الصورة التالية:

$$(6. 4. 14): g(y_1, \dots, y_n) = \sum P[h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)]$$

حيث يكون المجموع  $\sum$  مأخوذاً على جميع قيم:  $x_i = h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n)$   $i = 1, 2, \dots, n$  والـ  $(y_1, \dots, y_n) = [h_1(X_1, \dots, X_n), \dots, h_n(X_1, \dots, X_n)]$  ————— ندها

مثال (6 - 4 - جـ - 1): إذا كان  $X_2$  و  $X_1$  متغيران عشوائيان مستقلان لهما توزيع بواسونى بمعلمة  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  على الترتيب ودالة احتمالهما المشتركة هي:

$$P(x_1, x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1} \lambda_2^{x_2}}{x_1! x_2!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad ; x_1 = 0, 1, 2, \dots ; x_2 = 0, 1, 2, \dots$$

ونسأوى الصفر خلاف ذلك. لوجد دالة احتمال المجموع  $Y = X_1 + X_2$ .

### (الحل)

استخدام أسلوب تحويل المتغيرات لإيجاد توزيع المجموع  $Y_1$  نحتاج لتقديم متغير ثانى ليكن  $Y_2$  — ليكون عدد المتغيرات الجديدة  $(Y_2, Y_1)$  يساوى عدد المتغيرات القديمة  $(X_2, X_1)$ . وحيث أن المتغير الثانى  $Y_2$  غير مهم بالنسبة لنا فيمكن اختياره بطريقة ما تجعل لدينا علاقة تبادلية وحيدة، وبسيطة، ولتحقيق ذلك يمكن اختيار  $X_2 = Y_2$ .

إن يمكن استخدام العلاقة (6. 4. 13) لإيجاد دالة الاحتمال المشتركة  $g(y_1, y_2)$  للمتغيرين  $Y_2$  و  $Y_1$ . وحيث أن  $Y_1 = X_1 + X_2$  و  $Y_2 = X_2$  يمكن كتابة التحويلة الرياضية التالية:



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$y_1 = x_1 + x_2 ; y_2 = x_2$$

$$\therefore x_1 = h_1^{-1}(y_1, y_2) = y_1 - y_2$$

$$; x_2 = h_2^{-1}(y_1, y_2) = y_2 ; y_1 = 0, 1, 2, \dots ; y_2 = 0, 1, 2, \dots, y_1$$

وبذلك تكون:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= P(h_1^{-1}(y_1, y_2), h_2^{-1}(y_1, y_2)) = P(y_1 - y_2 ; y_2) \\ &= \frac{\lambda_1^{y_1-y_2} \lambda_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)! y_2!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} ; y_2 = 0, 1, 2, \dots, y_1 \\ &\quad , y_1 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

وبالجمع بالنسبة للمتغير  $Y_2$  نحصل على دالة ل احتمال  $Y_1$  فى الصورة:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1 - y_2)! y_2!} \lambda_1^{y_1-y_2} \cdot \lambda_2^{y_2} \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^{y_1}}{y_1!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} ; y_1 = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

أى إن  $Y_1$  له توزيع بواسونى بمعلمة  $(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

(6 - 4) حالة المتغيرات المتعددة المستمرة:

نفرض أن  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية مستمرة لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  والمجموعة  $S_n$  تمثل مجموعة من النقاط فى الفراغ  $R_n$  عندها  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$  ونرغب فى الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $g(y_1, \dots, y_k)$  للمتغيرات المستمرة  $Y_1, \dots, Y_k$  ( $k \leq n$ ) التى ترتبط بالمتغيرات  $X$ 's بالعلاقات التالية:

$$Y_i = h_i(X_1, \dots, X_n) , i = 1, 2, \dots, k .$$

يمكن استخدام أسلوب تحويل المتغيرات لإيجاد دالة كثافة الاحتمال  $g(y_1, \dots, y_k)$  وذلك بالإضافة متغيرات جديدة هى  $Y_{k+1}, \dots, Y_n$  ترتبط بالمتغيرات  $X$ 's بعلاقات دالية معينة حتى يكون عدد المتغيرات الجديدة  $Y$ 's يساوى تماماً عدد المتغيرات القديمة  $X$ 's لأن هذا شرط ضرورى لاستخدام أسلوب تحويل المتغيرات وهو أسلوب رياضى معروف وموجود فى الكثير من كتب التحليل الرياضى وخاصة فى التكامل المتعدد - ويمكن

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

الرجوع إلى كتب التحليل الرياضى وحساب التفاضل والتكامل لمعرفة ما نحتاج إليه من أسلوب تحويل المتغيرات وكذلك مفهوم الجاكوبيان الذى سوف نستخدمه فى بقية دراستنا لهذا الباب.

(6-4-1) عندما تكون العلاقة بين المتغيرات علاقة تبادلية وحيدة:

نفرض أن  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال  $f(x_1, \dots, x_n)$  والمجموعة  $S_{x_n}$  هي مجموعة النقط فى الفراغ  $R_n$  التى عندها  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ ، و:

$$(6.4.15): S_{x_n} = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

وبفرض أن:

$$(6.4.16): y_i = h_i(x_1, \dots, x_n) ; i = 1, 2, \dots, n.$$

دوال مستمرة وحيدة القيمة تبادلية وحيدة (1-1) تسمى تحويل تبادلية وحيدة (1-1) والمشتقات التفاضلية لكل منها بالنسبة للمتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  مستمرة. وبما أن الدوال (6.4.16) تبادلية وحيدة، إذن يمكن أن توجد منها قيمة كل من  $x_1, \dots, x_n$  بدلالة  $y_1, \dots, y_n$ . أى أنه يوجد دوال عكسية للدوال (6.4.16) تسمى أيضاً تحويلات عكسية وحيدة (1-1) وتكتب فى الصورة:

$$(6.4.17): x_i = h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) ; i = 1, 2, \dots, n.$$

ومن الفروض السابقة تكون الدوال  $h_1^{-1}, \dots, h_n^{-1}$  هى أيضاً دوال تبادلية وحيدة والمشتقات التفاضلية لكل منها بالنسبة لـ  $y_1, \dots, y_n$  مستمرة. فإذا كانت المتغيرات العشوائية  $y_1, \dots, y_n$  معرفة كما يلى:

$$(6.4.18): Y_i = h_i(X_1, \dots, X_n) ; i = 1, 2, \dots, n.$$

فإننا نرغب فى الحصول على دالة كثافة احتمال المتغير المشترك  $(Y_1, \dots, Y_n)$  والتى نرمز لها بالرمز  $g(y_1, \dots, y_n)$ .

افترضنا سابقاً أن العلاقات (6.4.16) علاقات تبادلية وحيدة فهى إذن تنقل المجموعة  $S_{x_n}$  فى فراغ المتغيرات  $(X_1, \dots, X_n)$  المعطاة فى (6.4.15) إلى مجموعة ما نرمز لها بالرمز  $S_{y_n}$  فى فراغ المتغيرات  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

فإذا كانت المجموعة  $A_y$  مجموعة جزئية من الفراغ  $S_x$  فإن العلاقات (6. 4. 16) تنقل  $A_x$  إلى مجموعة منازرة في الفراغ  $S_y$  لنرمز لها بالرمز  $B_y$  حيث تكون  $B_y$  هى المجموعة المقابلة للمجموعة  $A_x$  طبقاً للتحويلات (6. 4. 16). إذن الحدثن  $(X_1, \dots, X_n) \in A_x$  و  $(Y_1, \dots, Y_n) \in B_y$  متكافئان — وعليه تكون:

$$(6. 4. 19): \Pr[(Y_1, \dots, Y_n) \in B_y] = \Pr[(X_1, \dots, X_n) \in A_x] \\ = \int \dots \int_{(x_1, \dots, x_n) \in A_x} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

ويمكن الآن إيجاد التكامل السابق باستخدام أسلوب تحويل المتغيرات طبقاً للعلاقات (6. 4. 16) أو (6. 4. 17) ومن التحليل الرياضى فى حساب التكامل المتعدد نعلم أن:

$$(6. 4. 20): \int \dots \int_{(x_1, \dots, x_n) \in A_x} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ = \int \dots \int_{(y_1, \dots, y_n) \in B_y} f[h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)] \\ \cdot |J_{(y_1, \dots, y_n)}| dy_1 \dots dy_n$$

حيث  $|J|$  يسمى جاكوبيان التحويلة العكسية (6. 4. 17).

وبفرض أن هذا الجاكوبيان لا يساوى الصفر (الجميع قيم  $(y_1, \dots, y_n) \in B_y$  ومعطى بالعلاقة:

$$(6. 4. 21): J_{(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال فى متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ومن الفروض السابقة يتضح أن الجاكوبيان  $J(y_1, \dots, y_n)$  يعتبر دالة محدودة ومستمرة لجميع قيم  $(y_1, \dots, y_n)$  فى المنطقة  $B_y$  حيث  $B_y \supset S_{y_n}$ . ومن العلاقتين (6. 4. 19)، (6. 4. 20) يتضح أن:

$$\begin{aligned} (6. 4. 22): \Pr[(Y_1, \dots, Y_n) \in B_y] \\ &= \int \dots \int_{(y_1, \dots, y_n) \in B_y} f[h^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)] \\ &\quad \cdot |J_{(y_1, \dots, y_n)}| dy_1 \dots dy_n \\ &= \int \dots \int_{(y_1, \dots, y_n) \in B_y} g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

وحيث أن  $B_y$  تعتبر أى مجموعة جزئية من المجموعة  $S_{y_n}$  فإن العلاقة السابقة تكون صحيحة حتى عندما تكون  $B_y = S_{y_n}$ .

وبمقارنة التكاملات فى العلاقة السابقة يتضح أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $(Y_1, \dots, Y_n)$  هى:

$$(6. 4. 23): g(y_1, \dots, y_n) = f[h^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)] \cdot |J_{(y_1, \dots, y_n)}|; (y_1, \dots, y_n) \in S_{y_n}$$

حيث أن  $f(\dots)$  هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $(X_1, \dots, X_n)$  و  $J_{(y_1, \dots, y_n)}$  هو جاكوبيان التحويلة المعطى بالعلاقة (6. 4. 21). ويمكن تلخيص النتائج السابقة فى النظرية التالية لأهميتها:

نظرية (6-4-1):

إذا كانت  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  والمجموعة  $S_x$  تمثل فراغ المتغيرات  $(X_1, \dots, X_n)$  حيث:

$$S_x = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) > 0\}.$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وبفرض أن:

$$(1) \quad y_i = h_i(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{تمثل تحويلة تباعلية وحيدة (1-1) تنقل الفراغ } S_{x_n} \text{ إلى فراغ آخر } S_{y_n} \text{ للمتغيرات } Y_1, \dots, Y_n.$$

$$(2) \quad \text{المشتقات التفاضلية الأولى للدوال العكسية } x_i = h_i^{-1}(y_1, \dots, y_n); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{تمثل دوال مستمرة في الفراغ } S_{y_n}.$$

$$(3) \quad \text{جاكوبيان التحويلة العكسية المعطاة في (2) لا يساوى الصفر وهو الجاكوبيان J المعطى بالعلاقة (6. 4. 21).}$$

$$\text{إن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية } Y_1, \dots, Y_n \text{ حيث } Y_i = h_i(X_1, \dots, X_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(6. 4. 24): \quad g(y_1, \dots, y_n) = f[h_1^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_n^{-1}(y_1, \dots, y_n)]$$

$$\cdot |J_{(y_1, \dots, y_n)}|; \quad (y_1, \dots, y_n) \in S_{y_n}$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

$$\text{حيث } S_{y_n} \text{ هي صورة (Image) المجموعة } S_{x_n} \text{ المعطاة بالعلاقة (6. 4. 15) طبقاً للتحويلة (6. 4. 16).}$$

ملاحظة (6 - 4 - 1): يمكن التعبير عن تحويل المتغيرات في صورة علاقة مصفوفية كما يلي: إذا كان لدينا التحويلة الخطية  $y = A x$ ، حيث  $x$  و  $y$  متجهان لهما نفس الدرجة  $n \times 1$  و  $A$  مصفوفة مربعة  $(n \times n)$  غير شاذة أى محددها لا يساوى الصفر، فإن جاكوبيان هذه التحويلة هو:

$$J = |d y / d x| = |A|$$

$$\text{حيث } |A| \text{ هي القيمة الموجبة لمحدد المصفوفة } A. \text{ أى أن:}$$

$$dy_1 \dots dy_n = |A| \cdot dx_1 \dots dx_n$$

أو

$$d y = |A| d x$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

نتيجة (6-4 د 1): فسي النظرية السابقة بوضع  $n=2$  نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1 = h_1(X_1, X_2)$ ،  $Y_2 = h_2(X_1, X_2)$  في الصورة:

$$(6.4.25): g(y_1, y_2) = f[h_1^{-1}(y_1, y_2), h_2^{-1}(y_1, y_2)] \cdot |J_{(y_1, y_2)}| ; (y_1, y_2) \in S_{y_2}$$

حيث  $J_{(y_1, y_2)}$  هو الجاكوبيان (6.4.21) عندما  $n=2$  و  $f(x_1, x_2)$  هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1, X_2$  و  $S_{y_2}$  هي المجموعة  $S_{y_2}$  المعطاة في النظرية السابقة عندما  $n=2$ .

ملاحظة (6-4 د 2): يمكن باستخدام النتيجة السابقة إيجاد دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع الاحتمالي للمجموع والفرق وحاصل الضرب وخارج القسمة لأي متغيرين عشوائيين ونحصل على نفس النتائج المعطاة بالعلاقات (6.2.13) و (6.2.14) للمجموع و (6.2.17) لحاصل الضرب و (6.2.19) للقسمة.

وسنوضح فيما يلي كيفية الحصول على العلاقة (6.2.13) باستخدام النتيجة السابقة ويمكن إثبات باقي العلاقات بنفس الأسلوب.

للحصول على دالة كثافة احتمال مجموع متغيرين عشوائيين — ضع في نتيجة (6-4 د 2) السابقة  $Y_1 = h_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$  و  $Y_2 = X_2$  إذن العلاقات العكسية هي:  $X_1 = Y_1 - Y_2$  و  $X_2 = Y_2$  والجاكوبيان:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

إذن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيران  $Y_1, Y_2$  هي:

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2) ; (y_1, y_2) \in S_{y_2}$$

$$= 0 \quad \text{خلاف ذلك}$$

حيث  $S_{y_2}$  هي المجموعة التي تمثل فراغ المتغير  $(Y_1, Y_2)$  وهي تتكون من جميع النقط  $(y_1, y_2)$  التي يمكن الحصول عليها من النقط المقابلة  $(x_1, x_2)$  باستخدام

### الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

التحويل  $y_1 = x_1 + x_2$  و  $y_2 = x_2$  . وللحصول على دالة كثافة احتمال المتغير  $Y_1$  نكامل الدالة  $g(y_1, y_2)$  بالنسبة للمتغير  $y_2$  حيث نحصل على

$$g_1(y_1) = \int_{y_2} f(y_1 - y_2, y_2) dy_2$$

وهي نفس العلاقة (6.2.13) بكتابة  $y_1$  بدلاً من  $Z$  و  $y_2$  بدلاً من  $y$ .

مثال (6-4-د1): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات العشوائية  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  هي:

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1+x_2+x_3)} \quad ; x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$$

أوجد كثافة احتمال المجموع  $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ .

(الحل)

لاستخدام أسلوب تحويل المتغيرات نقدم متغيران جديدين  $Y_2$  و  $Y_3$  ليكون عدد المتغيرات القديمة  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  مساوياً لعدد المتغيرات الجديدة  $Y_1$  و  $Y_2$  و  $Y_3$ . ونستخدم التحويلة التالية:

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 ; y_1 y_2 = x_1 + x_2 ; y_1 y_2 y_3 = x_3$$

إذن:

$$x_1 = h^{-1}(y_1, y_2, y_3) = y_1(1 - y_2)$$

وبالمثل:

$$x_2 = y_1 y_2 (1 - y_3) ; x_3 = y_1 y_2 y_3$$

وبمــــا أن:  $0 < x_1, x_2, x_3 < \infty$  إذن:  $0 \leq y_2 \leq 1$  و  $0 \leq y_3 \leq 1$  و  $0 \leq y_1 \leq \infty$  وباستخدام العلاقة (6.4.24) نجد أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $g(y_1, y_2, y_3)$  للمتغيرات الثلاثة  $Y_1, Y_2, Y_3$  هي:

$$g(y_1, y_2, y_3) = f[h_1^{-1}(y_1, y_2, y_3); h_2^{-1}(y_1, y_2, y_3); h_3^{-1}(y_1, y_2, y_3)] \cdot |J_{(y_1, y_2, y_3)}|$$

## الفصل السادس - توزيعات لوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

حيث أن:

$$|J_{(y_1, y_2, y_3)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-y_2 & -y_1 & 0 \\ y_2(1-y_3) & y_1(1-y_3) & -y_1 y_2 \\ y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_1 y_2 \end{vmatrix} = y_1^2 y_2.$$

إن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1$  و  $Y_2$  هي:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= f[y_1(1-y_2), y_1 y_2(1-y_3), y_1 y_2 y_3] \\ &= e^{-[y_1(1-y_2)+y_1 y_2(1-y_3)+y_1 y_2 y_3]} \cdot y_1^2 y_2 \\ &= e^{-y_1} \cdot y_1^2 y_2 \quad ; \quad 0 \leq y_1 \leq \infty, 0 \leq y_2 \leq 1, 0 \leq y_3 \leq 1 \end{aligned}$$

وبمكاملة الدالة السابقة بالنسبة للمتغيرين  $Y_1$  و  $Y_2$  نحصل على دالة كثافة احتمال المجموع  $Y_1 = x_1 + x_2 + x_3$  في الصورة:

$$g(y_1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-y_1} y_1^2 y_2 dy_2 dy_3 = \frac{1}{2} y_1^2 e^{-y_1} \quad ; \quad 0 \leq y_1 \leq \infty$$

(6-4-2) عندما تكون العلاقة بين المتغيرات (الجديدة والقديمة) علاقة تبادلية غير وحيدة:

في النظرية السابقة وضعنا ثلاثة فروض، الفرض الأول أن العلاقة  $y_i = h_i(x_1, \dots, x_n)$  تمثل علاقة تبادلية وحيدة، وهذا الفرض قد لا يتحقق في بعض الحالات حيث قد نجد أن التحويلة (6.4.16) تحدد لكل نقطة من نقط الفراغ  $S_{x_n}$  [المعطى بالعلاقة (6.4.15)] نقطة وحيدة في الفراغ  $S_{y_n}$  [فراغ المتغير  $(Y_1, \dots, Y_n)$ ] ولكنها تحدد لكل نقطة من نقط الفراغ  $S_{y_n}$  أكثر من نقطة من نقط الفراغ  $S_{x_n}$ ، وبهذا تكون التحويلة تبادلية غير وحيدة وبالتالي فإن النظرية السابقة لا تنطبق على هذه الحالة.



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

إذا أمكن تجزئ الفراغ  $S_{\underline{y}_k}$  إلى  $k$  من المجموعات المنفصلة  $S_{\underline{y}_k}(i)$   $i = 1, 2, \dots, k$  بحيث أن التحويلة (6. 4. 16) تعتبر تحويلة تبادلية وحيدة بين كل مجموعة على حدة من المجموعات  $S_{\underline{y}_k}(i)$  والمجموعة  $S_{\underline{y}_k}$  أى تحدد لكل نقطة فى المجموعة  $S_{\underline{y}_k}(i)$  نقطة وحيدة فى  $S_{\underline{y}_k}$  ولكل نقطة من نقط  $S_{\underline{y}_k}$  تحدد نقطة وحيدة فى  $S_{\underline{y}_k}(i)$  لجميع قيم  $i = 1, 2, \dots, n$ . ويفرض أن العلاقات العكسية (6. 4. 17) تأخذ الصورة التالية:

$$(6. 4. 26): x_i = h_{ir}^{-1}(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, k$$

وجاكوبيان للتحويلة هو:

$$(6. 4. 27): J_{r(y_1, \dots, y_n)} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial h_{ir}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{ir}^{-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_{ir}^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{nr}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{nr}^{-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_{nr}^{-1}}{\partial y_n} \end{array} \right| ; \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

وفرض أن المشتقات التفاضلية الجزئية داخل المحدد مستمرة وأن  $J_r \neq 0$  لجميع قيم  $r = 1, 2, \dots, k$  فيمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (6 - 4 - 2):

إذا كانت  $X_1, \dots, X_n$  متغيرات عشوائية لها دالة كثافة الاحتمال المشتركة  $f(x_1, \dots, x_n)$  والمجموعة  $S_{\underline{x}_n}$  تمثل فراغ المتغيرات  $(x_1, \dots, x_n)$  حيث:

$$S_{\underline{x}_n} = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) > 0\}$$

وفرض أن:

$$(6. 4. 28): y_i = h_i(x_1, \dots, x_n) ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

تمثل تحويلة تبادلية غير وحيدة، فإذا أمكن تجزئ الفراغ  $S_{\underline{y}_n}$  إلى  $k$  من المجموعات المنفصلة  $S_{\underline{y}_n}(i)$  و  $i = 1, 2, \dots, k$  بحيث تكون التحويلة السابقة تحويلة تبادلية وحيدة بين  $S_{\underline{y}_n}$  والفراغ  $S_{\underline{y}_n}$  للمتغيرات  $Y_1, \dots, Y_n$ . وإذا كتبت:

$$x_i = h_{ir}^{-1}(y_1, \dots, y_n), \quad r = 1, 2, \dots, k$$

## الفصل السادس - توزيعات نوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

تمثل تحويلة عكسية تبديلية وحيدة بين  $S_{\underline{y}}$  و  $S_{\underline{x}}(i)$  لجميع قيم  $r = 1, 2, \dots, k$  والجاكوبيان  $J_{r(y_1, \dots, y_n)}$  هو المعطى بالعلاقة (6. 4. 27) وبفرض أن كل المشتقات التفاضلية في الجاكوبيان مستمرة وأن  $J_{r(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$  لجميع قيم  $r = 1, 2, \dots, k$  فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات  $(Y_1, \dots, Y_n)$  هي:

$$(6. 4. 29): g(y_1, \dots, y_n)$$

$$= \sum_{r=1}^k |J_{r(y_1, \dots, y_n)}| f[h_{1r}^{-1}(y_1, \dots, y_n); \dots; h_{nr}^{-1}(y_1, \dots, y_n)]$$

لجميع قيم  $(y_1, \dots, y_n) \in S_{\underline{y}}$  حيث  $S_{\underline{y}}$  هي صورة المجموعة  $S_{\underline{x}}$  طبقاً للتحويل (6. 4. 28).

نتيجة (6 - 4 د 2): ففى النظرية السابقة بوضع  $n = 2$  نحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $(Y_1, Y_2)$  ،  $Y_1 = h_1(X_1, X_2)$  ،  $Y_2 = h_2(X_1, X_2)$  فى الصورة:

$$(6. 4. 30): g(y_1, y_2) = \sum_{r=1}^k |J_{r(y_1, y_2)}| f[h_{1r}^{-1}(y_1, y_2), h_{2r}^{-1}(y_1, y_2)]$$

لجميع قيم  $(y_1, y_2) \in S_{\underline{y}}$ .

والجاكوبيان  $J_{r(y_1, y_2)}$  هو المعطى بالعلاقة (6. 4. 27) عندما  $n = 2$  و  $f(x_1, x_2)$  هى دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  و  $S_{\underline{y}}$  هى المجموعة المعطاة فى النظرية السابقة عندما  $n = 2$ .

مسألة (6 - 4 د 2): إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان كل منهما له توزيع معتاد قياسي بدالة كثافة احتمال:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} \quad ; -\infty < x_i < \infty \quad ; i = 1, 2.$$

أوجد دالة كثافة احتمال المجموع  $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ .

(الحل)

لاستخدام أسلوب تحويل المتغيرات نقدم متغير آخر  $Y_2$  ليكون عدد المتغيرات (الجديدة)  $Y_1$  و  $Y_2$  مساوياً لعدد المتغيرات (القديمة)  $X_1$  و  $X_2$ . وباعتبار أن اهتمامنا

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

منصب على إيجاد دالة كثافة احتمال المتغير  $Y_1$  فيمكن اختيار  $Y_2$  في صورة يمكننا من استخدام تحويل رياضية بسيطة، لذلك نضع  $Y_2 = X_2$  . وبالتالي يمكن استخدام التحويلة:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 ; y_2 = x_2$$

وهذا يترتب عليه أن:

$$x_1 = \pm \sqrt{y_1 - y_2^2} ; x_2 = y_2$$

من هذا يتضح أن التحويلة ليست وحيدة.

وبما أن  $-\infty < x_1 < \infty$  و  $-\infty < x_2 < \infty$  إذن يمكن تمثيل هذا المدى بالمجموعة:

$$A(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < \infty ; -\infty < x_2 < \infty\}$$

ومن العلاقة بين  $X$ 's و  $Y$ 's نجد أن:

$$0 \leq y_1 < \infty ; -\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1} .$$

فإذا جزأنا المجموعة  $A(x_1, x_2)$  إلى مجموعتين  $A_1(x_1, x_2)$  و  $A_2(x_1, x_2)$  حيث

$$A(x_1, x_2) = A_1(x_1, x_2) \cup A_2(x_1, x_2) ,$$

$$A_1(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < \infty ; -\infty < x_2 < \infty\} ,$$

$$A_2(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < 0 ; -\infty < x_2 < \infty\}$$

نجد أن التحويلة المستخدمة تعتبر تحويلة تبادلية وحيدة لكل من  $A_1(x_1, x_2)$  و

$A_2(x_1, x_2)$  حيث:

بالنسبة للمجموعة  $A_1(x_1, x_2)$  نجد أن:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 ; y_2 = x_2$$

$$x_1 = \sqrt{y_1 - y_2^2} ; x_2 = y_2$$

كما أن جاكوبيان هذه التحويلة هو:

$$J_{1(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-\frac{1}{2}}$$

## الفصل السادس - توزيعات نوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

وبالنسبة للمجموعة  $A_2(x_1, x_2)$  نجد أن:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 ; y_2 = x_2$$

$$x_1 = -\sqrt{y_1 - y_2^2} ; x_2 = y_2$$

وجاكوبيان هذه التحويلة هو:

$$J_{2(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-\frac{1}{2}} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(y_1 - y_2^2)^{-\frac{1}{2}}$$

وحيث أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$  هي:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} ; -\infty < x_1 < \infty , -\infty < x_2 < \infty .$$

إذن يمكن استخدام العلاقة (30. 4. 6) عندما  $k = 2$  لإيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1$  و  $Y_2$  في الصورة:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &= |J_{1(y_1, y_2)}| \cdot f(-\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2) \\ &\quad + |J_{2(y_1, y_2)}| \cdot f(\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_1 - y_2^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} ; y_1 \geq 0, -\sqrt{y_1} < y_2 < \sqrt{y_1} . \end{aligned}$$

وبمكاملة الدالة المابقة بالنسبة لـ  $y_2$  نحصل على دالة كثافة احتمال  $Y_1$  في الصورة:

$$\begin{aligned} g(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2) dy_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \left\{ \int_{-\sqrt{y_1}}^{\sqrt{y_1}} \frac{dy_2}{\sqrt{y_1 - y_2^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \left\{ \arcsin \frac{y_2}{\sqrt{y_1}} \right\}_{-\sqrt{y_1}}^{\sqrt{y_1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y_1} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y_1} ; y_1 > 0 \end{aligned}$$

أي أن  $Y_1$  له توزيع أسى أو له توزيع كاي<sup>2</sup> بدرجتى حرية - كما في (8. 14. b).

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

ملاحظة (6 - 4 د - 3): مما سبق يتضح لنا أن أسلوب تحويل المتغيرات - في حالة المتغيرات المستمرة - والذي تم عرضه في البند (6 - 4 د) بنظريته (6 - 4 د - 1 و 2) ونتيجته (6 - 4 د - 1 و 2) يتلخص في الآتي:

عندما يكون لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  عددها  $n$  ولها توزيع مشترك معروف  $f(x_1, \dots, x_n)$  ونرغب في إيجاد توزيع دالة في المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  لتكن  $Y_1 = h(X_1, \dots, X_n)$  فإن استخدام أسلوب تحويل المتغيرات لإيجاد توزيع المتغير  $Y_1$  يتطلب:

(أ) تعريف  $n$  من المتغيرات الجديدة بحيث يكون  $Y_1$  أحد هذه المتغيرات، وبذلك يكون عدد المتغيرات الجديدة  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  مساوياً لعدد المتغيرات القديمة  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . ويمكن تطبيق الأسلوب المشار إليه في البند (6 - 4 د) للحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرات الجديدة. فإذا رمزنا لهذه الدالة بالرمز  $g(y_1, \dots, y_n)$  فيمكن إيجادها - إما باستخدام العلاقة (6. 4. 24) إذا كانت العلاقة بين المتغيرات الجديدة والقديمة علاقة تبادلية وحيدة وإما باستخدام العلاقة (6. 4. 29) إذا كانت العلاقة بين المتغيرات الجديدة والقديمة غير وحيدة - حيث أن عدد المتغيرات الجديدة يساوي عدد المتغيرات القديمة مما يسمح بتطبيق الأسلوب الرياضي المعروف بتحويل المتغيرات في التكامل المتعدد.

(ب) وبمكاملة الدالة  $g(y_1, \dots, y_n)$  بالنسبة لـ  $y_2, \dots, y_n$  - دون  $y_1$  - نحصل على دالة كثافة احتمال المتغير  $Y_1 = h(X_1, \dots, X_n)$  ونرمز لذلك بالتعبير التالي:

$$(6. 4. 31): g(y_1) = \int_{y_1=h(x_1, \dots, x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \\ = \int_{y_2} \dots \int_{y_n} g(y_1, \dots, y_n) dy_2 \dots dy_n.$$

حيث  $g(y_1)$  هي دالة كثافة احتمال المتغير (أو الدالة)  $Y_1 = h(X_1, \dots, X_n)$  وذلك مع مراعاة شروط التطبيق أي من العلاقات (6. 4. 24) و (6. 4. 29).

ونقدم فيما يلي مجموعة من الأمثلة لإيجاد توزيع دوال معينة في متغيرات عشوائية باستخدام أسلوب تحويل المتغيرات نقدم من خلالها بعض التحويلات الهامة المفيدة في مجال الإحصاء الرياضي.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

مثال (6 - 4 - 3): إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستمران لهما توزيع مشترك بدالة كثافة احتمال  $f(x_1, x_2)$  وكان:  $Y_1 = X_1 + X_2$  ;  $Y_2 = X_2$  فاثبت أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1$  و  $Y_2$  هي:

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2} f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right)$$

(الحل)

من العلاقة بين المتغيرات نجد أن:

$$X_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) ; X_2 = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_2)$$

والعلاقة بين المتغيرات القديمة  $X_1$  و  $X_2$  والجديدة  $Y_1$  و  $Y_2$  علاقة تبادلية وحيدة وجاكوبيان هذه العلاقة هو:

$$J_{(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

إن باستخدام العلاقة (6. 4. 25) نحصل على  $g(y_1, y_2)$  كما هي موضحة بالمثال.

مثال (6 - 4 - 4): إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستمران لهما توزيع مشترك بدالة كثافة احتمال  $f(x_1, x_2)$  ، وكان:

$$\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} ; \theta = \arctan(X_2/X_1)$$

$$\rho \geq 0 ; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

فاثبت أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $\rho$  و  $\theta$  هي:

$$g(\rho, \theta) = \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

(الحل)

من العلاقة بين المتغيرات نجد أن:

$$X_1 = \rho \cos \theta ; X_2 = \rho \sin \theta$$

والعلاقة بين المتغيرات القديمة  $X_1$  و  $X_2$  والجديدة  $\rho$  و  $\theta$  علاقة تبادلية وحيدة. وجاكوبيان هذه العلاقة هو:

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

$$J_{(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

إنّ باستخدام العلاقة (6. 4. 25) نحصل على  $g(\rho, \theta)$ .

مثال (6 - 4 - 5): إذا كان  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستمران لهما توزيع مشترك بدالة كثافة احتمال  $f(x_1, x_2)$ ، وكان:

$$Y_1 = X_1 \cos \theta + X_2 \sin \theta$$

$$;; Y_2 = -X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

فأثبت أن: دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1$  و  $Y_2$  هي:

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta, y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta).$$

(الحل)

باستخدام التحويلة المتعامدة:

$$\underline{Y} = C \underline{X}$$

حيث:

$$\underline{Y}' = (Y_1 \quad Y_2) ; \quad \underline{X}' = (X_1 \quad X_2)$$

$$C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

المصفوفة  $C$  متعامدة لأن مجموع مربعات عناصر كل صف تساوى واحد وحاصل ضرب الصفين يساوى صفر. إذن:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = C' \underline{Y} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = Y_1 \cos \theta - Y_2 \sin \theta.$$

$$X_2 = Y_1 \sin \theta + Y_2 \cos \theta.$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

من الواضح أن العلاقة بين المتغيرات القديمة  $X_1$  و  $X_2$  والمتغيرات الجديدة  $Y_1$  و  $Y_2$  علاقة تبادلية وحيدة وجلكوبيان هذه العلاقة هو:

$$J_{(y_1, y_2)} = |C| = \pm 1$$

إذن بتطبيق العلاقة (6. 4. 25) نحصل على الدالة  $g(y_1, y_2)$

ملاحظة (6 - 4 د - 4): إذا كانت المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  لها توزيع مشترك  $f(x_1, \dots, x_n)$  يمكن تحليله إلى  $n$  من العوامل كما يأتي:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$$

حيث  $f(x)$  هي دالة كثافة احتمال (موحدة) لكل متغير عشوائي  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )، فإن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  تسمى بـ 'عينة عشوائية' حجمها  $n$  مسحوبة من مجتمع توزيعه - أو دالة كثافة احتماله -  $f(\cdot)$ . لذلك عند وجود متغيرات عشوائية مستقلة  $X_1, \dots, X_n$  لها توزيع موحد  $f(\cdot)$  فبتنا قد نستخدم تعبير "متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها دالة كثافة الاحتمال  $f(\cdot)$ " أو نعبر عن ذلك بالقول " $X_1, \dots, X_n$  عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله  $f(\cdot)$ ".

### (6 - 5) توزيعات الإحصاءات الترتيبية للعينة:

(6 - 5 - 1) دالة كثافة احتمال إحصاء ترتيبي واحد ودالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصائين ترتيبيين أو أكثر:

لقد قدمنا في بند (3 - 2 - 4) الوسيط والكميات الترتيبية وذكرنا أن الوسيط هو إحدى الثوابت أو القيم النموذجية التي نقيد في تحديد خصائص المجتمع، وعرفنا وسيط المجتمع بأنه قيمة  $x$  التي تحقق المعادلة  $F(x) = \frac{1}{2}$  حيث  $F(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمجتمع. ويمكن تعميم ذلك بتعريف ما يسمى بالكميات الترتيبية Quantiles. والكمية الترتيبية من الدرجة  $p$  في المجتمع تعرف بأنها قيمة  $x$  التي تحقق المعادلة  $F(x) = p$  حيث  $F(x)$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للمجتمع و  $p$  كسر حقيقي  $0 \leq p \leq 1$ ، وبالتالي فإن الوسيط هو الكمية الترتيبية من الدرجة  $\frac{1}{2}$  والرابع الأعلى هو الكمية الترتيبية من الدرجة  $\frac{3}{4}$  والرابع الأدنى هو الكمية الترتيبية من الدرجة  $\frac{1}{4}$ . وسوف نرمز للكمية الترتيبية من الدرجة  $p$  بالرمز  $X_{(p)}$  - حيث نضع الدلائل السفلى  $p$  بين



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

قوسين — وبالتالي نرمز للربيع الأدنى بالرمز  $X_{(1)}$  وللوسيط بالرمز  $X_{(n/2)}$  وللربيع الأعلى بالرمز  $X_{(n)}$  ... وهكذا.

والكمية الترتيبية من الدرجة  $p$  التي تحسب من بيانات العينة تسمى "إحصاء العينة الترتيبى من الدرجة  $p$ " المقابل للكمية الترتيبية من الدرجة  $p$  فى المجتمع. وكلمة "إحصاء" هنا تدل على أن الكمية الترتيبية من الدرجة  $p$  للعينة تمثل متغير عشوائى، فهى تختلف من عينة لأخرى بخلاف الكمية الترتيبية للمجتمع التى تعتبر كمية ثابتة تسمى بـ "معلمة المجتمع الترتيبية". وكل ثوابت المجتمع تسمى معالم أما القيم المناظرة لها فى العينة تسمى إحصاءات. ولمزيد من التعرف على معنى "الإحصاء" انظر تعريف (6 - 1) وكذلك بند (11 - 10) التالى. والإحصاءات الترتيبية للعينة مثل عزوم العينة تلعب دوراً هاماً فى الاستدلال الإحصائى. فالإحصاءات الترتيبية للعينة هى المتغيرات العشوائية المقابلة للإحصاءات الترتيبية للمجتمع التى تمثل ثوابت المجتمع كما أن عزوم العينة هى المتغيرات العشوائية المقابلة لعزوم المجتمع التى تعتبر مجموعة من الثوابت.

ويرجع تعاضل الدور الذى تلعبه الإحصاءات الترتيبية فى الاستدلال الإحصائى إلى أن بعض خصائص هذه الإحصاءات لا تعتمد على توزيع المجتمع الذى نسحب منه العينة العشوائية. نفرض أن  $X_1, \dots, X_n$  تمثل عينة عشوائية حجمها  $n$  مسحوبة من مجتمع دالة توزيعه الاحتمالى  $F(x)$ . فإذا رتبنا قيم  $X$ 's السابقة تصاعدياً حسب القيمة ورمزنا للمفردة  $X$  السرى ترتيبها  $r$  بالرمز  $Y_r$  أو بالرمز  $X_{(r)}$  — علماً بأن الترتيب هنا يتم تصاعدياً على أساس قيمة كل مفردة أى أن  $Y_1$  هى أصغر قيمة من قيم  $X$  يليها  $Y_2$  السرى تمثل ثانى قيمة (التالية من حيث الكبر) من قيم  $X$  و...  $Y_n$  هى أكبر قيمة من قيم  $X$  — فإن للقيم الترتيبية الجديدة تحقق العلاقة

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n$$

ونعرف القيم الترتيبية  $Y_1, \dots, Y_n$  بأنها "الإحصاءات الترتيبية" للعينة العشوائية

$$X_1, \dots, X_n$$

والآن سنحاول فيما يلى إيجاد التوزيعات الاحتمالية المشتركة والهامشية للإحصاءات الترتيبية للعينة، علماً بأننا قبل ذلك أوجدنا التوزيعات الهامشية لأصغر قراءة  $Y_1 = \min[X_1, \dots, X_n]$  وأكبر قراءة  $Y_n = \max[X_1, \dots, X_n]$  — انظر بند (6 - 2) — (6 - 21) العلاقات من (6. 2. 21) حتى (6. 2. 26). وسنبداً أولاً بتعريف الإحصاءات الترتيبية للمتغيرات العشوائية المستمرة.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

### تعريف (6-5-1) الإحصاءات الترتيبية Order Statistics:

نفرض أن لدينا عينة عشوائية  $X_1, \dots, X_n$  حجمها  $n$  من مجتمع ما يمثلته متغير مستمر  $X$  دالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  ودالة كثافة احتماله  $f(x) = F'(x)$  حيث  $f(x) > 0$  لقيم  $a < x < b$ . إذا رمزنا لأصغر قيمة من قيم  $X$  في العينة بالرمز  $Y_1$  والقيمة التالية لها (الأكبر منها مباشرة أو تساويها) بالرمز  $Y_2$  وهكذا حتى أكبر قيمة في العينة نرمز لها بالرمز  $Y_n$ . حيث  $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n$  تمثل قيم  $X_1, \dots, X_n$  عندما تكون قيم  $X$  في ترتيب تصاعدي حسب القيمة، فإن المتغير  $Y_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) يسمى بـ "الإحصاء الترتيبى" Order Statistic ذو الترتيب  $r$  للعينة العشوائية  $X_1, \dots, X_n$ .

ملاحظة (6-5-1):

- (أ) يجب ملاحظة أن المتغيرات  $Y_1, \dots, Y_n$  تمثل إحصاءات (فهى دوال في العينة العشوائية  $X_1, \dots, X_n$ ) بالإضافة إلى أنها في ترتيب معين.
- (ب) الإحصاءات الترتيبية  $Y_1, \dots, Y_n$  تعتبر متغيرات غير مستقلة لأنه إذا كان  $Y_r$  أكبر من أو تساوى  $y$  فإن  $Y_{r+1}$  لابد أن تكون أكبر من أو تساوى  $y$ .
- وهى في هذا تختلف عن المتغيرات  $X_1, \dots, X_n$  التى تمثل مفردات العينة العشوائية حيث أنها متغيرات مستقلة.

نظرية (6-5-1):

إذا كانت  $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n$  تمثل الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مسحوية من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  ودالة توزيعه الاحتمالي  $F(x)$  ( $-\infty < a < x < b < \infty$ ) فإن:

- (أ) دالة كثافة احتمال الإحصاء الترتيبى  $Y_r$  هى:

$$(6.5.1): f_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(y_r)]^{r-1} [1 - F(y_r)]^{n-r} f(y_r).$$

لقيم  $a < y_r < b$  وتساوى صفر خلاف ذلك.

الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(ب) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصائين الترتيبين  $Y_1$  و  $Y_r$  ( $1 \leq r < s \leq n$ ) هي:

$$(6.5.2): f_{r,s}(y_r, y_s) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} [F(y_r)]^{r-1} \\ [F(y_s) - F(y_r)]^{s-r-1} [1 - F(y_s)]^{n-s} f(y_r) f(y_s) \\ \text{نقيم } a < y_r < y_s < b \text{ وتسوى صفر خلاف ذلك.}$$

(ج) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات  $Y_1, \dots, Y_n$  هي:

$$(6.5.3): f_{1,\dots,n}(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \dots f(y_n) \\ \text{نقيم } a < y_1 < y_2 < \dots < y_n < b \text{ وتسوى صفر خلاف ذلك.}$$

(الإثبات)

$$f_r(y_r) = \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{F_r(y_r + \Delta y_r) - F_r(y_r)}{\Delta y_r} = \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{\Pr[y_r < Y_r \leq y_r + \Delta y_r]}{\Delta y_r} \\ = \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y_r} \Pr[(r-1) \text{ of the } X's \leq y_r; \text{ one } X_i \in (y_r, y_r + \Delta y_r)] \\ ; (n-r) \text{ of the } X_i > y_r + \Delta y_r]$$

ومن التوزيع المتعدد الحدود بند (7 - 4 - 1) يمكن كتابة المعادلة السابقة في الصيغة التالية:

$$f_r(y_r) = \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{n!}{(r-1)! 1! (n-r)!} [F(y_r)]^{r-1} \\ \frac{[F(y_r + \Delta y_r) - F(y_r)]}{\Delta y_r} [1 - F(y_r + \Delta y_r)]^{n-r} \\ = \frac{n!}{(r-1)! (n-r)!} [F(y_r)]^{r-1} [1 - F(y_r)]^{n-r} f(y_r)$$

هـ. ط. ث (i)

### الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(ب) وبالمثل يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصائين  $Y_r$  و  $Y_s$  لقيم  $1 \leq r < s \leq n$  كما يلي:

$$\begin{aligned} f_n(y_r, y_s) &= \lim_{\substack{\Delta y_r \rightarrow 0 \\ \Delta y_s \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta y_r \Delta y_s} \Pr[y_r < Y_r \leq y_r + \Delta y_r ; y_s < Y_s \leq y_s + \Delta y_s] \\ &= \lim_{\substack{\Delta y_r \rightarrow 0 \\ \Delta y_s \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta y_r \Delta y_s} \Pr[(r-1) \text{ of the } X's \leq y_r ; \text{one } X \in (y_r, y_r + \Delta y_r] \\ &\quad ; (s-r-1) \text{ of the } X's \in (y_r + \Delta y_r, y_s] \\ &\quad ; \text{one } X \in (y_s, y_s + \Delta y_s] \\ &\quad ; (n-s) \text{ of the } X's > y_s + \Delta y_s] \end{aligned}$$

ومن التوزيع المعتاد المتعدد بند (7 - 4 - 1):

$$\begin{aligned} f_n(y_r, y_s) &= \lim_{\substack{\Delta y_r \rightarrow 0 \\ \Delta y_s \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta y_r \Delta y_s} \frac{n!}{(r-1)! 1! (s-r-1)! 1! (n-s)!} \\ &\quad [F(y_r)]^{r-1} [F(y_r + \Delta y_r) - F(y_r)] \\ &\quad [F(y_s) - F(y_r + \Delta y_r)]^{s-r-1} [F(y_s + \Delta y_s) - F(y_s)] [1 - F(y_s + \Delta y_s)]^{n-s} \\ &= \frac{n!}{(r-1)! (s-r-1)! (n-s)!} [F(y_r)]^{r-1} \\ &\quad [F(y_s) - F(y_r)]^{s-r-1} [1 - F(y_s)]^{n-s} f(y_r) f(y_s) \end{aligned}$$

لقيم  $a \leq y_r < y_s \leq b$  وتساوى الصفر لقيم  $y_r \geq y_s$ .

هـ. ط. ث (ب)

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(جـ) وبصورة عامة نجد من (2. 18. 9) حتى (2. 18. 12) أن:

$$\begin{aligned} f_{12...n}(y_1, \dots, y_n) &= \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{r=1}^n \Delta y_r} \Pr[y_1 < Y_1 \leq y_1 + \Delta y_1; \dots; y_n < Y_n \leq y_n + \Delta y_n] \\ &= \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{1}{\prod_{r=1}^n \Delta y_r} \Pr[\text{one } X \in (y_1, y_1 + \Delta y_1]; \dots \\ &\quad ; \text{one } X \in (y_n, y_n + \Delta y_n)] \end{aligned}$$

ومن التوزيع المتعدد الحدود بند (7 - 4 - 1):

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta y_r \rightarrow 0} \frac{n!}{\prod_{r=1}^n \Delta y_r} [F(y_1 + \Delta y_1) - F(y_1)] \dots [F(y_n + \Delta y_n) - F(y_n)] \\ &= n! f(y_1) \dots f(y_n); a \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq b \end{aligned}$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

هـ. ط. ث.

ملاحظة (6 - 5 - 1 ب):

دالة كثافة الاحتمال المشتركة لأي مجموعة جزئية من المتغيرات  $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$  يمكن الحصول عليها بمكاملة الدالة  $f_{12...n}(y_1, \dots, y_n)$  المعطاة في (جـ) من النظرية السابقة - بالنسبة لباقي المتغيرات التي لا تشملها المجموعة الجزئية.

(6 - 5 - 2) توزيع دوال في إحصاءات ترتيبية:

### Distribution of Functions of Order Statistics:

إذا كانت  $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n$  هي الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مسحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$  فإن وسيط العينة يعرف بأنه الإحصاء الترتيبى الأوسط. فإذا كانت  $n$  عدد فردى - لتكن  $n = 2r + 1$  حيث  $r$  عدد صحيح موجب - سيكون لدينا إحصاء ترتيبى أوسط وحيد هو  $Y_r$  وتكون دالة كثافة احتماله هي الدالة  $f_r(y_r)$  المعطاة بالعلاقة (1. 5. 6)، أما إذا كانت  $n$  عدد

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

زوجى -  $n = 2r$  - مثلاً - فإن الوسيط يكون متوسط الإحصائين  $Y_r$  و  $Y_{r+1}$  أى أن الوسيط  $\frac{1}{2}(Y_r + Y_{r+1})$  وفى هذه الحالة يمكن الحصول على دالة كثافة احتمال الوسيط من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصائين  $Y_r$  و  $Y_{r+1}$  المعطاة فى نظرية (6-5-1) (ب)، ومن هذه الدالة المشتركة يمكن استخدام العلاقة  $\frac{1}{2}(Y_r + Y_{r+1})$  فى إيجاد دالة كثافة احتمال الوسيط. وبالمثل يمكن عمل ذلك بالنسبة للربيع الأدنى والربيع الأعلى والمدى  $R$  حيث  $R = Y_n - Y_1$  وغير ذلك من دوال فى الإحصاءات الترتيبية  $Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n$ . ونقدم فيما يلى بعض التوزيعات الاحتمالية لدوال فى الإحصاءات الترتيبية  $Y_1 \leq \dots \leq Y_n$  لعينة عشوائية  $X_1, \dots, X_n$  مسحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله  $f(x)$ :

(أ) إذا كان حجم العينة  $n = 2r + 1$  حيث  $r$  عدد صحيح موجب فإن وسيط العينة يكون هو الإحصاء الترتيبى الأوسط - أى الإحصاء  $Y_r$  - وتكون دالة كثافة احتمال الوسيط هي الدالة  $f_r(y_r)$  المعطاة بالعلاقة (6.5.1).

(ب) يمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية  $Y_k, Y_r, \dots, Y_s$  يمكن إثبات أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية  $Y_k, Y_r, \dots, Y_s$  هي:

$$f_{k, \dots, s}(y_k, y_r, \dots, y_s) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k) \Gamma(r-k) \dots \Gamma(n-s+1)} [F(y_k)]^{k-1} [F(y_r) - F(y_k)]^{r-k-1} \dots [1 - F(y_s)]^{n-s} f(y_k) f(y_r) \dots f(y_s).$$

(ج) إذا كان حجم العينة  $n = 4m$  حيث  $m$  عدد صحيح موجب فيمكن تعريف الربيع الأدنى بأنه الإحصاء الترتيبى  $Y_m$  والربيع الأعلى هو الإحصاء الترتيبى  $Y_{3m}$  وتكون دالة كثافة احتمال الربيع الأدنى هي الدالة  $f_m(y_m)$  المعطاة بالعلاقة (6.5.1) وبالمثل تكون دالة كثافة احتمال الربيع الأعلى هي  $f_{3m}(y_{3m})$  كما أن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للربيعين الأدنى  $Y_m$  والأعلى  $Y_{3m}$  تكون هي الدالة  $f_{m, 3m}(y_m, y_{3m})$  المعطاة بالعلاقة (6.5.2) حيث  $m_1 = m$  و  $m_3 = 3m$ .

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

### تعاريف الباب السادس

(6-1): إذا كانت  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  تمثل عينة عشوائية حجمها 3 مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 2x \quad ; \quad 0 < x < 1$$

و  $Y$  هو النهاية العظمى للمتغيرات  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$ :

$$Y = \max_i (x_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

أوجد دالة كثافة احتمال  $Y$ .

(6-2):  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  و  $X_4$  تمثل عينة عشوائية مكونة من 4 مفردات مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 3x(1-x)^2 \quad ; \quad 0 < x < 1$$

وتساوى صفر خلاف ذلك.

فإذا كان:  $Y_1$  و  $Y_2$  هما النهاية الصغرى والنهاية العظمى للمتغيرات  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$

$$Y_1 = \min_i (X_i) \quad ; \quad Y_2 = \max_i (X_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال لكل من  $Y_1$  و  $Y_2$ .

(6-3): عند إلقاء زهرة نرد متزنة ثلاث مرات مستقلة. إذا كان المتغير العشوائي  $X_i$

هو عدد النقاط التي تظهر على سطح الزهرة الملقاة في الرمية  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) والمتغير العشوائي  $Y$  هو النهاية العظمى للمتغيرات  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  أى أن:

$$Y = \max_i (X_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير  $Y$ .

(6-4): إذا كانت دالة احتمال المتغير العشوائي  $X$  هي:

$$P(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad ; \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

أوجد دالة احتمال المتغير:  $Y = X^3$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(5-6):  $X_1$  و  $X_2$  عينة عشوائية مكونة من مفردتين مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:  $0 < x < 2$  ;  $f(x) = \frac{1}{2}$  ; وتساوى الصفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$ . وإذا كان المتغير  $Y = X_1 + X_2$ ، فأوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير  $Y$ .

(6-6):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان دالة كثافة احتمالهما المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{36} x_1 x_2 \quad ; \quad x_1 = 1, 2, 3 \quad ; \quad x_2 = 1, 2, 3.$$

أوجد: أولاً: دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1 = X_1 X_2$  و  $Y_2 = X_2$ . ثانياً: دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $Y_1$ .

(7-6):  $X_1$  و  $X_2$  عينة عشوائية مكونة من مفردتين مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:  $0 < x < 1$  ;  $f(x) = 1$  ; وتساوى الصفر خلاف ذلك. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي  $Y = X_1/X_2$ .

(8-6): عينة عشوائية مكونة من ثلاث مفردات  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

والمتغيرات:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2) ; Y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3) ; Y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3).$$

بين أن المتغيرات  $Y_1$  و  $Y_2$  و  $Y_3$  مستقلة وأن توزيع كل منها هو نفس توزيع المتغيرات  $X$ 's.

(9-6): في التمرين السابق استخدم التحويلة القطبية التالية:

$$X_1 = \rho \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad ; \quad X_2 = \rho \cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad ; \quad X_3 = \rho \sin \theta_1$$

ثم بين أن المتغيرات  $\rho$  و  $\theta_1$  و  $\theta_2$  مستقلة وأن دالة كثافة احتمال  $\rho$  هي:

$$f(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho^2 \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq \infty.$$



## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(6 - 10): إذا كن:

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x_1-x_2} ; (x_1, x_2) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. هي دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_1$  و  $X_2$ . فأوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لكل من  $Y_1 = X_1 - X_2$  و  $Y_2 = X_1 + X_2$ .

(6 - 11):  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = \frac{x^2}{9} ; 0 < x < 3$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة احتمال  $Y = X^3$ .

(6 - 12):  $X$  متغير عشوائي دالة كثافة احتماله:

$$f(x) = 2x e^{-x^2} ; 0 < x < \infty.$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة احتمال المتغير  $Y = X^2$ .

(6 - 13): ثلاث متغيرات عشوائية  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  لها التوزيع المشترك التالي:

$$f(x_1, x_2, x_3) = K x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} x_3^{a_3-1}$$

والمتغيرات الثلاثة موجبة وتحقق العلاقة  $X_1 + X_2 + X_3 \leq 1$ . بين أن:

$$K = \frac{\Gamma(n_1 + n_2 + n_3 + 1)}{\Gamma(n_1) \Gamma(n_2) \Gamma(n_3)}.$$

(6 - 14):  $X_1$  و  $X_2$  عينة عشوائية مكونة من مفردتين مسحوبة من مجتمع دالة كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} ; -\infty \leq x \leq \infty.$$

بين أن دالة كثافة احتمال المتغير  $Y = X_1/X_2$  هي:

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} ; -\infty \leq y \leq \infty$$

(أي أن النسبة بين متغيرين مستقلين كل منهما له توزيع معناد قياسي يكون لها توزيع كوشي).

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(6-15):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان كل منهما له توزيع "جاما" دالة كثافة احتمالهما المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(a) \Gamma(b)} x_1^{a-1} x_2^{b-1} e^{-x_1-x_2}$$

$$;; 0 < x_1 < \infty ; 0 < x_2 < \infty ; a > 0 ; b > 0$$

بين أن دالة كثافة احتمال المتغير  $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$  هي:

$$g(y) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} y^{a-1} (1-y)^{b-1} ; ; 0 < y < 1.$$

أي أن  $Y$  له توزيع  $\beta(a, b)$ .

(6-16):  $n$  من المتغيرات العشوائية  $X_1, \dots, X_n$  لها التوزيع المشترك التالي:

$$f(x_1, \dots, x_n) = K x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \dots x_n^{m_n-1} \cdot g(x_1 + \dots + x_n).$$

حيث كل هذه المتغيرات موجبة وتحقق العلاقة  $\sum_{i=1}^n X_i \leq 1$  بين أن:

$$K = \frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1 + m_2 + \dots + m_n)} \int_0^1 y^{M-1} g(y) dy.$$

حيث:  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ .

(6-17):  $X$  متغير عشوائي له التوزيع المنتظم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} ; ; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

ويساوى صفر خلاف ذلك. بين أن المتغير  $Y = \tan X$  له توزيع كوشي:

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} ; ; -\infty \leq y \leq \infty$$

(6-18):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان كل منهما له توزيع معاد دالة كثافة احتمالها:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} ; ; -\infty \leq x \leq \infty ; \sigma > 0 ; -\infty \leq \mu \leq \infty.$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

فإذا كان:  $Y_1 = X_1 + X_2$  و  $Y_2 = X_1 - X_2$  أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $Y_1$  و  $Y_2$  وبين أنهما متغيران مستقلان.

(6 - 19):  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  ثلاث متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها توزيع معتمد بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; -\infty \leq x \leq \infty.$$

والمتغيرات العشوائية  $Y_1$  و  $Y_2$  و  $Y_3$  معرفة بالعلاقات التالية:

$$X_1 = Y_1 \cos Y_2 \sin Y_3 \quad ; \quad X_2 = Y_1 \sin Y_2 \sin Y_3 \quad ; \quad X_3 = Y_1 \cos Y_3.$$

حيث:  $0 \leq Y_1 < \infty$  و  $0 \leq Y_2 \leq 2\pi$  و  $0 \leq Y_3 \leq \pi$ . بين أن المتغيرات العشوائية  $Y_1$  و  $Y_2$  و  $Y_3$  مستقلة.

(20 - 2):  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  تمثل عينة عشوائية مكونة من 3 مفردات مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:  $f(x) = e^{-x} \quad ; 0 \leq x < \infty$  فإذا كانت:

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}, \quad Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

بين أن المتغيرات العشوائية  $Y_1$  و  $Y_2$  و  $Y_3$  مستقلة.

(21 - 2):  $X$  متغير عشوائي له التوزيع التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; -\infty \leq x \leq \infty$$

والعلاقة بين  $X$  ومتغير آخر  $Y$  هي:

$$X = a \ln(Y - b) + c$$

بين أن التوقع  $\bar{Y}$  والوسيط للمتغير  $Y$  تحقق العلاقة التالية:

$$\frac{\bar{Y} - Y_0}{\bar{Y} - Y_{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{(Y_0/a)^2} - e^{-(Y_{\frac{1}{2}}/a)^2}}{e^{(Y_0/a)^2} - 1}$$

وعندما  $a \rightarrow \infty$  فإن هذه النسبة تؤول إلى 3.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(6 - 22): إذا كانت:  $-1 < x < 1$  ;  $f(x) = \frac{1}{2}$  هي دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي  $X$  فأوجد دالة كثافة احتمال  $Y = X^2$ .

(6 - 23): إذا كان المتغير العشوائي  $X$  له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{4} ; -1 < x < 3$$

وتساوى صفر خلاف ذلك. أوجد دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي  $Y = X^2$ .

(6 - 24):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان وكل منهما له التوزيع المنتظم التالي:

$$f(x) = 1 ; 0 \leq x \leq 1.$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة كثافة الاحتمال للمتغيرات

$$(أ) : Y_1 = X_1 X_2 \quad (ب) : Y_2 = X_1 - X_2 \quad (ج) : Y_3 = |X_1 - X_2|$$

(6 - 25):  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  ثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له التوزيع المنتظم التالي:

$$f(x) = 1 ; 0 \leq x \leq 1.$$

أوجد احتمال أن معادلة الدرجة الثانية في  $Y$ :

$$X_1 Y^2 + 2X_2 Y + X_3 = 0$$

يكون لها جذور حقيقية. كذلك أوجد الاحتمال نفسه إذا كانت المعادلة:

$$X_1 Y^2 + X_2 Y + X_3 = 0$$

(6 - 26): إذا كان  $X_1$  متغيراً عشوائياً له توزيع منتظم دالة كثافة احتماله:

$$f_1(x) = \frac{1}{a_1 - b_1} ; a_1 \leq X_1 \leq b_1.$$

و  $X_2$  متغيراً عشوائياً آخر مستقل عن  $X_1$  وله توزيع منتظم:

$$f_2(x) = \frac{1}{a_2 - b_2} ; a_2 \leq X_2 \leq b_2.$$

فأوجد دالة كثافة احتمال للمتغير  $Y = X_1 + X_2$ .

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(6 - 27):  $X_1$  و  $X_2$  و ... و  $X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها له التوزيع المنتظم التالي:

$$f(x_i) = 1 \quad ; \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

أوجد دالة كثافة احتمال كل من المتغيرات التالية:

(أ): المجموع  $Y_2 = X_1 + X_2$

(ب): المجموع  $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$

(ج): المجموع  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$

(6 - 28): إذا كانت:

$$f(x_1, x_2) = e^{-(x_1 + x_2)} \quad ; \quad x_1 > 0, x_2 > 0$$

هي دالة كثافة احتمال المتغيران الموجبان  $X_2$  و  $X_1$  فأوجد دالة كثافة احتمال المجموع  $Y = X_1 + X_2$ .

(6 - 29): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين  $X_2$  و  $X_1$  هي:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 \quad ; \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq x_2 \leq 1.$$

أوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X_2^2$  و  $X_1^2$ .

(6 - 30): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين العشوائيين  $X_2$  و  $X_1$  هي:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 \quad ; \quad 0 < x_2 < x_1 \leq 1.$$

أوجد دالة كثافة احتمال الفرق  $Y = X_1 - X_2$ .

(6 - 31): إذا كانت  $X_1$  و  $X_2$  و ... و  $X_n$  متغيرات عشوائية مستقلة كل منها له توزيع كوشي دالة كثافة احتماله:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad ; \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

أثبت أن كثافة احتمال المتوسط  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  هي نفس كثافة احتمال أى

متغير من المتغيرات. وأن كثافة احتمال المجموع:  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  هي:

$$f_2(y) = \frac{n}{\pi[n + y^2]} \quad ; -\infty \leq y \leq \infty$$

(6-32):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان مستقلان الأول له كثافة احتمال كوشى:

$$f_1(x_1) = \frac{a}{\pi[a^2 + x_1^2]} \quad ; -\infty \leq x_1 \leq \infty.$$

والثانى له أيضاً كثافة احتمال كوشى:

$$f_2(x_2) = \frac{b}{\pi[b^2 + x_2^2]} \quad ; -\infty \leq x_2 \leq \infty$$

أثبت أن كثافة احتمال المجموع  $Y = X_1 + X_2$  هي:

$$f(y) = \frac{(a+b)}{\pi[(a+b)^2 + y^2]} \quad ; -\infty \leq y \leq \infty.$$

(6-33):  $X_1$  و  $X_2$  متغيران عشوائيان دالة كثافة احتمالهما المشتركة:

$$f(x_1, x_2) = \frac{K(x_1 + x_2 + 1)}{(1 + x_1)^4 (1 + x_2)^4} \quad ; 0 \leq x_1 \leq \infty ; 0 \leq x_2 \leq \infty.$$

بين أن:  $K = 9/2$  وأثبت أن دالة كثافة الاحتمال الهامشية للمتغير  $X_1$  هي:

$$f(x_1) = \frac{3(2x_1 + 3)}{4(1 + x_1)^4} \quad ; 0 \leq x_1 \leq \infty.$$

(6-34):  $X_1, X_2, X_3$  عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع مستمر دالة كثافة احتماله:

$f(x) = 2x$  ;  $0 < x < 1$  لحسب احتمال أن أصغر مفردة من مفردات العينة

$X_1, X_2, X_3$  تزيد عن وسيط التوزيع.

## الفصل السادس - توزيعات دوال في متغيرات عشوائية وتحويل المتغيرات

(6 - 35): إذا كانت دالة كثافة احتمال مجتمع له توزيع منقطع هي:

$$f(x) = \frac{1}{6} ; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

وتساوى صفر خلاف ذلك، فاثبت أن دالة كثافة احتمال أصغر مفردة من مفردات عينة حجمها 5 مفردات مسحوبة من هذا المجتمع هي:

$$g_1(y_1) = \left(\frac{7-y_1}{6}\right)^5 - \left(\frac{6-y_1}{6}\right)^5 ; y_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

(يجب ملاحظة أن العينة مسحوبة من مجتمع له توزيع منقطع وليس مستمر كما ذكرنا في البند (6 - 5) لذلك يجب أخذ ذلك في الاعتبار عند حل هذا التمرين).

(6 - 36): إذا كانت  $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$  هي الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها 5 مفردات مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = 3x^2 ; 0 < x < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك. بين أن  $Z_1 = Y_2/Y_4$  ;  $Z_2 = Y_4$  مستقلان.

(6 - 37): إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $X$  و  $Y$  هي:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x(x+y) ; 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

وتساوى الصفر خلاف ذلك.

فإذا كانت:

$$U = \min (X, Y)$$

$$V = \max (X, Y)$$

لوجد دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين  $U$  و  $V$ .





## REFERENCES

1. **Aroian, L. A.** "A study of R. A. Fisher's  $z$ -distribution and the related  $F$  distribution," *Annals of Mathematical Statistics*, 12, 429- 448 (1941).
2. **Ashby, T.** "A modification to Paulson's approximation to the variance ratio distribution," *The Computer Journal*, 11, 209-210 (1968).
3. **Bánkövi, G.** "A note on the generation of beta distributed and gamma distributed random variables," *Mathematical Proceedings of the Hungarian Academy of Science, Series A*, 9, 555- 562 (1964).
4. **Bartlett, M. S.** "On the theory of statistical regression," *Proc. Royal soc., Edinburgh*, 53, 260 (1933).
5. **Cheng, S. W. and Fu, J. C.** "An algorithm to obtain the critical values of the  $t$ ,  $\chi^2$  and  $F$  distributions," *Statistics & Probability Letters*, 1, 223- 227 (1983).
6. **Cochran, W. G.** "The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 30, 178- 191 (1934).
7. **Craige, A. T.** "Note on the independence of certain quadratic forms," *Ann. Math. Statist.*, 14, 195- 197 (1943).
8. **Cramér, H.** "Random Variables and Probability Distributions," *Cambridge Tracts in Mathematics and Math. Physics*, 36, Cambridge University Press, (1937).
9. **Cramér, H.** "Mathematical Methods of Statistics," Princeton University Press, Princeton, N.J., (1946).

## المراجع

10. *Croxtan, F. E., Cowden, D.J. and Klein, S.* "Applied General Statistics," Prentice-Hall, New Delhi, (1971).
11. *David, F. N.* "Tables of the correlation coefficient," Cambridge Univ. Press, (1938).
12. *David, F. N.* "Note on the application of Fisher's k-statistics," *Biometrika*, 36, 383 (1949a).
13. *David, F. N.* "Moments of the Z and F distributions," *Biometrika*, 36, 394 (1949b).
14. *David, F. N. and Johnsos, N. L.* "The effect of non-normality on the power function of the F-test," *Biometrika*, 38, 43 (1951).
15. *David, F. N. and Kendall, M. G.* "Tables of symmetric functions," *Biometrika*, 36, 431; 38, 435; 40, 427; 42, 223 (1949, 1951, 1953 1955).
16. *Dirichlet, P. G. L.* "Sur un nouvelle methode pour la determination des integrals multiples," *Comp. Rend. Acad. Sci.*, Vol. 8, 156- 160 (1939).
17. *Elderton, W. P.* "Tables for testing the goodness of fit of theory to observation," *Biometrika*, 1, 155- 163 (1902).
18. *Ferguson, T. S.* "Mathematical Statistics, A Decision Theoretic Approach," Academic Press, Inc., New York, (1967).
19. *Fisher, R. A.* "On the probable error of a coefficient of correlation deduced from a small sample," *Metron*, 1, No. 4, 1 (1921).
20. *Fisher, R. A.* "On the interpretation of  $\chi^2$  from contingency tables and calculation of P," *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 85, 87- 94 (1922).
21. *Fisher, R. A.* "The distribution of the partial correlation coefficient," *Metron*, 3, 329 (1924a).
22. *Fisher, R. A.* "The influence of rainfall on the yield of wheat at Rothamsted," *phil. Trans.*, B, 213, 89 (1924b).

23. **Fisher, R. A.** "On a distribution yielding the error functions of several well-known statistics," Proc. Int. Math. Congress, Vol. II, Toronto, 805- 813 (1924c).
24. **Fisher, R. A.** "Applications of "Student's" distribution," Metron. 5, 90- 104 (1925a).
25. **Fisher, R. A.** "Statistical Methods for Research Workers," first edition, twelfth edition (1954), Oliver and Boyd, Edinburgh. [183, 185, 187, 276, 301], (1925b).
26. **Fisher, R. A.** "Moments and product moments of sampling distributions," Proc. London Math. Soc., Vol. 30, 199- 238 (1928a).
27. **Fisher, R. A.** "The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient," Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 121, 654- 673 (1928b).
28. **Fisher, R. A. and Yates, F.** "Statistical Tables for use in Biological, Agricultural and Medical Research," 4<sup>th</sup> edition, Oliver and Boyd, Edinburgh, (1953).
29. **Fisz, M.** "Probability Theory and Mathematical Statistics," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1963).
30. **Goldstein, R. B.** "Algorithm 451: chi-square quantiles," Communications of the Association of Computing Machinery, 16, 483- 485 (1973).
31. **Gray, H. L., Thompson, R. W. and McWilliams, G. V.** "A new approximation for the chi-square integral," Mathematics of Computation, 23, 85- 89 (1969).
32. **Haines, P. D.** "A closed form approximation for calculating the percentage points of the F and t distributions," Applied Statistics, 37, 95- 100 (1988).
33. **Hodges, J. L., Jr, and Lehmann, E. L.** "Moments of chi and power of t," proc. 5<sup>th</sup> Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob., 1, 187 (1968).

## المراجع

34. **Hotelling, H.** "New light on the correlation coefficient and its transforms," J. R. Statist. Soc., B, 15, 193 (1953).
35. **Johnson, N. L. and Welch, B. L.** "On the calculation of the cumulants of the  $\chi^2$  distribution," Biometrika, 31, 216- 218 (1939).
36. **Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N.** "Continuous Univariate Distributions," John Wiley & Sons, Inc., New York (1994).
37. **Kendall, M. G. and Stuart, A.** "The Advanced Theory of Statistics, Vol. 2, Inference and Relationship," Hafner Publishing Company, Inc., New York, (1961).
38. **Kendall, M. G. and Stuart, A.** "The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, Distribution Theory," Hafner Publishing Company, Inc., New York, (1963).
39. **Kendall, M.G. and Stuart, A.** "The Advanced Theory of Statistics, Vol. 3, Design and Analysis, and Time Series," Hafner Publishing Company, Inc., New York, (1966).
40. **Khamis, S. H. and Rudert, W.** "Tables of the Incomplete Gamma Function Ratio: Chi-square Integral, Poisson Distribution," Justus von Liebig, Darmstadt, Germany, (1965).
41. **Khatri, C. G.** "Some results for the singular normal multivariate regression models," Sankhya A, 30, 267- 280 (1968).
42. **Lancaster, H. O.** "Traces and cumulants of quadratic forms in normal variables," J. R. Statist. Soc., B, 16, 247 (1954)
43. **Lehmann, E. L.** "Testing Statistical Hypotheses," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1959).
44. **Merrington, M. and Thompson, C. M.** "Tables of the percentage points of the inverted beta (F) distribution," Biometrika, 33, 73 (1943).
45. **Miller, J. C. P.** "Tables of binomial coefficients," Roy. Soc. Math. Tables, vol. 3 (1954).

46. **Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C.** "Introduction to the Theory of Statistics," McGraw- Hill, Inc., (1974).
47. **Parzen, E.** "Modern Probability and Its Applications," Wiley Eastern Private Limited, New Delhi, (1960).
48. **Pearson, E. S.** "A further development of tests of normality," *Biometrika*, 22, 239 (1930)
49. **Pearson, E. S. and Hartley, H. O.** "Biometrika Tables for Statisticians," Vol. 1, Cambridge University press, (1954).
50. **Pearson, K.** "On a criterion that a system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen in random sampling," *phil. Mag.*, 50, 157- 175 (1900).
51. **Pearson, K.** "Tables of the Incomplete Gamma Function," Cambridge University press, editor (1922).
52. **Pearson, K.** "Tables of the Incomplete Beta Function," Cambridge University press, editor (1934).
53. **Price, R.** "Some non-central F-distributions expressed in closed form," *Biometrika*, 51, 107 (1964).
54. **Rao, C. R.** "Linear Statistical Inference and Its Applications," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1965).
55. **Romanowsky, V. I.** "On the moments of standard deviations and correlation coefficient in samples from normal populations," *Metron*, 5, No. 4, 3 (1925).
56. **Romanowsky, V. I.** "On the distribution of the regression coefficient in samples from normal populations," *Izvestia Acad. Nauk USSR*, 20, 643 (1929).
57. **Snedecor, G. W.** "Calculation and Interpretation of the Analysis of Variance," Ames, IA: Collegiate Press (1934).
58. **"Student"** "On the probable error of the mean," *Biometrika*, 6, 1-25 (1908).

## المراجع

59. "Student" "New tables for testing the significance of observations," *Metron*, 5, 105- 108, 114- 120 (1925).
60. *Tang, P. C.* "The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use," *Statist. Res. Mem.*, 2, 126 (1938).
61. *Tweedie, M. C. K.* "Functions of a statistical variate with given means, with special reference to Laplacian distributions," *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*, 43, 41- 49 (1947).
62. *Tweedie, M. C. K.* "Some statistical properties of inverse Gaussian distributions," *Virginia Journal of Science (New Series)*, 7, 160- 165 (1956).
63. *Tweedie, M. C. K.* "Statistical properties of inverse Gaussian distributions, I," *Annals of Mathematical Statistics*, 28, 362- 377 (1957a).
64. *Tweedie, M. C. K.* "Statistical properties of inverse Gaussian distributions, II," *Annals of Mathematical Statistics*, 28, 696- 705 (1957b).
65. *Uspensky, J. V.* "Introduction to Mathematical Probability," McGraw- Hill publishing company LTD., Bombay, New Delhi, (1937).
66. *Vanderbeck, J. P. and Cooke, J. R.* " Extended Table of Percentage Points of the Chi-Square Distribution," *Nauweps Report 7770*, U.S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, CA. (1961).
67. *Weibull, W.* "A statistical theory of the strength of material," Report No. 151, *Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handligar*, Stockholm (1939a).
68. *Weibull, W.* "The phenomenon of rupture in solids," Report No. 153, *Ingeniörs Vetenskaps Akademiens Handligar*, Stockholm (1939b).

69. **Wilks, S. S.** "Mathematical Statistics," John Wiley & Sons, Inc., New York, (1962).
70. **Wishart, J.** "The cumulants of the  $z$  and of the logarithmic  $\chi^2$  and  $t$  distributions," *Biometrika*, 34, 170- 168 (1947).
71. **Wishart, J.** "The variance ratio test in statistics," *Journal of the Institute of Actuaries Students' Society*, 6, 172- 184 (1946).
72. **Wold, A.** "Sequential Analysis," Wiley, New York (1947).
73. **Zar, J. H.** "Approximations for the percentage points of the chi-squared distribution," *Applied Statistics*, 27, 280- 290 (1978).

## المراجع العربية

1. "مبادئ فى نظرية الاحتمالات والإحصاء لرياضى وتطبيقاتها فى الاستنتاج الإحصائى" د. منى دسوقي مصطفى — دار النهضة العربية (1968).
2. "طرق التحليل الإحصائى" د. أحمد عباده سرحان — دار المعارف (1965).
3. "مبادئ الطرق الإحصائية" د. عبد الرحمن البدرى — دار النهضة العربية (1964).
4. "نظرية الاحتمالات" د. جلال مصطفى الصياد — مطابع الأهرام التجارية للقاهرة (1986).
5. "مبادئ الطرق الإحصائية" د. جلال الصياد، د. عبد الحميد محمد ربيع — تهامة للنشر والمكتبات (1983).
6. "مبادئ الإحصاء" د. عبد الحميد محمد ربيع — دار أبو المجد للطباعة بالهرم (1992).





## السيرة الذاتية للأستاذ الدكتور/ عبد الحميد محمد ربيع

- ولد في ١٠/١١/١٩٤٢ م بالقيوم، جمهورية مصر العربية.
- حصل على درجة البكالوريوس في الإحصاء التطبيقي من قسم الإحصاء بكلية الاقتصاد والعلوم السياسية، جامعة القاهرة عام ١٩٦٥م.
- حصل على درجة الماجستير في الإحصاء التطبيقي، جامعة القاهرة عام ١٩٧١م.
- حصل على درجة الدكتوراه في فلسفة الإحصاء، جامعة القاهرة عام ١٩٧٥م.
- عمل معيدا بقسم الإحصاء بكلية التجارة جامعة الأزهر عام ١٩٦٥، ثم مدرسا مساعدا للإحصاء بها عام ١٩٧١. ثم مدرسا للإحصاء بها عام ١٩٧٥. ثم أستاذا مساعدا بها عام ١٩٨٠م.
- عمل خبيرا إحصائيا بالإدارة الاقتصادية لجامعة الدول العربية في الفترة ١٩٧٦-١٩٧٩م.
- عمل أستاذا مشاركاً بكلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز، قسم الإحصاء في الفترة ١٩٨٠-١٩٨٤م.
- ثم أستاذا للإحصاء بكلية التجارة جامعة الأزهر عام ١٩٨٥م.
- ثم رئيسا لقسم الإحصاء بكلية التجارة جامعة الأزهر في الفترة من ١٩٩٦/٨/٢٤م حتى ٢٠٠٠/٦/٢١م.
- ثم عميدا لكلية التجارة جامعة الأزهر في الفترة من ٢٠٠٠/٦/٢٢م حتى الآن.

### من مؤلفاته

- (١) مبادئ الطرق الإحصائية
- (٢) مبادئ الإحصاء
- (٣) مبادئ الرياضة البحتة
- (٤) أسئلة وتمارين (تحت الطبع)



هذا الكتاب في جزئيه الأول والثاني يعتبر محاولة من المؤلف لتقديم مرجعاً للمكتبة العربية في مجال الإحصاء الرياضى لندرة المراجع العربية في هذا المجال واختص الكتاب في الجزء الأول بموضوعات نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية ودوال كثافات الاحتمال ودوال التوزيع الاحتمالي ومقاييس النزعة المركزية (التوقع والتباين والعزم) كأدلة بوصف للمجموعات الإحصائية سواء للمتغيرات العشوائية المفردة أو المتعددة وكذلك الدوال المولدة للاحتمالات والعزم وتوزيعات دوال في متغيرات عشوائية. وفي الجزء الثاني من هذا الكتاب تناولنا بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة المتقطعة والمتصلة لبعض المتغيرات العشوائية المفردة والمتعددة. وقد أفردنا باباً كاملاً للتوزيع المعتاد المتعدد هو الباب التاسع لأهمية هذا التوزيع وتناولنا بالدراسة بعض المتابعات في متغيرات عشوائية حيث قدمنا مفاهيم التقارب في الاحتمال والتقارب باحتمال واحد صحيح والتقارب في التوزيع واختتمنا هذه الدراسة بتقديم بعض التوزيعات الاحتمالية (المضبوطة والتقاربية) لبعض الإحصاءات الهامة.

ويعتبر هذا الكتاب محاولة لتبسيط دراسة وتفهم موضوعات الإحصاء الرياضى للدارسين باللغة العربية نظراً لندرة عمل ذلك في المراجع العربية السابقة. كما أنه يعتبر مقدمة جيدة لتقديم مؤلف عربي مماثل لموضوعات الاستدلال الرياضى. وهذا ما يقوم بإعداده المؤلف في الوقت الحالي بفضل الله.

